

THE ELEMENTS
OF
EUCLID

CONTAINING THE FIRST SIX BOOKS AND PORTIONS OF THE
ELEVENTH AND TWELFTH BOOKS;

TRANSLATED INTO BENGALI

FROM THE TEXT OF

DR ROBERT SIMSON;

WITH COPIOUS NOTES AND EXERCISES

BY

BRAHMA MOHAN MALLIK.

Calcutta:

PRINTED BY K. C. BANERJEE.

AT THE HITALSHI PRESS.

NO. 1 KRISTODAS PAUL'S LANE.

1871.

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞাগুলি উপপত্রের সহিত অত্র
শীত্রেই স্বতন্ত্র মুদ্রিত হইবে।

ইউক্লিডের জ্যামিতি

প্রথম ছয় অধ্যায় এবং একাদশ ও দ্বাদশ

অধ্যায়ের কিয়দংশ

ডাক্তর সিমসনের গ্রন্থ হইতে



শ্রীব্রহ্মমোহন মল্লিক কর্তৃক

বাস্তাব্য ভাষায় অনুবাদিত

এবং

বহুবিধ টীকা ও অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞার সহিত

কলিকাতা

(সিমুলিয়ার কাঁসারি পাড়ায়)

কৃষ্ণদাস পালের লেনের ১ নং বাড়িতে

হিতৈষী যন্ত্রে

ত্রিকৈলাসচন্দ্র বন্দ্যোপাধ্যায় কর্তৃক মুদ্রিত।

সন ১২৭৭।

অনুমতি ব্যতীত কেহ এই পুস্তকের কোন অংশ পৃথক
করিয়া মুদ্রিত করিতে পারিবেন না ।

P R E F A C E .

IN offering to the Public a fresh Translation of the Elements of Euclid into Bengali, it is hardly necessary to make an apology. Up to this time a complete school Edition of the Elements has not been presented to the Bengali student, and the portions of Euclid which have been published, were one and all translated from the English version of Playfair, who it is well known took great liberties with the text of the Greek Geometer.

In this Edition the Bengali rendering has been given from the text of Dr Simson, which is regarded as the authorized English version of the Elements.

The science of Geometry was not unknown to the ancient Hindus. The work of Brahma Gupta and Bhaskaracharya contain a system of Arithmetical mensuration, together with the properties of right-angled triangles, the method of finding the area of a triangle, of which the three sides are given and the ratio of the diameter of a circle to its circumference. The circumference of the circle is given by Bhaskaracharya as bearing to the diameter, the proportion of 3927 to 1253 or exactly that of 3·1416 to 1. Braham Gupta takes the proportion of the square root of 10 to 1, or 3·16 to 1. The close approximation of Bhaskaracharya, who lived (according to Colebrooke) in the 12th century, could not have been derived from any intermediate communication with Europe, where

the true ratio was not known till after the 19th century.

When Jahangir was the reigning sovereign of India, the Elements of Euclid were translated into Sanskrit by Pandit Jagannath. He does not acknowledge that his work is a translation from a different language. But it appears from internal evidence that his rendering was from an Arabic version of Euclid's Elements. In the Preface, it is stated that, "in order to please his sovereign, Dvija Samart Jagannath undertook to compose a work on the science of Lines. One who studies this wonderful science, will acquire a knowledge of the properties of angles and figures. This science was dictated by Brahma to Bisvakarma (the Indian Vulcan). Thus, by tradition, it had come down to the nether world. In these later times, this science, through neglect and disuse, has ceased to exist. With the permission of Raja Jaya Sinha, I republish it to the world for the entertainment of the Mathematicians."

The Elements of Euclid, or as much of that work as is contained in Hutton's course of Mathematics, was again translated into Sanskrit, by Professor Yogadhyan of the Calcutta Government Sanskrit College, in the year 1839.

Under the patronage of the Government of Bengal, the first six Books of Euclid were translated into Bengh from the text of Playfair, in the year 1849, by the Rev K. M. Banerjea.

Another edition, consisting only of the first three Books, was published in 1860 under the superintendence of Babu Bhudev Mukhopadhyay, then Head Master of the Hugli Normal School, who adopted with a few verbal changes, Rev Mr Banerjea's Bengali text, and added a few notes and exercises, chiefly selected from Mr Pott's Edition of the Elements.

About four years ago, Babu Kali Kumar Das of Dacca, published a Bengali version of the fourth, the sixth, and portions of the eleventh and twelfth Books of Euclid, together with the Algebraical demonstrations of the propositions in the fifth Book.

In the year 1868, Babu Harish Chandra Chakravarti of Nuddea reprinted the first Book of Bhudev's Euclid, with the addition of a few notes from Dr Lardner's edition of the Elements.

There is another little work on Geometry, which, though not a translation of Euclid, should not here be passed unnoticed. The treatise referred to displays considerable ingenuity. It was written by the late Ram Kamal Bhattacharya of the Calcutta Normal School, and published with an English Translation, after his death.

In all the Editions of Euclid, noticed above, the Translators, Editors, and Compilers have chosen to use in the demonstrations, sometimes the language of Algebra and sometimes that of pure Geometry; and not seldom what may be termed a mixture of both.

This is, perhaps, not the fittest place to enter into

a lengthened discussion on the vexed question, whether "the use of Algebraical signs and symbols should be the proper medium of communicating the truths of pure Geometry. On the one side, it is affirmed that "Symbolical demonstrations are shorter and save time," that it is but pedantry to adhere in this age to the phraseology of the ancient Geometer which is characterized by prolixity and in which "the formalities and paraphernalia of rigor are so ostentatiously put forward as almost to hide the reality. " On the other side, it is urged that "attempts at abbreviations have caused endless confusion," that "the use of symbols may be looked upon as repugnant to the rigor and strictness of Geometry," that the ideas annexed to symbols make them unfit for use in this science and that the highest authorities on these matters have condemned the use of Algebraical language in Geometry, Sir Isaac Newton observes that "Equations are expressions of Arithmetical computation, and properly have no place in Geometry, except so far as quantities truly Geometrical (that is lines, surfaces &c.) may be said to be some equal to others. Multiplications, Divisions and such sort of computations, are newly received into Geometry, and that unwarily, and contrary to the first design of the Science. For whosoever considers the construction of Problems by a right line and a circle found out by the first Geometricians, will easily perceive that Geometry was invented that we might expeditiously avoid, by drawing lines, the tediousness of

computation. Therefore these two sciences ought not to be confounded. The ancients did so industriously distinguish them from one another that they never introduced Arithmetical terms into Geometry: and the moderns by confounding both, have lost the simplicity in which all the elegance of Geometry consists." Professor De Morgan remarks that "those who introduce Algebraical symbols into Elementary Geometry, destroy the peculiar character of the latter to every student, who has any mechanical associations connected with those symbols, that is, to every student who has previously used them in ordinary Algebra. Geometrical reasoning and arithmetical process have each its own office: to mix the two in elementary instruction is injurious to the proper acquisition of both."

It must however be regarded as an undisputed fact that the moderns have very much gained in power by the application of Algebra to Geometry, and have arrived at results, which it would have been difficult to obtain, by the application of the method of the ancients. Notwithstanding, it is unquestionable, that the use of Algebraical signs and symbols, may lead beginners to misconceptions and errors, which it would be well to guard against. It is probably owing to these reasons that a symbolical Edition of the Elements, or a symbolical demonstration of the Propositions of Euclid, in the answer papers of the Graduates or Undergraduates, is not at present tolerated in the University of Cambridge.

In this Edition of Euclid, so far as the text is concerned, the use of signs and symbols has been scrupulously avoided. In the notes and exercises, however, no such restriction has been made. At the suggestion of Mr H. Woodrow, *late fellow of Caius College, Cambridge*, Algebraical proofs of the Propositions in the 2nd and 5th Books have been given, in addition to Euclid's Demonstrations.

On account of there being no capital letters in Bengali, considerable difficulty arises in printing mathematical works, and specially a treatise on Geometry. The letters referring to figures may be mistaken for words, and an inflexion added to letters may be taken for an additional letter. It has been observed by the Rev. K. M. Banerjea, the first Translator of Euclid into Bengali, that "The genitive case of nouns is, for instance, formed by the addition of a servile letter (র) to the word inflected; as from rekha (a line)—gen rekhar (of a line) * * * If the servile letter (র) indicative of the genitive were added, the student might be in danger of mistaking the inflecting *servile* for a *radical*; thus কথর might be mistaken for a set of *three* letters instead of the genitive of কথ."

In this Edition of Euclid, the difficulty noticed above, has been obviated by the use of types of larger size, when lines, angles and figures have been referred to, and the inflecting *serviles* have been printed with types of ordinary size, as কথএর or ঘণ্টর।

Another peculiarity will be observed in this work.

The demonstration of each of the Propositions has been so printed as clearly to shew to the student the successive steps of the reasoning. This method was first of all recommended by Professor De Morgan, and it has since been adopted by Messrs Pott, Todhunter and others.

At the end of each Book will be found copious explanatory notes, and a large number of exercises most of which are selections. Besides, for the purpose of illustration, after each Proposition, at least one Exercise has been given which can be deduced from the Proposition or demonstrated in the same manner as the Proposition itself. These will answer the purpose of *riders* in the Examination Papers; and the fact of their being placed after each of the Propositions will, it is hoped, be a sufficient hint for their solution.

Before closing this preface, the author begs to acknowledge with thanks the material assistance received in the preparation of this work from Pandit Kali Prasanna Vidyaratna, the teacher of Sanskrit and Bengali in the Hugli Normal School.

It only remains to be mentioned that any suggestions or corrections from teachers or students, will be received with cordial thanks.

BRAHMA MOHAN MALLIK.

HUGLI NORMAL SCHOOL,

March, 1871.



পূর্বভাষ।

বঙ্গ ভাষায় সুবিখ্যাত ইউক্লিড প্রণীত জ্যামিতি শাস্ত্রের এই অভিনব অনুবাদ, বিদ্যার্থী ও সাধারণ জন গণের হস্তে সমর্পিত হইল। এই অনুবাদের অভিপ্রায় কি, তাহা ব্যক্ত করিবার বিশেষ আবশ্যকতা দৃষ্ট হইতেছে না; তবে এই মাত্র বলা যাইতে পারে যে, আজি পর্য্যন্ত কেহই ইউক্লিডের গ্রন্থের বিদ্যালয়ের ব্যবহারোপযোগী অংশ সকল অনুবাদ করিয়া প্রকাশ করেন নাই; আর যাহারা ইউক্লিডের গ্রন্থের ভিন্ন ভিন্ন অংশ বঙ্গ ভাষায় অনুবাদ করিয়াছেন, তাঁহারা সকলেই প্লেফেয়ার নামক ইংলণ্ডীয় গণিতবেত্তার অনুসরণ করিয়াছেন। কিন্তু ইউক্লিডের মূল গ্রন্থের সহিত প্লেফেয়ারের ইংরাজী অনুবাদিত জ্যামিতির অনেক স্থলে বৈলক্ষণ্য দৃষ্ট হইয়া থাকে।*

এই গ্রন্থ খানি, সিম্‌সন প্রণীত ইউক্লিডের জ্যামিতি অবলম্বন করিয়া লিখিত হইয়াছে। ইউক্লিডের মূল গ্রন্থের সহিত সিম্‌সন রূত অনুবাদের সম্পূর্ণ ঐক্য আছে, ইহা সর্বত্র প্রসিদ্ধ।

* প্লেফেয়ার সাহেব এডিন্‌বর্গ বিশ্ববিদ্যালয়ে গণিত শাস্ত্রের অধ্যাপক ছিলেন। এক্ষণে ঐ বিশ্ববিদ্যালয়েও তাঁহার অনুবাদিত জ্যামিতির অধ্যাপনা হয় না।

পূর্ব কালে হিন্দুদিগের মধ্যে জ্যামিতি শাস্ত্র অপরিজ্ঞাত ছিল না। ক্ষেত্র ব্যবহার, সমকোণী ত্রিভুজ সংক্রান্ত যাবতীয় নিয়ম, তিন বাহুর পরিমাণ দ্বারা ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল স্থির করিবার উপায়, বৃত্তের বাস ও পরিধির সম্বন্ধ প্রভৃতির লক্ষণ ব্রহ্ম গুপ্ত ও ভাস্করাচার্যের গ্রন্থে লিখিত আছে।

যখন সত্ৰাট জাহাঙ্গীর ভারতবর্ষের রাজসিংহাসনে অধিষ্ঠিত ছিলেন, সেই সময় শ্রীমান্ জগন্নাথ পণ্ডিত সংস্কৃত ভাষায় ইউক্লিডের জ্যামিতি অনুবাদ করেন। তাঁহার প্রণীত রেখাগণিত যে গ্রন্থান্তর হইতে অনুবাদিত, ইহা তিনি স্বীকার করেন না; কিন্তু তাঁহার পুস্তক পাঠ করিলে সহজেই বোধ হইবে যে, তাহা আরব্য ভাষায় লিখিত ইউক্লিডের গ্রন্থের অনুবাদ। তিনি গ্রন্থের উপক্রমণিকায় লিখিয়াছেন যে, “রাজা জয় সিংহের সন্তোষের জন্য দ্বিজ সত্ৰাট জগন্নাথ পণ্ডিত রেখাগণিত রচনা করিলেন; এই অপূর্ব শাস্ত্র পাঠে কোণ সকলের বোধ এবং ক্ষেত্র ও গণিতে সম্যক্ বুৎপত্তি জন্মে। ব্রহ্মা বিশ্বকর্ম্মাকে এই শাস্ত্র বলেন; এইরূপ পারম্পর্য্য বশত ইহা ধরনী তলে আসিয়া উপস্থিত হয়। তাহা কাল ক্রমে উচ্ছেদ দশা প্রাপ্ত হইলে, আমি রাজা জয় সিংহের আজ্ঞায় গণিতবেত্তাদিগের সন্তোষের নিমিত্ত পুনর্বার ইহা সম্যক্ৰূপে প্রকাশিত করিলাম।”

ইটন সাহেব স্বপ্রণীত গণিত শাস্ত্রে, ইউক্লিডের জ্যামিতির যেরূপ সংস্কার করিয়াছেন, তাহা অবলম্বন করিয়া

কলিকাতার গবর্ণমেন্ট সংস্কৃত কলেজের জ্যোতিঃশাস্ত্রেঃ
অধ্যাপক শ্রীমান যোগদ্যান মিশ্র ১৮৩৯ খৃঃ অঙ্গে জ্যামিতি
শাস্ত্র পুনর্কার সংস্কৃতে অনুবাদ করেন।

বাঙ্গালা গবর্ণমেন্টের প্রোৎসাহে শ্রীযুক্ত রেবরেন্ড
রুঞ্চমোহন বন্দ্যোপাধ্যায় ১৮৪৬ খৃঃ অঙ্গে প্লেফেরার
লিখিত ইউক্লিডের গ্রন্থের প্রথম ছয় অধ্যায় বাঙ্গালা
ভাষায় অনুবাদ করিয়া সর্কাগ্র প্রকাশ করেন।

১৮৬০ খৃঃ অঙ্গে লুগলি নর্মাল বিদ্যালয়ের পূর্বতন
প্রধান শিক্ষক শ্রীযুক্ত বাবু ভূদেব মুখোপাধ্যায়, বন্দ্যো-
পাধ্যায় মহাশয়ের গ্রন্থকে মূল স্বরূপ গ্রহণ ও স্থান
বিশেষে দুই একটী শব্দ পরিবর্ত্ত করিয়া, পট সাহে-
বের কৃত জ্যামিতি হইতে কতকগুলি টীকা ও অনুশীলনার্থ
প্রতিজ্ঞা সন্নিবেশ পূর্বক ইউক্লিডের প্রথম তিন অধ্যায়
বঙ্গভাষায় প্রণয়ন করেন।

প্রায় চারি বৎসর অতীত হইল, ঢাকা নর্মাল বিদ্যা-
লয়ের ছাত্র শ্রীযুক্ত বাবু কালীকুমার দাস ইউক্লিডের
৪র্থ, ৬ষ্ঠ, এবং ১১শ ও ১২শ অধ্যায়ের কিয়দংশ আর
৫ম অধ্যায়ের বৈজিক উপপত্তিগুলি বাঙ্গালায় অনুবাদ
করিয়া প্রচার করিয়াছেন।

১৮৬৮ খৃঃ অঙ্গে নবদ্বীপ নিবাসী শ্রীযুক্ত বাবু হরিশ্চন্দ্র
চক্রবর্তী লার্ডনার কৃত ইংরাজি জ্যামিতির টীকার কিয়-
দংশ অনুবাদ করিয়া শ্রীভূদেব মুখোপাধ্যায় প্রণীত
ইউক্লিডের ১ম অধ্যায় পুনর্মুদ্রিত করেন।

এ স্থলে আর একবার জ্যামিতি গ্রন্থের নাম উল্লেখ

না করিয়া থাকিতে পারা যায় না । ঐ পুস্তক খানি ইউক্লিডের প্রণালী অবলম্বন পূর্বক লিখিত হয় নাই বটে, তথাপি ইহা গ্রন্থকারের বুদ্ধি চাতুর্য্যের সম্যক্ পরিচয় প্রদান করিতেছে । কলিকাতা নর্ম্মাল বিদ্যালয়ের ভূতপূর্ব্ব প্রধান শিক্ষক মৃত রামকমল ভট্টাচার্য্য ইহার প্রণেতা ।
 হার মৃত্যুর পর ঐ পুস্তক ইংরাজি অনুবাদ সহ মুদ্রিত ও প্রচারিত হইয়াছে ।

ইউক্লিড প্রণীত জ্যামিতির যে সকল বাঙ্গালা অনুবাদ ও সংস্করণ উল্লিখিত হইল, তৎসমুদায়েই প্রতিজ্ঞাগুলির উপপত্তি কালে কখন বৈজিক, কখন বা জ্যামিতিক ভাষা ব্যবহার করা হইয়াছে, আবার স্থান বিশেষে এই উভয় ভাষার যোগোৎপন্ন মিশ্র ভাষাও ব্যবহৃত হইয়াছে ।

জ্যামিতির সাধ্য বিষয় গুলি বৈজিক ভাষা ও বৈজিক চিহ্ন প্রয়োগ দ্বারা উপপন্ন করা বিধেয় কি না, তাহা পুঙ্খানুপুঙ্খ বিচার করিবার এ উপযুক্ত স্থল নহে ; কিন্তু এই বিষয়ের ভিন্ন ভিন্ন মতাবলম্বীদিগের মধ্যে কেহ কেহ বলেন যে, সাধ্য বিষয় গুলি সাংকেতিক উপপত্তি দ্বারা সংক্ষেপে সিদ্ধ হয়, তাহাতে সময় রুথা নষ্ট হয় না ; এবং বর্ত্তমান কালে পূর্ব্বতন জ্যামিতিবেত্তাদিগের ন্যায় বহু বাক্য ব্যয় করা কেবল পাণ্ডিত্যাভিমানের কার্য্যমাত্র আর এই রূপ করিলে, অভেদ্য তর্ক পংক্তিগুলি এরূপ আড়ম্বরে গ্রথিত হইবে যে, প্রমাণের সার কথা সহজে উপলব্ধ হইবে না । অপর কেহ কেহ সিদ্ধান্ত করিয়াছেন যে, সংক্ষেপে উপপত্তির

চেষ্টা অশেষ অনর্থের মূল এবং বৈজ্ঞিক ভাষা ও চিহ্ন দ্বারা কোন প্রতিজ্ঞা উপপন্ন করা জ্যামিতিক উপপত্তির দৃঢ় সম্বন্ধ রীতির বিরুদ্ধ কার্য্য; আর বৈজ্ঞিক চিহ্ন গুলি দ্বারা মনে যে প্রকার ভাবের উদয় হয়, তাহাতে সহজেই বোধ হইবে যে, ঐ সকল চিহ্ন জ্যামিতি শাস্ত্রের উপযোগী হইতে পারে না ।

জগদ্বিখ্যাত গণিতবেত্তারা জ্যামিতিতে বৈজ্ঞিক ভাষা প্রয়োগ করা যুক্তি বিরুদ্ধ বলিয়া স্থির করিয়াছেন । সর আইসাক নিউটন বলেন যে, “সমীকরণ গুলি পাটীক গণনার সমানত্ব দর্শাইবার জন্যই ব্যবহৃত হইতে পারে; রেখা, সমতল প্রভৃতি প্রকৃত জ্যামিতিক রাশির মধ্যে, একটি আর একটির সর্বসত্তোভাবে সমান, ইহা ব্যক্ত করা বাতীত আর কোন বিষয়ে সমীকরণ গুলি জ্যামিতি শাস্ত্রের উপযোগী বলা যায় না । অধুনা অনবধানতা দশত গুণ, ভাগ প্রভৃতি পাটীক প্রক্রিয়া সকল জ্যামিতিতে ব্যবহৃত হইতেছে । এইরূপ রীতি এই শাস্ত্রের আদিম প্রণালীর বিরুদ্ধ । প্রাচীন জ্যামিতিবেত্তারা সরল রেখা ও বৃত্ত প্রভৃতি দ্বারা প্রতিজ্ঞা গুলির যেরূপ অঙ্কন করিয়াছেন, তাহা ভাবিলেই বোধ হইবে যে, তাঁহারা গণনার পরিশ্রম ও ক্লেশ হইতে অব্যাহতি পাইবার জন্য এই শাস্ত্র রচনা করিয়াছেন । এই হেতু পাটীগণিত ও জ্যামিতি, এই দুই শাস্ত্র মিশ্রিত করা উচিত নহে । প্রাচীন পণ্ডিতেরা এরূপ সাবধানতা সহকারে এই দুই শাস্ত্র পৃথক্ ভাবে লিখিয়াছেন যে, জ্যামি-

তিতে কখনই পাটক ভাষা ব্যবহার করেন নাই। আধুনিক :
পণ্ডিতেরা এই দুই শাস্ত্র মিশ্রিত করাতে জ্যামিতি জটিল
হইয়া উঠিয়াছে ও ইহার অকৃত্রিম সৌন্দর্য্য বিনষ্ট হইয়া
গিয়াছে।” সুবিখ্যাত অধ্যাপক ডি মরগান সাহেব বলেন
যে, “যে সকল বিদ্যার্থীর অন্তঃকরণে বৈজ্ঞিক চিন্তা প্রভৃতির
বিশেষ বিশেষ ভাব সংশ্লিষ্ট হইয়া আছে, অর্থাৎ যাহারা
বীজগণিতে ঐ সকল চিন্তার ব্যবহার করিয়া তাহাদের
তাৎপর্য্য গ্রহণ করিয়াছেন, সেই সব সাংকেতিক
চিন্তা জ্যামিতিতে প্রয়োগ করিলে কখনই তাহাদিগের
মনে জ্যামিতির প্রকৃত ভাব উদ্ভিত হয় না। জ্যামিতিক
উপপত্তি ও পাটক প্রক্রিয়া সকল নিজ নিজ কার্যের
উপযোগী ; শিক্ষার আরম্ভ কালে এই দুইটা মিশ্রিত
নহিলে, এই দুই শাস্ত্রেরই সমান জ্ঞান লাভ হওয়া
সুকঠিন হইয়া উঠে।”

এই সকল দৃষ্টান্তের স্মরণে নতুন হইবে যে,
মুনাভন পণ্ডিতেরা জ্যামিতিতে বৈজ্ঞিক প্রণালী
অবলম্বন করিয়া যে সকল ফল লাভ করিয়াছেন, পূর্বতন
পণ্ডিতদিগের রীতানুসারে বিশুদ্ধ জ্যামিতিক উপপত্তি
অবলম্বন করিলে সেই সকল ফল প্রাপ্ত হওয়া সুকঠিন
হইত। কিন্তু প্রথমাবধি জ্যামিতিতে বৈজ্ঞিক চিন্তা ও সমস্ত
তাহা ব্যবহার করিলে, যে সকল ভ্রম সাবধানে অতিক্রম
করিতে হয়, সেগুলি নতি বিদ্যার্গিগণক সেই সকল ভ্রমেই
ডুবিতে হইবে, তাহান আর প্রযুক্ত সন্দেহ নাই।
৩, এই সকল কারণেই অধ্যাপনা কালে সাংকেতিক

উপপত্তি বিশিষ্ট জ্যামিতির কোন পুস্তক কিম্বা পরীক্ষা কালে ইউক্লিডের প্রতিজ্ঞাগুলির সাক্ষেতিক প্রমাণ, কেম্ব্রিজ বিশ্ব বিদ্যালয়ে পরিগৃহীত হয় না ।

এই গ্রন্থে ইউক্লিডের মূল প্রতিজ্ঞা গুলিতে বৈজিক চিহ্ন ও সংকেত প্রভৃতির ব্যবহার একবারে পরিত্যাগ করা গিয়াছে ; কিন্তু ব্যাখ্যা ও অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা লিখবার সময়, স্থল বিশেষে, বৈজিক চিহ্নাদি ব্যবহৃত হইয়াছে । কেম্ব্রিজ বিশ্ববিদ্যালয়ের অন্তর্গত কিম্ব কালেজের পূর্বতন সদস্য এম্, এ উপাধিধারী উড়ো সাহেব মহোদয়ের পরামর্শানুসারে দ্বিতীয় ও পঞ্চম অধ্যায়ের মূল প্রতিজ্ঞাগুলির বৈজিক উপপত্তিও লিখিত হইয়াছে ।

বাঙ্গালাতে এক পরিমাণের ভিন্ন ভিন্ন প্রকার ব্রহ্ম ও ক্ষুদ্র অক্ষর না থাকাতে, গণিত শাস্ত্রের গ্রন্থাদি সূচক রূপে মুদ্রিত হইতে পারে না ; বিশেষত জ্যামিতির কোন পুস্তক মুদ্রিত করা অধিকতর কঠিন হইয়া উঠে । চিত্র বুঝাইবার জন্য যে সকল অক্ষর ব্যবহৃত হয়, সেই গুলি একত্র থাকিলে শব্দ বলিয়া ভ্রম জন্মিতে পারে ; আবার স্থান বিশেষে কোন অক্ষরের শেষে বিভক্তি যোগ করিলে, সেই বিভক্তি সূচক অক্ষর, বিভক্তি বলিয়া বোধ না হইয়া স্বতন্ত্র অক্ষর বলিয়া বোধ হইতে পারে । ইউক্লিড প্রণীত জ্যামিতির প্রথম অনুবাদক রেবেরণ্ড রুথ মোহন বন্দোপাধ্যায় লিখিয়াছেন যে, বঙ্গভাষায় “বি- শেষ্য পদের সম্বন্ধ কারকের বিভক্তি ‘র’ অক্ষর পদের সহিত যুক্ত হইয়া যায় যথা—রেখা শব্দ সম্বন্ধ কারকে

(রেখার) এইরূপ হয় * * * সম্বন্ধ বোধক ‘র’ অক্ষর প্রাতিপদিকের সহিত যুক্ত হইলে, ইহা প্রাতিপদিকের একটি অক্ষর বলিয়া বিদ্যার্থীগণের ভ্রম হইবার সম্ভাবনা ; যথা—‘কথর’কে কথএর সম্বন্ধ স্বরূপ জ্ঞান না করিয়া তাহার। প্রাতিপদিকের তিনটি অক্ষর বলিয়া বোধ করিতে পারে ।”

ইউক্লিডের জ্যামিতির এই সংস্করণ পাঠ করিবার সময় পাছে ঐরূপ ভ্রম হয়, এই আশঙ্কায়, স্পষ্টরূপে রেখা, কোণ, ক্ষেত্র প্রভৃতির বোধ হইবার জন্য অপেক্ষাকৃত বৃহৎ অক্ষর ব্যবহৃত হইয়াছে এবং অক্ষর গুলিতে যে যে বিভক্তি সংযুক্ত হইয়াছে, তাহা ক্ষুদ্রাক্ষরে মুদ্রিত হইয়াছে ; যথা কথএর বা ঘণ্ডর ইত্যাদি ।

এই পুস্তকে প্রতিজ্ঞা গুলি লিখিবার আর একটি প্রকৃষ্ট পদ্ধতি অবলম্বন করা গিয়াছে;—প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার উপপত্তি এরূপে মুদ্রিত হইয়াছে যে, তদ্বারা উপপত্তির পৃথক পৃথক অংশ বিদ্যার্থীদিগের অনায়াসে প্রতীয়মান হইবে । অধ্যাপক ডি মর্গান সাহেব সর্ব প্রথমে জ্যামিতি লিখিবার এইটি উৎকৃষ্ট পদ্ধতি বলিয়া ব্যক্ত করেন ; পরে পট, টেবুলের প্রভৃতি পণ্ডিতগণ এই পদ্ধতি অবলম্বন করিয়া তাঁহাদের প্রণীত জ্যামিতি মুদ্রিত করিয়াছেন ।

প্রত্যেক অধ্যায়ের শেষে প্রতিজ্ঞা গুলির ব্যাখ্যা ও অনুশীলনার্থ বহু সংখ্যক প্রতিজ্ঞা সন্নিবেশিত হইয়াছে । আবার প্রত্যেক মূল প্রতিজ্ঞার পরে অনুশীলনের নিমিত্ত অন্তত একটি করিয়া প্রতিজ্ঞা লিখিত হইয়াছে । এই অনু-

শীলনার্থ প্রতিজ্ঞা, মূল প্রতিজ্ঞা দ্বারা সাধ্য অথবা তাহার
ন্যায় উপপাত্তও না হয়, তদর্থ বোধক হইবে। পরীক্ষার
কোন প্রশ্ন ও উপপ্রশ্নের পরস্পর যেরূপ সম্বন্ধ থাকে,
প্রতিজ্ঞা ও তাহার অব্যবহিত পরবর্ত্তী অনুশীলনার্থ
প্রতিজ্ঞারও সেইরূপ সম্বন্ধ জ্ঞান করিতে হইবে।

এই গ্রন্থখানি লিখিবার সময় হুগলি নর্ম্মাল বিদ্যা-
লয়ের সংস্কৃত ও বাঙ্গালা ভাষার অধ্যাপক শ্রীযুক্ত
কালীপ্রসন্ন বিদ্যারত্ন যথেষ্ট সাহায্য প্রদান করিয়া গ্রন্থ
কারের আন্তরিক রুতজ্ঞতা ভাজন হইয়াছেন; এ নিমিত্ত
বিদ্যারত্ন মহাশয়ের নাম এই গ্রন্থে চির সংযোজিত
থাকে, ইহা গ্রন্থ প্রণেতার একান্ত বাসনা।

পরিশেষে বলিয়া এই যে, কোন শিক্ষক বা বিদ্যার্থী
এই পুস্তকের ভ্রম সংশোধন বা মৌষ্ঠবের নিমিত্ত যাহা
কিছু বলিবেন, তাহা আদর পূর্ব্বক গৃহীত হইবে।

শ্রীতক্ষনোদন মল্লিক

হুগলি নর্ম্মাল বিদ্যালয়.

চৈত্র, ১২৭৭।

উপক্রমণিকা ।

জ্যামিতি শাস্ত্রে ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ, বৃত্ত প্রভৃতি ক্ষেত্র সকলের বিশেষ বিশেষ ধর্ম এবং ঐ সকল ক্ষেত্রের পরিমাণ বিষয়ে পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণীত হইয়াছে। ইউক্লিড. স্বপ্রণীত জ্যামিতি শাস্ত্রকে ক্ষেত্র ও বিষয় ভেদে ভিন্ন ভিন্ন অধ্যায়ে বিভক্ত করিয়াছেন। প্রত্যেক অধ্যায়ে কতক গুলি করিয়া প্রতিজ্ঞা সন্নিবেশিত আছে। “সাধ্য নির্দেশঃ প্রতিজ্ঞা।” গোতম সূত্র ; অর্থাৎ সাধনীয় বস্তুর নির্দেশের নাম প্রতিজ্ঞা, অথবা প্রমাণ সাপেক্ষ কোন প্রস্তাবিত বিষয়ের নাম প্রতিজ্ঞা। জ্যামিতির প্রতিজ্ঞা গুলি দুই প্রকার ;—সম্পাদ্য ও উপপাদ্য। যে প্রতিজ্ঞাতে কোন ক্রিয়া সম্পন্ন করিতে, অর্থাৎ জ্যামিতিক কোন রেখা টানিতে বা ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হয়, তাহাকে সম্পাদ্য বলে, আর যাহাতে কোন বিষয়ের সিন্ধতা দর্শাইতে, অর্থাৎ জ্যামিতিক কোন ক্ষেত্রের কোন বিশেষ ধর্ম প্রমাণ করিতে হয়, তাহাকে উপপাদ্য বলে।

ইউক্লিডের প্রায় সকল প্রতিজ্ঞাই চারি প্রধান অংশে বিভক্ত; যথা—(১) সাধারণ সূত্র (২) বিবরণ সূত্র (৩) অঙ্কন ও (৪) প্রমাণ বা উপপত্তি। কেহ কেহ এতদ্ব্যতীত অবধারণ ও উপসংহার এই দুইটি অংশও নির্দেশ করেন।

“সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দ্বয় পরস্পর সমান ইত্যাদি,” এইটি প্রথম অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞার সাধারণ সূত্র। সাধারণ সূত্রের ব্যাখ্যা স্বরূপ কথগ একটি ত্রিভুজ লইয়া সূত্রটি পুনরায় লিখিত হইয়াছে; এজন্য ইহাকে বিবরণ সূত্র বলে। অনন্তর প্রতিজ্ঞার প্রমাণের জন্য সরল রেখা প্রভৃতি অঙ্কিত করিতে হইয়াছে; এই ক্রিয়ার নাম অঙ্কন। পরে প্রতিজ্ঞা সিদ্ধ করিবার জন্য যে বাদবিচার লিখিত হইয়াছে, তাহার নাম প্রমাণ বা উপপত্তি। প্রমাণের নিমিত্ত ক্ষেত্র অঙ্কিত হইলে তৎসম্বন্ধে সাধা বস্তুর যে উল্লেখ, তাহার নাম অবধারণ।

পঞ্চম প্রতিজ্ঞায় উল্লিখিত হইয়াছে যে, “কথগ কোণ কগখ কোণের সমান,” ইত্যাদি; এই অংশের নাম অবধারণ আর প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার শেষে সাধারণ সূত্রের পুনরুল্লেখের নাম উপসংহার। ইউক্লিডের প্রতিজ্ঞা গুলি পাঠ করিলে সহজেই বোঝ হইবে যে, অবধারণ, বিবরণ সূত্রের এক অঙ্গ মাত্র; আর উপসংহার, সাধারণ সূত্রের পুনরুল্লেখ মাত্র, এজন্য ইহার স্বতন্ত্র উল্লেখের আবশ্যকতা নাই।

কোন কোন প্রতিজ্ঞার উপপত্তির জন্য অঙ্কন আবশ্যক হয় না ; আবার কোন কোন স্থলে অঙ্কন ও প্রমাণ একত্রও লিখিত হইয়াছে । প্রত্যেক প্রতিজ্ঞার সাধারণ সূত্রের দুই অংশ থাকে ; যথা—সম্পাদ্য গুলির নির্দিষ্ট ও করণীয় অংশ এবং উপপাদ্য গুলির কল্পিত ও সাধ্য অংশ । প্রমাণ করিবার জন্য যথাক্রমে সন্নিবেশিত সমস্ত র্ক পংক্তির নাম উপপত্তি । উপপত্তি অন্বয় ও ব্যতিরেক মুখে, এই দুই প্রকারে সম্পন্ন হইয়া থাকে । অনুগুণ হেতু দ্বারা সাধ্য সাধনের নাম অন্বয়ী প্রমাণ এবং বিপরীত হেতু দ্বারা সাধনের নাম ব্যতিরেকী প্রমাণ, অর্থাৎ আনুপূর্ব্বিক বিচারদ্বারা সাক্ষাৎ সম্বন্ধে কল্পনা হইতে সাধ্য নিষ্পন্ন করার নাম অন্বয়ী এবং সাধ্য বস্তু ভিন্নরূপ হইলে অসম্ভব হইয়া উঠে ইহা প্রদর্শন পূর্ব্বক প্রতিজ্ঞা উপপন্ন করার নাম ব্যতিরেকী প্রমাণ ।

কোন সিদ্ধ বিষয় অবলম্বন করিয়া বিচার দ্বারা অন্য কোন বিষয় সিদ্ধ করার নাম প্রমাণ । ইউক্লিড জ্যামিতিতে যে সকল প্রতিজ্ঞার যথার্থ্য সিদ্ধ করিয়াছেন বা গ্রন্থের প্রারম্ভে যে সকল বিষয়ের সত্যতা সহজ জ্ঞানগম্য বলিয়া স্বীকার করিয়াছেন এবং কল্পিত অংশ বা অঙ্কন হইতে বাহা সত্য বলিয়া বোধ হয়, সেই গুলির সাহায্যে নূতন প্রতিজ্ঞা সকল প্রমাণ করা হইয়াছে ।

উপপত্তির যে যে অংশ, যে সকল সংজ্ঞা, স্বতঃসিদ্ধ কিম্বা প্রতিজ্ঞার সাহায্যে সিদ্ধ হইয়াছে, বিদ্যার্থীদিগের শিক্ষা সৌকর্য্যার্থে সেই সকল সংজ্ঞা প্রভৃতির সংখ্যা সেই

সেই অংশে লিখিত হইল ;—সখা, সং ১৫ ; স্বতঃ ২
 ইত্যাদি ; ইহাদের দ্বারা পঞ্চদশ সংজ্ঞা, দ্বিতীয় স্বতঃ
 সিদ্ধ ইত্যাদির প্রয়োগ বুঝিতে হইবে ; (১ম, ৫) এইরূপ
 লিখিত থাকিলে, প্রথম অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞার
 সাহায্যে সিদ্ধ, ইহাই বুঝিতে হইবে। পূরণ বাচক
 সংখ্যা দ্বারা অধ্যায় ও অপর সংখ্যা দ্বারা প্রতিজ্ঞা
 সূচিত হইয়াছে। কোন কোন স্থানে অঙ্কন ও
 কম্পনা এই শব্দ গুলির পরিবর্তে সংক্ষেপে অং ও কং
 এবং “সমান্তরিক” বা “সমান্তর টৈথিক ক্ষেত্র,” ইহার
 পরিবর্তে “সমান্তর ক্ষেত্র” লিখিত হইয়াছে। “কথ সংযুক্ত
 কর,” এরূপ বাক্য দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, সরল রেখা
 দ্বারা ক ও খ বিন্দু দ্বয় সংযুক্ত কর। “কথকে গ পর্য্যন্ত
 বর্দ্ধি কর,” ইহা দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, কথ সরল
 রেখাকে গ বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর।

ইউক্লিডের জ্যামিতি ।

১ম অধ্যায় ।

সংজ্ঞা ।

১। যাহার অংশ নাই অথবা পরিমাণ নাই, তাহার নাম বিন্দু । (১ম অধ্যায়ের পরিশিষ্ট দেখ ।)

২। বিস্তার বিহীন দৈর্ঘ্যের নাম রেখা ।* (পরিশিষ্ট দেখ ।)

৩। রেখার দুই প্রান্ত দুইটি বিন্দু ।

৪। যে রেখা প্রান্ত বিন্দু দুয়ের মধ্যে ঋজুভাবে অবস্থিত, তাহার নাম সরল বা ঋজু রেখা । (পরিশিষ্ট দেখ ।)

৫। যাহার কেবল দৈর্ঘ্য ও বিস্তার আছে, তাহার নাম তল বা পৃষ্ঠ ।

৬। তলের প্রান্ত বা সীমা গুলি এক একটা রেখা ।

৭। যে তলে কোন দুইটি বিন্দু কম্পনা করিলে তাহাদের যোজক সরল রেখা সর্বত্রই ঐ তলের সহিত মিলিত হয়, তাহার নাম সমতল বা সমপৃষ্ঠ ।

* যঃ পদার্থঃ দীর্ঘঃ বিস্তারহিতঃ বিভাগার্থঃ স রেখাশব্দ-
বাচ্যঃ । জগন্নাথকৃতং রেখাগণিতং ।

ইউক্লিডের জ্যামিতি

৮। কোন সমতলস্থ বিভিন্ন মুখীন দুই রেখা সংলগ্ন হইলে তাহাদের পরস্পরের অবনতিকে সামতলিক কোণ বলে।

৯। বিভিন্ন মুখীন দুই সরল রেখা সংলগ্ন হইলে তাহাদের পরস্পরের অবনতিকে সামতলিক সরল টেরখিক কোণ বলে।

টীকা। কতকগুলি কোণ যদি এক (খ) বিন্দুতে অবস্থিত হয়, তবে তাহাদের মধ্যে কোন একটি কোণ ভিন্ন ভিন্ন তিন অক্ষর দ্বারা ব্যক্ত হইয়া থাকে। এই অক্ষর গুলির মধ্যে যেটা কোণের শৃঙ্গ, অর্থাৎ যেখানে কোণগঠিত রেখা দুয় সংলগ্ন হইয়াছে, সেই খানে থাকে, সেইটা অন্য দুইএর মধ্যে লিখিত হয়, ও এই দুই অক্ষরের একটি এক রেখার ও অপরাপর অন্য রেখার যে কোন স্থানে অবস্থিত হয়; যথা, কখ ও গখএর অন্তর্গত কোণকে কখগ অথবা গখক কোণ বলা যায়; কখ ও ঘখএর অন্তর্গত কোণকে কখঘ বা ঘখক কোণ এবং



সখ ও গখএর অন্তর্গত কোণকে সখগ বা গখঘ কোণ বলা যায়; কিন্তু এক বিন্দুতে কেবল একটি কোণ থাকিলে সেই বিন্দু স্থিত অক্ষর দ্বারা উহা ব্যক্ত হইতে পারে; যথা, ও কোণ।

১০। এক সরল রেখা আর একটি সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দুয় পরস্পর সমান হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে — সম কোণ বলে; আর দণ্ডায়মান রেখাকে লম্ব বলে।

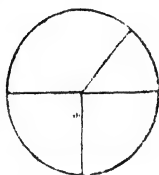
১১। সম কোণ অপেক্ষা বৃহৎ কোণকে স্থূল কোণ বলে ।

১২। সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্র কোণকে সূক্ষ্ম কোণ বলে ।

১৩। কোন ক্ষেত্রের প্রান্তকে সীমা বলে ।

১৪। এক বা ততোধিক সীমা দ্বারা পরিবদ্ধ স্থানের নাম ক্ষেত্র ।

১৫। যদি কোন সামতলিক ক্ষেত্র এক রেখা দ্বারা এরূপে সীমা বদ্ধ হয় যে, তাহার অভ্যন্তরীণ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে প্রান্ত পর্য্যন্ত যতগুলি সরল রেখা টান যায়, তাহার পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ ক্ষেত্রকে বৃত্ত বলে । বৃত্তের সীমাসূচক রেখার নাম পরিধি ।



১৬। ঐ অভ্যন্তরীণ নির্দিষ্ট বিন্দুর নাম কেন্দ্র ।

১৭। যে সরল রেখা কেন্দ্র ভেদ করিয়া দুই দিকে পরিধি পর্য্যন্ত বিস্তৃত হয়, তাহাকে ব্যাস বলে ।

১৮। একটা ব্যাসের ও তদ্বারা ছেদিত পরিধি খণ্ডের অন্তর্গত ক্ষেত্রের নাম অর্ধ বৃত্ত ।

১৯। একটা সরল রেখার ও তদ্বারা ছেদিত পরিধি খণ্ডের অন্তর্গত ক্ষেত্রের নাম বৃত্তখণ্ড ।

২০। কতকগুলি সরল রেখা দ্বারা পরিবদ্ধ স্থানের নাম সরল টেরিখিক ক্ষেত্র ।

ইউক্লিডের জ্যামিতি

২১। তিন সরল রেখা দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম ত্রিভুজ, ত্রাশ্র বা ত্রিকোণ।

২২। চারি সরল রেখা দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম চতুর্ভুজ, চতুরশ্র বা চতুষ্কোণ।

২৩। চারি অপেক্ষা অধিক রেখা দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম বহুভুজ।

ত্রিভুজ ক্ষেত্রগুলির মধ্যে,

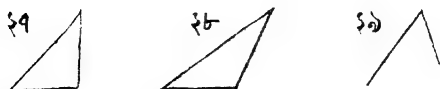
২৪। যাহার তিনটি বাহু পরস্পর সমান, তাহাকে সমবাহু ত্রিভুজ বলে।



২৫। যাহার কেবল দুইটি বাহু পরস্পর সমান, তাহাকে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ বলে।

২৬। যাহার তিনটি বাহু পরস্পর সমান নয়, তাহাকে বিষম বাহু ত্রিভুজ বলে।

২৭। যাহার একটি সম কোণ থাকে, তাহাকে সম কোণী ত্রিভুজ বলে।



২৮। যাহার একটি স্থূল কোণ থাকে, তাহাকে স্থূল কোণী ত্রিভুজ বলে।

স্বীকৃত বিষয় ।

স্বীকার করিতে হইবে যে,

১। কোন বিন্দু হইতে অন্য এক বিন্দু পর্য্যন্ত সরল রেখা টানা যায় ।

২। সীমা বিশিষ্ট কোন সরল রেখাকে ঋজুভাবে ত দূর ইচ্ছা বৃদ্ধি করা যায় ।

৩। কোন কেন্দ্র হইতে যথেষ্ট দূর পর্য্যন্ত এক বৃত্ত দৃষ্ট করা যায় ।

স্বতঃ সিদ্ধ ।

১। যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর সমান, তাহার পরস্পর সমান ।

২। সমান সমান রাশিতে সমান সমান রাশি যোগ করিলে, সমষ্টি গুলি পরস্পর সমান হইবে ।

৩। সমান সমান রাশি হইতে সমান সমান রাশি বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট গুলি পরস্পর সমান হইবে ।

৪। অসমান রাশি সকলে সমান সমান রাশি যোগ করিলে, সমষ্টি গুলি অসমান হইবে ।

৫। অসমান রাশি সকল হইতে সমান সমান রাশি বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট গুলি অসমান হইবে ।

৬। যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর দ্বিগুণ, তাহার পরস্পর সমান ।

৭। যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর অর্দ্ধ, তাহার পরস্পর সমান ।

৮। যে যে রাশি পরস্পর মিলিয়া যায়, অর্থাৎ তাহার ঠিক একই স্থান আবরণ করে, তাহার পরস্পর সমান ।

৯। একটি সম্পূর্ণ রাশি তাহার কোন অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর ।

১০। দুই সরল রেখা কোন স্থান পরিবদ্ধ করিতে পারে না ।

১১। সকল সম কোণ পরস্পর সমান ।

১২। কোন দুই সরল রেখার সহিত অন্য এক সরল রেখার সম্মাত হইলে, তাহার এক দিকের দুই অন্তরস্থ কোণ যদি একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্র হয় তবে যে দিকের দুইটা কোণ সমষ্টি, দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্র, সেই দিকে এই দুই রেখাকে উত্তরোত্তর বৃদ্ধি করিলে অবশেষে তাহার সমলগ্ন হইবে ।*

* এই স্বতঃসিদ্ধটি ইউক্লিডের মূল গ্রন্থানুসারে লিখিত হইল অন্যান্য বাঙ্গালা জ্যামিতিতে ইহার পরিবর্তে, প্লেফোনে লিখিত আর একটি স্বতঃসিদ্ধ সন্নিবেশিত হইয়াছে। (পাঃ শিফ্ট দেখা ।)

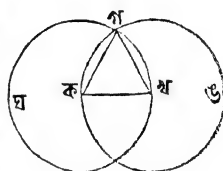
১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরল রেখার উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

কথ যেন নির্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরল রেখা ; কথএর উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

ক কেন্দ্র হইতে কথএর থ
প্রাপ্ত দিয়া থগঘ রত্ন অঙ্কিত
কর । [স্বীঃ ৩।

থ কেন্দ্র হইতে থকএর ক
প্রাপ্ত দিয়া কগঙ রত্ন অঙ্কিত
কর । [স্বীঃ ৩।



এই দুই রত্নের পরস্পর সম্পাতে উৎপন্ন গ বিন্দু হইতে
ক ও থ পর্যন্ত গক ও গথ সরল রেখা টান ; [স্বীঃ ১।
কথগ সম্পাদ্য সমবাহু ত্রিভুজ ।

ক বিন্দু থগঘ রত্নের কেন্দ্র হওয়াতে,
কগ রেখা কথএর সমান ; [সং ১৫।

এবং থ বিন্দু কগঙ রত্নের কেন্দ্র বলিয়া,
থগ রেখা থকএর সমান ; [সং ১৫।

আর গক রেখা যে কথএর সমান, তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে ;
অতএব গক ও গথ এই দুইএর প্রত্যেকেই কথএর সমান ।
আবার যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর সমান,
তাহারা পরস্পর সমান ; [স্বতঃ ১।

এই হেতু গক রেখা গথএর সমান ;

এই রত্ত যেন ঘাচকে ছ বিন্দুতে ছেদ করিল ।

য কেন্দ্র হইতে ঘাছ রেখার প্রান্ত দিয়া ছট্ট রত্ত অঙ্কিত কর ; [স্বীঃ ৩ ।

ছট্ট রত্ত ঘাঙকে যেন ঠ বিন্দুতে ছেদ করিল ।

কঠ সরল খগএর সমান হইবে ।

খ বিন্দু গাছজ রত্তের কেন্দ্র হওয়াতে,

খগ রেখা খাছএর সমান ; [সং ১৫ ।

এবং ঘ বিন্দু ছট্ট রত্তের কেন্দ্র হওয়াতে,

ঘঠ রেখা ঘাছ রেখার সমান ; [সং ১৫ ।

আর ইহাদের দুই অংশ ঘক ও ঘখ পরস্পর সমান হওয়াতে, [সং ২৪ ।

একের অবশিষ্ট কঠ, অন্যের অবশিষ্ট খাছএর সমান । [স্বতঃ ৩ ।

আবার প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, খগ রেখা খাছএর সমান ;

এই হেতু কঠ ও খগ উভয়েই খাছএর সমান ;

আর যে যে বস্তু কোন এক বস্তুর সমান, তাহারা পরস্পর সমান । [স্বতঃ ১ ।

সুতরাং কঠ রেখা খগএর সমান ।

অতএব নির্দিষ্ট ক বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট খগ রেখার সমান, কঠ রেখা টানা হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

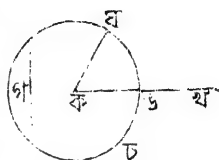
অঃ প্রঃ—২ । দুই নির্দিষ্ট অসমান সরল রেখার মধ্যে ক্ষুদ্র-তরের উপর এমন এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার সমান দুই বাহুর প্রত্যেকেই যেন নির্দিষ্ট বৃহত্তর রেখার সমান হয় ।

৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

দুই নির্দিষ্ট সরল রেখার মধ্যে বৃহত্তর হইতে ক্ষুদ্রতরের সমান এক অংশ ছেদ করিতে হইবে ।

কথ ও গ যেন দুই নির্দিষ্ট সরল রেখা ; তন্মধ্যে কথ বৃহত্তর ; কথ হইতে ক্ষুদ্রতর গএর সমান এক অংশ ছেদ করিতে হইবে ।

ক বিন্দু হইতে গএর সমান কথ সরল রেখা টান ; [১ম, ২।
এবং ক কেন্দ্র হইতে কথএর প্রান্ত দিয়া ঘঙচ বৃত্ত অঙ্কিত কর । [স্বঃ ৩।



কথ রেখার কঙ অংশ গএর সমান হইবে ।

ক বিন্দু ঘঙচ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে,
কঙ রেখা কথএর সমান ; [সং ১৫।

আর গ রেখা কথএর সমান । [অঙ্কন।

এই হেতু কঙ ও গ উভয়েই কথএর সমান ।

সুতরাং কঙ, গএর সমান । [স্বতঃ ১।

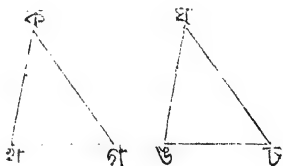
অতএব দুই নির্দিষ্ট রেখার মধ্যে বৃহত্তর কথ হইতে ক্ষুদ্রতর গএর সমান, কঙ অংশ ছেদিত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ পঃ—৩। দুই নির্দিষ্ট সরল রেখার মধ্যে ক্ষুদ্রতরকে বৃহত্তরের সমান করিয়া বর্দ্ধিত করিতে হইবে ।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং এই দুই দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ দ্বয়ও যদি পরস্পর সমান হয়, তবে ত্রিভুজ দ্বয়ের ভূমি অর্থাৎ অবশিষ্ট এক একটী বাহু পরস্পর সমান হইবে এবং ত্রিভুজ দুইটী পরস্পর সমান হইবে ও তাহাদের অবশিষ্ট কোণ গুলি, অর্থাৎ যে যে কোণ সমান সমান বাহুর সম্মুখীন, তাহারা যথাক্রমে পরস্পর সমান হইবে ।

কথগ ও ঘঙচ এই দুই ত্রিভুজের কথ ও কগ বাহু যথাক্রমে যেন ঘঙ ও ঘচ বাহুর সমান, অর্থাৎ কথ বাহু ঘঙের ও কগ বাহু ঘচের সমান এবং থকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান; তাহা হইলে থগ ভূমি ঙচ ভূমির এবং কথগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান হইবে, আর অবশিষ্ট কোণ গুলি, অর্থাৎ সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কথগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং কগথ কোণ ঘচঙ কোণের সমান হইবে ।



যদি কথগ ত্রিভুজকে ঘঙচ ত্রিভুজের উপর এক্রপে স্থাপন করা যায় যে, ক বিন্দু য বিন্দুর উপর ও কথ রেখা ঙঙ রেখার উপর পড়ে, তাহা হইলে, থ বিন্দু ঙ বিন্দুর

উপর অবশ্যই পড়িবে ; কেননা, কথ রেখা ঘণ্ডর সমান
কম্পিত হইয়াছে ;

আর কথ, ঘণ্ডর সহিত সৰ্ব্বতোভাবে মিলিত হইলে
কগ রেখাও ঘচএর সহিত মিলিয়া যাইবে ;

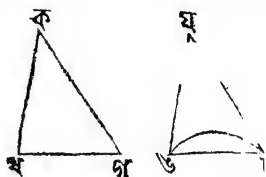
কেননা, থকগ কোণ ওঘচএর সমান ; [কম্পনা

আর কগ রেখা ঘচএর

সমান কম্পিত হওয়াতে,

গ বিন্দু চ বিন্দুর উপর

পড়িবে ;



এবং থ বিন্দু যে ঙ বিন্দুর সহিত মিলিত হইয়াছে, তাহ
প্রমাণ করা গিয়াছে ;

অতএব থগ ভূমি ওচ ভূমির সহিত সৰ্ব্বতোভাবে মিলিত
হইবে ;

কেননা, থ বিন্দু ঙর সহিত ও গ বিন্দু চএর সহিত মিলিত
হওয়াতে, যদি থগ রেখা ওচএর সহিত সৰ্ব্বতোভাবে
মিলিয়া না যায়, তাহা হইলে দুই সরল রেখা স্থান
পরিবদ্ধ করিবে ;

কিন্তু এরূপ পরিবদ্ধ করা অসম্ভব ।

[স্বতঃ ১০

সুতরাং থগ রেখা ওচএর সহিত মিলিয়া যাইবে ও তাহার
সমান হইবে ;

[স্বতঃ ৮ ।

এবং এক ত্রিভুজের অবশিষ্ট কোণ গুলি যথাক্রমে অন্য
ত্রিভুজের অবশিষ্ট কোণ গুলির সহিত মিলিয়া যাইবে ও
তাহাদের সমান হইবে, অর্থাৎ, কথগ কোণ ঘণ্ডচ কোণের
এবং কগথ কোণ ঘচঙ কোণের সমান হইবে ।

অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ-৪ । দুই সমচতুর্ভুজের মধ্যে যদি একটির এক বাহু অন্যের এক বাহুর সমান হয়, তবে সমচতুর্ভুজ দুইটি সর্বত্রোভাবে সমান হইবে ।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।-

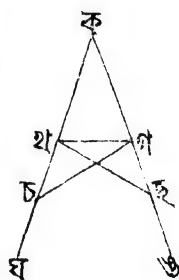
সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হইবে ; এবং যদি সমান দুইটি বাহু বৃদ্ধি করা যায়, তবে ভূমির অপর পার্শ্বস্থ কোণ দ্বয়ও পরস্পর সমান হইবে ।

কথগ যেন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ ; ইহার কথ বাহু কগ বাহুর সমান ; কথ ও কগকে ঘ ও ঙ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর ; তাহা হইলে কথগ কোণ কগখ কোণের এবং গথঘ কোণ খগঙ কোণের সমান হইবে ।

খঘ সরল রেখাতে চ বিন্দু কল্পনা কর, এবং রূহত্তর কঙ রেখা হইতে ক্ষুদ্রতর কচএর সমান কছ অংশ ছেদ কর, [১ম, ৩। এবং চগ, চখ সংযুক্ত কর ।

কচ রেখা কছএর সমান হও-
য়াতে, [অঙ্কন ।

এবং কথ, কগএর সমান বলিয়া, [কল্পনা ।
চক ও কগ এই দুই বাহু যথাক্রমে চক ও কথ দুই বাহুর



সমান ; এবং তাহাদের অন্তর্গত চক্ৰ কোণ, কথচ্চ ও কগচ্চ এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে সামান্য ভাবে থাকিতে, চগ ভূমি চ্চথ ভূমির সমান এবং কচগ ত্রিভুজ কচ্চথ ত্রিভুজের সমান এবং একের অবশিষ্ট কোণ গুলি অন্যের অবশিষ্ট কোণ গুলির সমান ; অর্থাৎ, সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কচগ কোণ কচ্চথ কোণের এবং কথচ্চ কোণ কগচ্চ কোণের সমান । [১ম, ৪।

পরে সমস্ত কচ সমস্ত কচ্চএর সমান বলিয়া,
এবং তাহাদের কথ ও কগ অংশ দ্বয় পরস্পর সমান হওয়াতে, [কম্পনা।
অবশিষ্ট খচ্চ অবশিষ্ট গচ্চএর সমান ; [স্বতঃ ৩।
আর চগ রেখা চ্চথএর সমান উপপন্ন হইয়াছে ;
এবং খচ্চগ কোণ গচ্চথ কোণের সমান সপ্রমাণ হইয়াছে ;
অতএব খচ্চগ ত্রিভুজ গচ্চথ ত্রিভুজের সমান এবং সমান সমান বাহুর সম্মুখীন অবশিষ্ট কোণ গুলি যথাক্রমে সমান, অর্থাৎ চখগ কোণ চ্চগথ কোণের এবং খগচ্চ কোণ গচ্চথ কোণের সমান ।

আবার, সমস্ত কথচ্চ কোণ সমস্ত কগচ্চ কোণের সমান উপপন্ন হইয়াছে বলিয়া, এবং ইহাদের গথচ্চ ও খগচ্চ অংশ দ্বয় পরস্পর সমান হওয়াতে,
অবশিষ্ট কথগ কোণ অবশিষ্ট কগথ কোণের সমান,
অর্থাৎ ভূমি সংলগ্ন কোণ দ্বয় পরস্পর সমান । [স্বতঃ ৩।

আর ভূমির অপর পাশ্বেস্থ চখগ ও চ্চগথ কোণ দ্বয় পরস্পর সমান সপ্রমাণ হইয়াছে ।

অতএব সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুমান। ইহা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, কোন ত্রিভুজ সমবাহু হইলে তাহা সমানকোণী হইয়া থাকে।

অঃ প্রঃ—৫। প্রথম প্রতিজ্ঞার চিত্রের কথ যোথাকে দুই দিকে ঘ ও ঙ পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর এবং গঘ ও গঙ সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে, ঘগঙ ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি কোন ত্রিভুজের দুই কোণ পরস্পর সমান হয়, তবে সমান সমান কোণের সম্মুখীন বাহু গুলিও পরস্পর সমান হইবে।

কথগ ত্রিভুজের কথগ কোণ যেন কগথ কোণের সমান; তাহা হইলে কগ বাহু কথ বাহুর সমান হইবে।

যদি কগ বাহু কথ বাহুর সমান হয়, তবে তদ্ব্যপেক্ষে একটা অপর অপেক্ষা রহিত হইবে। কথ যেন রহিত হইল; ইহা হইতে, কগএর সমান থগ অংশ ছেদ কর : [১ম, ৩। এবং ঘগ সংযুক্ত কর।



পরে, ঘথগ ও কগথ ত্রিভুজ দ্বয়ের ঘথ বাহু কগ বাহুর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

এবং থগ রেখা দুই ত্রিভুজের সাধারণ বাহু হওয়াতে, ঘথ ও থগ দুই বাহু ক্রমে কগ ও গথ দুই বাহুর সমান; আর ঘথগ কোণ কগথ কোণের সমান; [কম্পনা।

এই হেতু যগ ভূমি কথ ভূমির সমান, এবং যথগ ত্রিভুজ
কগথ ত্রিভুজের সমান, [১ম, ৪।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর রহত্তরের সমান ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ; [স্বতঃ ৯।

সুতরাং কথ, কগএর অসমান নহে, অর্থাৎ তাহার
পরস্পর সমান ।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

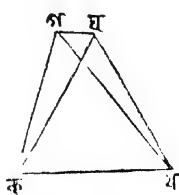
অনুমান । ইহা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, কোন
ত্রিভুজ সমান কোণী হইলে তাহা সমবাহু হইবে ।

অঃ প্রঃ—৬। পঞ্চম প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি খছ রেখা গচ
রেখাকে জ বিন্দুতে ছেদ করে ও কজ সংযুক্ত করা যায়, তবে
কজ রেখা ক কোনকে দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিবে ।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক ভূমির উপর এক দিকে এমন দুই ত্রিভুজ অব-
স্থিত হইতে পারে না, যাহাদের ভূমির এক প্রান্তে
সংলগ্ন এক এক বাহু পরস্পর সমান এবং অপর
প্রান্তে সংলগ্ন এক এক বাহুও পরস্পর সমান ।

যদি সম্ভব হয়, তবে কথ
ভূমির উপর এক দিকে কগথ
ও কঘথ দুই ত্রিভুজ এরূপে
অঙ্কিত কর, যেন কথ ভূমির ক
প্রান্তে সংলগ্ন গক ও ঘক বাহু
দুইটী, পরস্পর সমান হয় এবং থ প্রান্তে সংলগ্ন গথ



যথ বাহু দ্বয়ও পরস্পর সমান হয় ।

গয সংযুক্ত কর ।

প্রথমত, প্রত্যেক ত্রিভুজের শৃঙ্গ অন্যের বহিস্থ হইলে,
কগ বাহু কঘএর সমান হওয়াতে, [কম্পনা

কগয কোণ কঘগ কোণের সমান ; [১ম, ৫ ।

আর কগয কোণ খগয কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ; [স্বতঃ ৯ ।

অতএব কঘগ কোণও খগয কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

সুতরাং খঘগ কোণ, খগয কোণ হইতে আরও বৃহত্তর ।

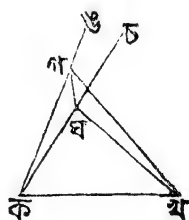
আবার খগ, খঘএর সমান হওয়াতে, [কম্পনা ।

খঘগ কোণ, খগয কোণের সমান ; [১ম, ৫ ।

কিন্তু ইহা যে বৃহত্তর, তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে ;

সুতরাং এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

অনন্তর, কযখ ত্রিভুজের
য শৃঙ্গ অন্য ত্রিভুজের অর্থাৎ
কগখএর অন্তর্কর্ত্তী হইলে, কগ
ও কয রেখা দ্বয়কে ঙ ও চ
পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর ।



পরে, কগয ত্রিভুজের কগ

বাহু কঘএর সমান বলিয়া, [কম্পনা ।

ভূমির অপর দিকের ঙগয কোণ চঘগ কোণের সমান ।

[১ম, ৫ ।

আর ঙগয কোণ খগয কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর, [স্বতঃ ৯ ।

এই হেতু চঘগ কোণও খগয কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

অতএব খঘগ কোণ, খগয কোণ হইতে আরও বৃহত্তর ।

আবার খণ্ড, খণ্ডের সমান হওয়াতে,

খণ্ডগ কোণ খণ্ডগ কোণের সমান ; [১ম, ৫ ।

কিন্তু ইহা যে বৃহত্তর, তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে ;

সুতরাং এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

পরিশেষে, একটা ত্রিভুজের শৃঙ্গ অন্যের কোন বাহুতে অবস্থিত হইলে প্রতিজ্ঞার উপপত্তি করিবার আবশ্যক নাই ।

অতএব এক ভূমির ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৭। এক ভূমির উপর ভিন্ন ভিন্ন দিকে যদি দুই ত্রিভুজ এরূপে অবস্থিত হয় যে, ভূমির এক প্রান্তে সংলগ্ন এক এক বাহু পরস্পর সমান এবং অপর প্রান্তে সংলগ্ন এক এক বাহুও পরস্পর সমান, তাহা হইলে এক ত্রিভুজের বাহু দ্বয়ের অন্তর্গত কোণ, অন্য ত্রিভুজের বাহু দ্বয়ের অন্তর্গত কোণের সমান হইবে ।

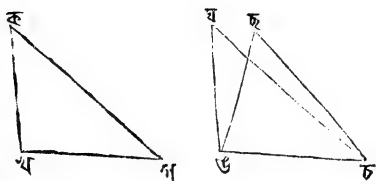
৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।—

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং তাহাদের ভূমিও পরস্পর সমান হয়, তবে এক ত্রিভুজের সমান দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ অন্য ত্রিভুজের সমান দুই বাহুর অন্তর্গত কোণের সমান হইবে ।

কখণ্ড ও ঘণ্ডচ ত্রিভুজের খক ও কগ বাহু দ্বয় যথাক্রমে ঘেন ও ঘ ও ঘচ বাহু দ্বয়ের সমান, অর্থাৎ খক বাহু ও ঘ বাহুর এবং কগ বাহু ঘচ বাহুর সমান আর খণ্ড ভূমি

উচ ভূমির সমান ; তাহা হইলে খকগ কোণ ওঘচ কোণের সমান হইবে।

যদি কথগ
ত্রিভুজ যঙচ
ত্রিভুজের উপর
এরূপে স্থাপন
করা যায় যে, খ



বিন্দু ও বিন্দুর উপর এবং খগ রেখা ওচ রেখার উপর
পাড়ে, তাহা হইলে গ বিন্দু চ বিন্দুর উপর পড়িবে ;
কেননা, খগ রেখা ওচএর সমান কল্পিত হইয়াছে।

আর খগ রেখা ওচএর সহিত সর্বতোভাবে মিলিয়া
গেল, খক ও কগ এই দুই রেখা ওঘ ও ঘচ রেখার সহিত
মিলিয়া যাইবে ; কেননা, যদি খগ ভূমি ওচএর সহিত
মিলিত হইলেও খক, ওঘএর সহিত এবং গক, চঘএর
সহিত মিলিত না হইয়া ওছ ও চছএর ন্যায় ভিন্ন রূপে
থাকে, তবে এক ভূমির উপর এক দিকে এমন দুই
ত্রিভুজ অবস্থিত হইল যাহাদের ভূমির এক প্রান্তে
সংলগ্ন এক এক বাহু পরস্পর সমান এবং অপর প্রান্তে
সংলগ্ন এক এক বাহুও পরস্পর সমান ; কিন্তু এরূপ
হওয়া অসম্ভব ;

[১ম, ৭।

এই হেতু খগ ভূমি ওচ ভূমির সহিত মিলিত হইলে,
খক ও কগ দুই বাহু ওঘ ও ঘচ দুই বাহুর সহিত অবশ্য
মিলিয়া যাইবে ;

সুতরাং খকগ কোণ ওঘচ কোণের সহিত মিলিয়া যাইবে

যক ও কচ এই দুই বাহু যথাক্রমে ঔক ও কচ এই দুই বাহুর সমান ;

আর ঘচ ভূমি ঔচ ভূমির সমান ; [সং, ২৪ ।

সুতরাং যকচ কোণ ঔকচ কোণের সমান । [১ম, ৮ ।

অতএব নির্দিষ্ট সরল ত্রৈখিক ত্রকণ কোণ কচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৯ । প্রতিপাদন কর যে, এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজকে সর্বতোভাবে সমান দুই সমকোণী ত্রিভুজে বিভক্ত করা যায় ।

১০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড, অর্থাৎ দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে ।

কথ যেন নির্দিষ্ট সরল রেখা ; ইহাকে দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিতে হইবে ।

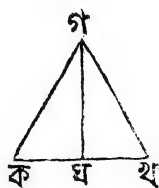
কথএর উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর,

[১ম, ১ ।

এবং গঘ রেখা দ্বারা কগথ কোণকে দ্বিখণ্ড কর ।

[১ম, ২ ।

কথ রেখা ঘ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে ছেদিত হইবে ।



কগ বাহু খগএর সমান হওয়াতে, [সং, ২৪ ।

এবং কগঘ ও খগঘ ত্রিভুজ দ্বয়ের গঘ সাধারণ বাহু বলিয়া,

কগ ও গঘ এই দুই বাহু ক্রমে খগ ও গঘ দুই বাহুর সমান ;

আর কগঘ কোণ খগঘ কোণের সমান ; [অঙ্কন ।

সুতরাং কঘ ভূমি যথ ভূমির সমান । [১ম, ৪ ।

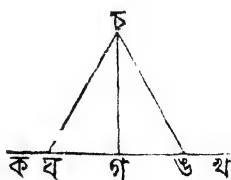
অতএব কথ সরল রেখা ঘ বিন্দুতে দুই সমান ভাগে বিভক্ত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১০ । এক সমচতুর্ভুজকে সমান সমান দুই আয়ত ক্ষেত্রে বিভক্ত করিতে হইবে ।

১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার সহিত সম কোণ করিয়া ঐ রেখাস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক সরল রেখা টানিতে হইবে ।

কথ যেন নির্দিষ্ট সরল রেখা
এবং গ এই রেখাস্থ নির্দিষ্ট
বিন্দু, কথএর সহিত সম কোণ
করিয়া গ বিন্দু হইতে এক সরল
রেখা টানিতে হইবে ।



কগ রেখাতে ঘ বিন্দু কল্পনা কর ; এবং গঘএর
সমান করিয়া গথ হইতে গঙ অংশ ছেদ কর ; [১ম, ৩।
ঘঙর উপর ঘচঙ সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত কর, [১ম, ১।
এবং গচ সংযুক্ত কর ।

গ বিন্দু হইতে যে গচ সরল রেখা টানা হইল, তাহা
কথএর সহিত সম কোণ করিবে ।

যগ রেখা ঙগএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।

এবং যগচ ও ঙগচ ত্রিভুজ দ্বয়ের গচ সাধারণ বাহু বলিয়া,
যগ ও গচ দুই বাহু ক্রমে ঙগ ও গচ দুই বাহুর সমান ;

ও যচ ভূমি ওচ ভূমির সমান ; [সং ২৪ ।

এই হেতু যগচ কোণ ঙগচ কোণের সমান ; [১ম, ৮ ।

আর এই দুইটী পরস্পর সম্বিহিত কোণ ।

আবার, এক সরল রেখা আর একটি সরল রেখার উপর
দণ্ডায়মান হইলে, যদি সম্বিহিত কোণ দ্বয় পরস্পর
সমান হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে সম কোণ
বলা যায় ; [সং, ১০ ।

সুতরাং যগচ ও ঙগচ ইহারা প্রত্যেকেই সম কোণ ।
অতএব নির্দিষ্ট কথ সরল রেখার সহিত সম কোণ করিয়া
এই রেখাস্থ নির্দিষ্ট গ বিন্দু হইতে গচ সরল রেখা
টানা হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অনুমান । এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা প্রমাণ করা যায় যে,
দুই সরল রেখার এক সাধারণ খণ্ড থাকিতে পারে না ।

যদি সম্ভব হয়, তবে কথ

যেন কথগ ও কথঘ এই উভয়

ও

সরল রেখার সাধারণ খণ্ড হইল ।

খ বিন্দু হইতে কথ রেখার

সহিত সম কোণ করিয়া খঙ

ক খ গ

সরল রেখা টান ।

ক ৩

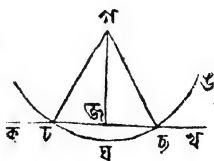
পরে, কথগ এক সরল রেখা হওয়াতে, [কম্পনা ।
 গথঙ কোণ ঙথক কোণের সমান । [সং ১০ ।
 আবার কথঘ এক সরল রেখা বলিয়া, [কম্পনা ।
 ঘথঙ কোণ ঙথক কোণের সমান ।
 সুতরাং ঘথঙ কোণ গথঙ কোণের সমান, [স্বতঃ ১ ।
 অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর রহত্তরের সমান ; কিন্তু এরূপ হওয়া
 অসম্ভব । [স্বতঃ ২ ।
 অতএব দুই সরল রেখার এক সাধারণ খঙ থাকিতে
 পারে না ।

অঃ প্রঃ—১২ । এক নির্দিষ্ট অসীম রেখাতে, এমন এক বিন্দু
 স্থির করিতে হইবে যে, তাহা যেন দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে
 সম দূরবর্তী হয় । বিন্দু ছয় কি রূপে স্থাপিত হইলে প্রতিজ্ঞাটি
 অসাধ্য হইবে ?

১২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

এক নির্দিষ্ট অসীম সরল রেখার বহিস্থ কোন
 নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার লম্ব স্বরূপ এক সরল রেখা
 টানিতে হইবে ।

কথ যেন নির্দিষ্ট অসীম
 সরল রেখা, অর্থাৎ এই রেখাকে
 উভয় পাশ্বে যত দূর ইচ্ছা
 বর্দ্ধিত করিতে পারা যায় ;



এবং গ যেন নির্দিষ্ট বহিস্থ বিন্দু ; গ হইতে কথএর উপর
 লম্ব টানিতে হইবে ।

কথ সরল রেখার অন্য দিকে য বিন্দু কল্পনা কর
এবং গ কেন্দ্র হইতে য পর্য্যন্ত দূরে ঔষচ র্ত্ত অঙ্কিত
কর । [স্বীঃ ৩ ।

এই র্ত্ত যেন চ ও ছ বিন্দুতে কথ রেখাকে ছেদ করিল ।
চছকে জ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর, [১ম, ১০ ।
এবং গজ সংযুক্ত কর । নির্দিষ্ট গ বিন্দু হইতে যে
গজ রেখা টানা হইল, তাহা কথএর উপর লম্ব হইবে ।
গচ ও গছ সংযুক্ত কর ।

পরে, চজ রেখা ছজএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন ।
এবং গচজ ও গছজ ত্রিভুজ দ্বয়ের গজ সাধারণ বাহু
হওয়াতে,

চজ ও জগ দুই বাহু ক্রমে ছজ ও জগ দুই বাহুর সমান ;
আর গচ ভূমি গছ ভূমির সমান ; [সং ১৫ ।

সুতরাং গজচ কোণ গজছ কোণের সমান ; [১ম, ৮ ।
আর এই দুইটি পরস্পর সন্নিহিত কোণ ;

আবার এক সরল রেখা আর একটী সরল রেখার উপর
দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দ্বয় পরস্পর সমান
হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে সম কোণ
আর দণ্ডায়মান রেখাকে লম্ব বলে । [সং ১০ ।

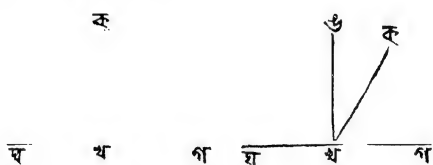
অতএব কথ নির্দিষ্ট রেখার বহিস্থ গ বিন্দু হইতে গজ
লম্ব রেখা টানা হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১২ । এক নির্দিষ্ট সরল রেখাতে এমন দুই বিন্দু
স্থির কর, যাহারা কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে সম দূরবর্ত্তী হয় ।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য । --

এক সরল রেখা অন্য এক সরল রেখার সহিত সংলগ্ন হইলে, তাহার এক দিকে যে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা দুই সম কোণ অথবা একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ।

কথ সরল রেখা যেন গঘএর সহিত সংলগ্ন হওয়াতে তাহার এক দিকে গথক ও কথঘ কোণ উৎপন্ন হইয়াছে ; ইহারা দুই সম কোণ অথবা একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে ।



যদি গথক কোণ কথঘ কোণের সমান হয়, তবে প্রত্যেকে এক এক সম কোণ হইবে । [সং ১০।

যদি সমান না হয়, তবে গঘএর সহিত সম কোণ করিয়া থ বিন্দু হইতে থঙ রেখা টান, [১ম, ১১।

তাহা হইলে ঙথগ ও ঙথঘ কোণ দ্বয় দুই সম কোণ হইবে ; [সং ১০।

এক্ষণে, গথঙ কোণ গথক ও কথঙ কোণ দ্বয়ের সমান ;

এই দুই সমান বস্তুতে ঙথঘ কোণ যোগ করিলে,

গথঙ ও ঙথঘ এই দুই কোণ গথক, কথঙ ও ঙথঘ এই তিন কোণের সমান হইবে । [স্বতঃ ২।

আবার যথক কোণ যথঙ ও ঙথক কোণের সমান ;
 এই দুই সমান বস্তুতে কথগ কোণ যোগ করিলে,
 যথক ও কথগ কোণ, যথঙ, ঙথক ও কথগ এই তিন
 কোণের সমান হইবে ; [স্বতঃ ২ ।
 আর গথঙ ও ঙথয কোণ যে এই তিন কোণের সমান,
 তাহা প্রতিপন্ন হইয়াছে ;
 আবার যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর সমান,
 তাহারা পরস্পর সমান, [স্বতঃ ১ ।
 অতএব গথঙ ও ঙথয কোণের যোগ ফল, যথক ও কথগ
 কোণের যোগ ফলের সমান ;
 ইহাদের মধ্যে যথঙ ও ঙথগ দুই সম কোণ ;
 সুতরাং যথক ও কথগ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম
 কোণের সমান ।
 অতএব এক সরল রেখা অন্য এক ইত্যাদি । এখানে
 ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১৩। এক সরল রেখা অন্য এক সরল রেখার
 উপর দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দ্বয়কে দ্বিখণ্ড করা
 যায়, তবে দুইটি দ্বিখণ্ড কারক রেখার অন্তর্গত কোণ এক সম
 কোণ হইবে ।

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক সরল রেখার কোন বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত
 দিকে অন্য দুই সরল রেখা সংলগ্ন হইলে, যদি সন্নিহিত
 কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সন্নিহিত হয়, তবে
 এই দুই সরল রেখা একই সরল রেখা হইবে ।

কথ সরল রেখার থ বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে থগ ও থঘ দুই সরল রেখা সংলগ্ন হইয়া যেন সন্নিহিত কথগ ও কথঘ কোণ দ্বয়কে একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান করিতেছে ; তাহা হইলে, গথ ও থঘ এই দুই রেখা একই সরল রেখা হইবে ।

যদি থঘ ও থগ এক রেখাস্থ ক
না হয়, তবে থঙ ও থগ যেন এক
রেখাস্থ হইল । তাহা হইলে,
কথ সরল রেখা গথঙর সহিত
সংলগ্ন হইয়া, তাহার এক দিকে গ থ ঘ
যে কথগ ও কথঙ কোণ দ্বয় উৎপন্ন করিতেছে, তাহার
একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে ; [১ম, ১৩
আর কথগ এবং কথঘ কোণ দ্বয়ও দুই সম কোণের
সমান । [কল্পনা ।

এই হেতু কথগ ও কথঙ কোণ দ্বয় কথগ ও কথঘ কোণ
দ্বয়ের সমান । [স্বতঃ ১ ।

এই দুই সমান বস্তু হইতে কথগ সাধারণ কোণ বিয়োগ
করিলে, অবশিষ্ট কথঙ কোণ অবশিষ্ট কথঘ কোণের
সমান হইবে, [স্বতঃ ৩ ।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর রহত্তরের সমান হইবে :

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব । [স্বতঃ ২ ।

এই হেতু থঙ ও থগ এক রেখা হইতে পারে না ।

এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, অন্য কোন রেখা থগএর
সহিত এক রেখাতে থাকিতে পারে না ;

সুতরাং খঘ ও খগ একই রেখা হইবে ।

অতএব এক সরল রেখার ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

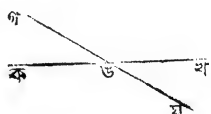
অঃ প্রঃ—১৪ । কখগ ও কঘঙ এই দুই ত্রিভুজ একপে অবস্থিত আছে যে, কখ ও কঘ এক রেখা হইয়াছে ; যদি গকগ ও ঘকঙ কোণ সমান এবং ঘকখ রেখার ভিন্ন ভিন্ন দিকে অঙ্কিত হয়, তবে কগ ও কঙ এক রেখা হইবে ।

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে প্রাতিপ, অর্থাৎ বিপরীত কোণ গুলি পরস্পর সমান হইবে ।

কখ ও গঘ এই দুই সরল রেখা পরস্পর যেন ঙ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; তাহা হইলে কঙগ কোণ ঘঙখ কোণের এবং গঙখ কোণ কঙঘ কোণের সমান হইবে ।

কঙ সরল রেখা গঘ সরল
রেখার সহিত সংলগ্ন হওয়াতে
কঙগ ও কঙঘ কোণ উৎপন্ন



হইতেছে ; অতএব এই দুই কোণ একত্র যোগে দুই সম
কোণের সমান ।

[১ম, ১৩ ।

আবার ঘঙ সরল রেখা কখএর সহিত সংলগ্ন হইয়া
কঙঘ ও ঘঙখ কোণ উৎপন্ন করিতেছে বলিয়া, এই দুইটা
কোণও একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ১৩ ।

সুতরাং গঙক ও কঙঘ কোণ দ্বয় যে দুই সম কোণের সমান,
তাহা প্রতিপন্ন হইয়াছে ;

অতএব গড়ক ও কণ্ডয এই দুই কোণ কণ্ডয ও ঘণ্ডখ কোণ দ্বয়ের সমান ।

এই দুই সমান বস্তু হইতে কণ্ডয সাধারণ কোণ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট গড়ক কোণ ঘণ্ডখ কোণের সমান হইবে । [স্বতঃ ৩।

গড়খ কোণ যে কণ্ডয কোণের সমান, তাহাও এই রূপে প্রমাণ করা যায় ।

অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

১ অনুমান । ইহা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে, ছেদ বিন্দুতে যে চারিটা কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সম কোণের সমান ।

২ অনুমান । প্রথম অনুমান দ্বারা প্রতিপন্ন হইবে যে কতিপয় সরল রেখা এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইলে, তদ্বারা যে সকল কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সম কোণের সমান ।

অঃ প্রঃ—১৫ । দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে, প্রতিপ কোণ দ্বয়ের দ্বিগুণ কারক রেখা দুইটি, একই রেখায় থাকিতে ।

১৬ । চারি সরল রেখা এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইলে, যদি প্রতিপ কোণগুলি পরস্পর সমান হয়, তবে চারিটির মধ্যে দুইটি দুইটি রেখা একই সরল রেখা হইবে ।

১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন ত্রিভুজের এক বাহু বর্দ্ধিত করিলে, বহিস্থ কোণ অন্তরস্থিত দূরবর্তী প্রত্যেক কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কথগ ত্রিভুজের খগ বাহু যেন ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত
হইয়াছে ; তাহা হইলে বহিস্থ কগঘ কোণ অন্তরস্থিত
দূরবর্তী গথক ও খকগ এই দুইএর প্রত্যেক কোণ অপেক্ষা
বৃহত্তর হইবে ।

কগকে ও বিন্দুতে দ্বিখণ্ড
কর ; [১ম, ১০।

খণ্ড সংযুক্ত করিয়া তাহাকে
চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর, ণ্ডকে
ঊর্ধ্বের সমান কর; [১ম, ৩।

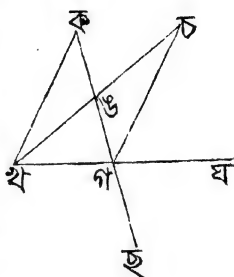
কণ্ড রেখা উগ্গের এবং
খণ্ড রেখা উচের সমান
বলিয়া, [অঙ্কন।

কঙ ও ঙথ দুই বাহু ক্রমে গঙ ও ঙচ দুই বাহুর সমান ;
আর কঙথ কোণ গঙচ কোণের সমান ;

কেননা, তাহার পরম্পর প্রতীপ কোণ ; [১ম, ১৫।

এই হেতু কণ্ঠ্য ত্রিভুজ প্ৰগুচ ত্রিভুজের সমান ;
 আর সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ গুলি যথাক্রমে
 পরস্পর সমান ; [১ম, ৪।

অতএব থকঙ কোণ ঙ্গচ কোণের সমান ;



কিন্তু ঙগঘ কোণ ঙগচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর । [স্বতঃ ৯।

সুতরাং কগঘ কোণ খকঙ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ।

এই রূপে খগ বাহুকে দ্বিখণ্ডিত ও কগ বাহুকে ছ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিলে, সপ্রমাণ হইবে যে, খগছ কোণের সমান কগঘ কোণ কখগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১৭। এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন সরল রেখার উপর একাধিক লম্ব টানা যায় না ।

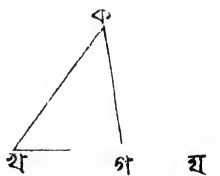
১৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন ত্রিভুজের যে দুইটি কোণ লও, তাহারা একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ।

কখগ যেন এক ত্রিভুজ ; ইহার যে দুই কোণ লও, তাহারা একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ।

খগকে ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধি কর ।

পরে, কগঘ কোণ কখগ ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ বলিয়া,
ইহা অন্তরস্থিত দূরবর্তী কখগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ; [১ম, ১৬।



ইহাদের প্রত্যেকের সহিত কগখ কোণ যোগ করিলে, কগঘ ও কগখ কোণ একত্র যোগে কখগ ও কগখ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

আর কগয কোণ ও কগথ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান । [১ম, ১৩ ।

সুতরাং কথগ ও কগথ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

এইরূপে সপ্রমাণ হইবে যে, থকগ ও কগথ কোণ একত্র যোগে এবং গকথ ও কথগ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১৮ । কোন ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমষ্টি তিন সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

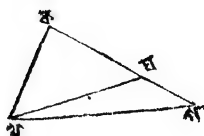
১৯ । কোন ত্রিভুজের দুইটি বহিষ্ক কোণ দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং তিনটি বহিষ্ক কোণ একত্র যোগে তিন সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ।

১৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

প্রত্যেক ত্রিভুজের বৃহত্তর বাহুর সম্মুখীন কোণ বৃহত্তর হইবে ।

কথগ ত্রিভুজের কগ বাহু যেন কথ অপেক্ষা বৃহত্তর ; তাহা হইলে, কথগ কোণও কগথ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

কগ বাহু কথ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, কথকে কথগের সমান কর, [১ম, ৩।
এবং থয সংযুক্ত কর ।



পরে, খগগ ত্রিভুজের কখখ বহিস্থ কোণ বলিয়া, ইহ
অন্তরস্থিত দূরবর্তী ঘগখ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর; [১ম, ১৬
আর কখ বাহু কঘ বাহুর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন
কখখ কোণ কখঘ কোণের সমান। [১ম, ৫
অতএব কখঘ কোণও কগখ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;
সুতরাং কখগ কোণ কগখ কোণ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর
অতএব প্রত্যেক ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহা
উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২০। কখগয চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের কগ বৃহত্তম ও খগ
ক্ষুদ্রতম ভূজ; প্রমাণ কর যে, কখগ কোণ কঘগ কোণ অপেক্ষা
এবং খগয কোণ খকঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

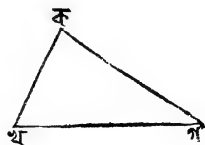
১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু বৃহত্তর
হইবে।

কখগ ত্রিভুজের কখগ কোণ যেন কগখ কোণ অপেক্ষা
বৃহত্তর; কগ বাহু ও কখ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

যদি না হয়, তবে কগ বাহু
কখএর সমান কিম্বা তাহা অ-
পেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে;

কিন্তু কগ, কখএর সমান হইতে
পারে না, কেননা, সমান হইলে



কখগ কোণ ও কগখ কোণের সমান হইবে; [১ম, ৫।
কিন্তু এই দুই কোণ সমান নয়; [কল্পনা।

অতএব কগ বাহু কথএর সমান নয় ।

আর কগ বাহু কথ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতরও নয় ;

কেননা, তাহা হইলে কথগ কোণও কগথ কোণ অপেক্ষা

ক্ষুদ্রতর হইত ; [১ম, ১৮ ।

কিন্তু ইহা ক্ষুদ্রতর নয় ; [কল্পনা ।

অতএব কগ বাহু কথ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয় ;

আর সপ্রমাণ হইয়াছে যে, কগ, কথএর সমান নয় ;

সুতরাং কগ বাহু কথ অপেক্ষা বৃহত্তর ।

অতএব প্রত্যেক ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

• অঃ প্রঃ - ২১। কথগয় সমচতুর্ভুজের ক বিন্দু হইতে কচ সরল রেখা একপে টান, যেন তাহা খগ বাহুকে ও বিন্দুতে ও বর্ধিত যগ বাহুকে চ বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে কচ রেখা সমচতুর্ভুজের কণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

২২। কোন সরল রেখার বহিষ্ক এক বিন্দু হইতে ঐ রেখা পর্য্যন্ত যত সরল রেখা টানা যায়, তন্মধ্যে যেটী নির্দিষ্ট সরল রেখার লম্ব হইবে, সেইটী সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্রতম ; আর অন্যগুলির মধ্যে লম্বের নিকটবর্তী যে কোন রেখা তাহা হইতে দূরবর্তী রেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; এবং লম্বের দুই দিকে কেবল এক একটী করিয়া সমান রেখা টানা যায় ।

২০ প্রতিজ্ঞা - উপপাদ্য । -

• ত্রিভুজের যে দুই বাহু লও, তাহাদের সমষ্টি তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

• কথগ যেন এক ত্রিভুজ ; ইহার যে দুই বাহু লও, তাহার

তৃতীয় বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; অর্থাৎ, খক ও কগ একত্র যোগে খংগ অপেক্ষা বৃহত্তর; কখ ও খংগ একত্র যোগে কগ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং খংগ ও গক একত্র যোগে কখ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

খককে য পর্য্যাস্ত বৃদ্ধি করিয়া,
কঘকে কগএর সমান কর,



[১ম, ৩।

এবং ঘগ সংযুক্ত কর।

পরে, কঘ রেখা কগএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

কঘগ কোণ কগঘ কোণের সমান; [১ম, ৫।

আর খংগঘ কোণ কগঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর; [স্বতঃ ৯।

এই হেতু খংগঘ কোণ খঘগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার খংগঘ ত্রিভুজের খংগঘ কোণ খঘগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,

এবং প্রত্যেক ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু বৃহত্তর হয় বলিয়া, [১ম, ১৯।

খংগ বাহু খংগ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর।

ইহাদের মধ্যে খংগ বাহু খক ও কগএর সমান;

সুতরাং খক ও কগ একত্র যোগে খংগ অপেক্ষা বৃহত্তর।

এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, কখ ও খংগ একত্র যোগে কগ অপেক্ষা এবং খংগ ও গক একত্র যোগে কখ অপেক্ষা বৃহত্তর; অতএব ত্রিভুজের যে দুই বাহু ইত্যাদি। এখানে ইচ্ছাই উপপাদ্য।

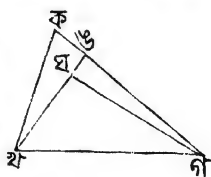
অঃ প্রঃ—২৩। ত্রিভুজের যে বাহু লও তাহা অন্য দুই বাহুর অন্তর অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

২৪। ত্রিভুজের তিন বাহুর সমষ্টি প্রত্যেক বাহুর দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু যে কোন দুই বাহুর সমষ্টির দ্বিগুণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ।

২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

ত্রিভুজের কোন বাহুর দুই প্রান্ত হইতে অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু পর্যন্ত যদি দুই সরল রেখা টানা যায়, তবে এই দুই রেখা একত্র যোগে ত্রিভুজের অন্য দুই বাহুর সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, কিন্তু তাহাদের অন্তর্গত কোণ, ত্রিভুজের দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

কথং যেন এক ত্রিভুজ এবং খং বাহুর দুই প্রান্ত হইতে ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ য বিন্দু পর্যন্ত যেন খয ও গয রেখা টানা হইয়াছে; খয ও গযএর সমষ্টি খক ও কগএর সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে, কিন্তু তাহাদের অন্তর্গত খযগ কোণ খকগ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।



খয রেখাকে ও পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর ।

ত্রিভুজের দুই বাহু একত্র যোগে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হয় বলিয়া, কখও ত্রিভুজের খক ও কও এই দুই বাহু একত্র যোগে খও বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর । [১ম, ২০ ।

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত ঙ্গ যোগ করিলে,
খক ও কগ একত্র যোগে খঙ ও ঙ্গ অপেক্ষা বৃহত্তর
হইবে । [স্বতঃ ৪ ।

আবার গঙঘ ত্রিভুজের গঙ ও ঙ্ঘ দুই বাহু একত্র যোগে
তৃতীয় গঘ বাহু অপেক্ষা বৃহত্তর ; [১ম, ২০ ।

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত যথ যোগ করিলে,
গঙ ও ঙ্ঘ একত্র যোগে গঘ ও যথ অপেক্ষা বৃহত্তর
হইবে ;

আর পূর্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, খক ও কগ একত্র যোগে
খঙ ও ঙ্গ অপেক্ষা বৃহত্তর ; সুতরাং খক ও কগ একত্র
যোগে খঘ ও যগ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর ।

অনন্তর, ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ অন্তরস্থিত দূরবর্তী
কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয় বলিয়া, গঘঙ ত্রিভুজের বহিস্থ
খঘগ কোণ গঙঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ।

এই কারণে, কখঙ ত্রিভুজের বহিস্থ গঙখ কোণ খকঙ
কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ; আর সপ্রমাণ হইয়াছে যে, খঘগ
কোণ গঙঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ; সুতরাং খঘগ কোণ
খকগ কোণ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর ।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপ-
পাদ্য ।

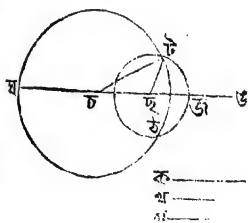
অঃ প্রঃ—২৫ । ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে
তিনটি কোণিক বিন্দু পর্য্যন্ত তিনটি রেখা টানিলে এই তিন
রেখা একত্র যোগে ত্রিভুজের তিন বাহুর সমষ্টির তর্কেক অপেক্ষা
বৃহত্তর কিন্তু বাহু তিনটির যোগফল অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ।

২২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

এমন এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার তিন বাহু তিনটি নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান হয়, কিন্তু এই তিন রেখার যে কোন দুইটির যোগ ফল তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়া আবশ্যিক।

ক, খ, গ যেন তিনটি নির্দিষ্ট সরল রেখা; ইহাদের মধ্যে যে কোন দুইটির যোগ ফল তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর; অর্থাৎ ক ও খএর সমষ্টি গ অপেক্ষা, ক ও গএর সমষ্টি খ অপেক্ষা এবং খ ও গএর সমষ্টি ক অপেক্ষা বৃহত্তর। এমন এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার বাহু তিনটি যথাক্রমে ক, খ ও গ সরল রেখার সমান হইবে।

যাঙ সরল রেখা এরূপে কল্পনা কর যেন ইহা ঘ বিন্দুতে সীমাবিশিষ্ট কিন্তু ঙ বিন্দুর দিকে অসীম হয়, আর ঘচকে কএর, চছকে খএর এবং ছজকে গএর সমান কর। [১ম, ৩।



চ কেন্দ্র হইতে চঘএর প্রান্ত দিয়া ঘট্ট বৃত্ত অঙ্কিত কর। [স্বী, ৩।

ছ কেন্দ্র হইতে ছজএর প্রান্ত দিয়া জট্ট বৃত্ত অঙ্কিত কর। টচ ও টছ সংযুক্ত কর। টচছ ত্রিভুজের বাহু তিনটি, যথাক্রমে ক, খ, গ সরল রেখার সমান হইবে।

চ বিন্দু ঘট্ট রত্নের কেন্দ্র হওয়াতে, চঘ রেখা চটএর সমান ; [সং ১৫।

আর চঘ রেখা কএর সমান ; [অঙ্কন।

এই হেতু চট রেখা কএর সমান । [স্বতঃ ১।

আবার, ছ বিন্দু জট্ট রত্নের কেন্দ্র হওয়াতে, ছজ রেখা ছটএর সমান ;

আর ছজ রেখা গএর সমান : [অঙ্কন।

এই হেতু ছট রেখা গএর সমান ; [স্বতঃ ১।

এবং চছ রেখা থএর সমান । [অঙ্কন।

সুতরাং টচ, চছ ও ছট রেখা যথাক্রমে ক, থ ও গ সরল রেখার সমান ।

অতএব টচছ ত্রিভুজের টচ, চছ ও ছট বাহু যথাক্রমে ক, থ ও গ সরল রেখার সমান । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২৬। কোন নির্দিষ্ট সরল বৈখিক ক্ষেত্রের সমান আর এক সরল বৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে ।

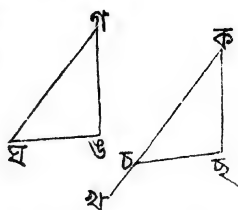
২৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

এক নির্দিষ্ট সরল রেখার কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে এক নির্দিষ্ট সরল বৈখিক কোণের সমান এক কোণ করিতে হইবে ।

কথ নির্দিষ্ট সরল রেখা ; ক যেন এই রেখাস্থিত নির্দিষ্ট বিন্দু, এবং ঘগঙ নির্দিষ্ট সরল বৈখিক

কোণ । কথ রেখার ক বিন্দুতে ঘগঙ সরল রৈখিক কোণের সমান এক কোণ করিতে হইবে ।

গঘ ও গঙ রেখাতে ঘ ও গ বিন্দু নির্দেশ করিয়া ঘঙ সংযুক্ত কর । কচছ ত্রিভুজ এক্ষেপে অঙ্কিত কর, যেন ইহার তিন বাহু যথা-



ক্রমে গঘ, ঘঙ ও গগ সরল রেখার সমান হয়, অর্থাৎ যেন কচ বাহু গঘএর, চছ বাহু ঘঙের এবং ছক বাহু গগএর সমান হয় ।

[১ম, ২২ ।

চকছ কোণ ঘগঙ কোণের সমান হইবে ।

চক ও কছ বাহু যথাক্রমে ঘগ ও গঙ বাহুর সমান হওয়াতে, এবং চছ ভূমি ঘঙের সমান বলিয়া, চকছ কোণ ঘগঙ কোণের সমান ।

[১ম, ৮ ।

অতএব কথ রেখার ক বিন্দুতে নির্দিষ্ট ঘগঙ কোণের সমান চকছ কোণ অঙ্কিত হইল । এখান্নে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২৭ । কোন ত্রিভুজের একটি ভূজ, সম্বন্ধিত একটি কোণ ও অন্য দুই ভূজের সমষ্টি বা অন্তর নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজ অঙ্কিত কর ।

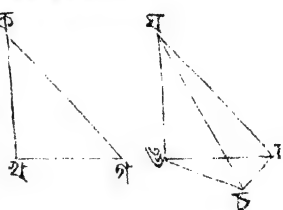
২৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয়, কিন্তু একটির এই বাহু

দ্বয়ের অন্তর্গত কোণ যদি অন্যটির বাহু দ্বয়ের অন্তর্গত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে যে ত্রিভুজের কোণ বৃহত্তর তাহার ভূমি অন্যের ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

কথগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয়ের মধ্যে যেন একের কথ ও কগ বাহু যথাক্রমে অন্যের ঘঙ ও ঘচ বাহুর সমান, অর্থাৎ কথ বাহু ঘঙর এবং কগ বাহু ঘচএর সমান ; কিন্তু খকগ কোণ ঙঘচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ; তাহা হইলে খগ ভূমি ঙচ ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

ঘঙ ও ঘচ বাহুর মধ্যে ঘঙ বাহু যেন অন্য অপেক্ষা বৃহত্তর নাহে । ঘঙ রেখার ঘ বিন্দুতে খকগ কোণের সমান ঙঘচ কোণ কর,



এবং ঘচ রেখাকে কগ বা ঘচএর সমান কর :
ঙচ ও চ্চ সংযুক্ত কর ।

কথ বাহু ঘঙর সমান হওয়াতে,
এবং কগ বাহু ঘচএর সমান বলিয়া,
খক ও কগ বাহু দ্বয় যথাক্রমে ঙঘ ও ঘচ বাহু দ্বয়ের সমান ;

আর খকগ কোণ ঙঘচ কোণের সমান ,
এই হেতু খগ ভূমি ঙচ ভূমির সমান ।

আবার ঘছ বাহু ঘচএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।
 ঘছচ কোণ ঘচছ কোণের সমান ; [১ম, ৫ ।
 এবং ঘছচ কোণ উছচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর । [স্বতঃ ৯ ।
 অতএব ঘচছ কোণ ও উছচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
 তাহা হইলে, উচছ কোণ উছচ কোণ অপেক্ষা আরও
 বৃহত্তর । [স্বতঃ ৯ ।

এক্ষণে উচছ ত্রিভুজের উচছ কোণ উছচ কোণ অপেক্ষা
 বৃহত্তর হওয়াতে,
 আর প্রত্যেক ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু
 বৃহত্তর হয় বলিয়া, [১ম, ১৯ ।
 উছ, উচ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
 আর উছ খণ্ডের সমান ;
 সুতরাং খণ্ড ভূমি উচ ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর ।
 অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে ইত্যাদি । এখানে ইহাই
 উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২৮ । চক্ৰিশের প্রতিজ্ঞার চিত্রে প্রতিপন্ন কর
 যে, ওছ রেখা ঘচ রেখাকে ঘ ও চএর মধ্যস্থিত কোন বিন্দুতে
 ছেদ করিবে ।

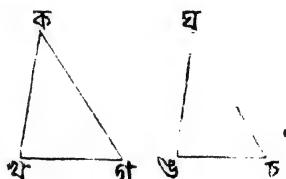
২৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে
 অন্যের দুই বাহুর সমান হয়, আর একটীর ভূমি অন্য-
 টীর ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে, যে ত্রিভু-
 জের ভূমি বৃহত্তর, তাহার দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ

অন্যের বাহু দ্বয়ের অন্তর্গত কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

কথগ ও ঘণ্ট চিত্রভূজের কথ ও কগ বাহু যেন ক্রমে ঘণ্ট ও ঘচ বাহুর সমান, অর্থাৎ কথ বাহু ঘণ্টর এবং কগ বাহু ঘচের সমান, কিন্তু খগ ভূমি উচ ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর ; তাহা হইলে খকগ কোণ ওঘচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

যদি বৃহত্তর না হয়,
তবে খকগ কোণ ওঘচ
কোণের সমান অথবা
তাহা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর
হইবে ।



• খকগ কোণ ওঘচ কোণের সমান হইতে পারে না :
কেননা, তাহা হইলে, খগ ভূমি ওচ ভূমির সমান
হইত ; [১ম, ৪।]

কিন্তু এই ভূমি দ্বয় পরস্পর সমান নয় ; [কল্পনা।]

এই হেতু খকগ কোণ ওঘচ কোণের সমান নয় ।

আবার খকগ কোণ ওঘচ কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয় ;

কেননা, তাহা হইলে খগ ভূমি ওচ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর
হইত ; [১ম, ২৪।]

কিন্তু ইহা ক্ষুদ্রতর নয় ; [কল্পনা।]

এই হেতু খকগ কোণ ওঘচ কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নয় ।

সুতরাং খকগ কোণ ওঘচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ।

অতএব দুই ত্রিভুজের মধ্যে ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য

অঃ প্রঃ—২২ । দুই এককেন্দ্রিক বৃত্তের মধ্যে ক্ষুদ্রতর কণ ব্যাসের দুই প্রান্ত হইতে ভিন্ন ভিন্ন দিকে বৃহৎ বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত কণ, কণ, খগ ও খঘ রেখা টানিলে, যদি কণ রেখা কঘএর সমান হয়, তবে খগ রেখা খঘএর সমান হইবে ; এবং যদি কণ, কঘ আপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে খগ, খঘ আপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ও যদি ক্ষুদ্রতর হয়, তবে বৃহত্তর হইবে ।

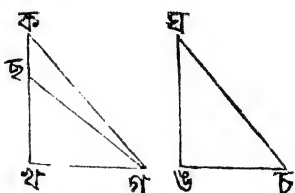
২৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই কোণ যথাক্রমে অন্যের দুই কোণের সমান হয় এবং এক একটী বাহু, অর্থাৎ সমান কোণের সন্নিহিত বা সম্মুখীন বাহু দ্বয় পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে, অন্য বাহু গুলি যথাক্রমে সমান হইবে এবং একের তৃতীয় কোণ অন্যের তৃতীয় কোণের সমান হইবে ।

কখগ এবং ঘঙচ দুই ত্রিভুজের মধ্যে যেন একের কখগ ও খগক কোণ দ্বয় যথাক্রমে অন্যের ঘঙচ ও ঙচঘ কোণ দ্বয়ের সমান অর্থাৎ কখগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং খগক কোণ ঙচঘ কোণের সমান ; আর এই দুই ত্রিভুজের এক এক বাহু পরস্পর সমান ; প্রথমত যেন সমান সমান কোণের সন্নিহিত বাহু দ্বয় অর্থাৎ খগ ও ঙচ পরস্পর সমান হইল ; তাহা হইলে অন্য বাহু গুলি যথাক্রমে পরস্পর সমান হইবে, অর্থাৎ কখ বাহু ঘঙর

এবং কগ বাল্‌ ঘচএর সমান হইবে এবং থকগ তৃতীয় কোণ ওঘচ তৃতীয় কোণের সমান হইবে ।

যদি কথ বাল্‌ ঘঙর সমান না হয়, তবে এই দুইএর মধ্যে একটি অন্য অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।
কথ যেন বৃহত্তর হইল ;



থক হইতে ঘঙর সমান থছ অংশ ছেদ কর, [১ম, ৩।
এবং ছগ সংযুক্ত কর ।

পরে, ছথ বাল্‌ ঘঙর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।
এবং থগ বাল্‌ ওচএর সমান বলিয়া, [কল্পনা ।
ছথ ও থগ বাল্‌ দ্বয় যথাক্রমে ঘঙ ও ওচ বাল্‌ দ্বয়ের সমান ।
আর ছথগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান, [কল্পনা ।
এই হেতু, ছগ ভূমি ঘচ ভূমির সমান এবং ছথগ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান ; আর সমান সমান কোণের সম্মুখীন বাল্‌ গুলি যথাক্রমে সমান ; [১ম, ৪ ।
অতএব ছগথ কোণ ঘচঙ কোণের সমান ;
আর ঘচঙ কোণ কগথ কোণের সমান ; [কল্পনা ।
এই হেতু ছগথ কোণ কগথ কোণের সমান, [স্বতঃ, ১ ।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান ; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব । [স্বতঃ ৯ ।

অতএব কথ বাল্‌ ঘঙর অসমান নহে,
অর্থাৎ এই দুই বাল্‌ পরস্পর সমান ;
আর থগ বাল্‌ ওচএর সমান,

[কল্পনা ।

এই হেতু কথ ও খগ বাহু দ্বয় যথাক্রমে ঘণ্ট ও উচ বাহু
দ্বয়ের সমান ;

এবং কখগ কোণ ঘণ্টচ কোণের সমান ; [কম্পনা ।

সুতরাং কগ ভূমি ঘচ ভূমির সমান এবং খকগ তৃতীয়
কোণ উঘচ তৃতীয় কোণের সমান । [১ম, ৪ ।

অনন্তর, যেন ত্রিভুজ দ্বয়ের সমান সমান কোণের
সম্মুখীন এক একটি বাহু পরস্পর সমান অর্থাৎ
কথ বাহু ঘণ্ট বাহুর সমান : তাহা হইলে এস্থলেও
অন্যান্য বাহু যথাক্রমে সমান হইবে, অর্থাৎ খগ বাহু
উচএর ও কগ বাহু ঘচএর সমান হইবে এবং খকগ তৃতীয়
কোণ উঘচ তৃতীয় কোণের সমান হইবে ।

যদি খগ বাহু উচএর
সমান না হয়, তবে এই
দুইএর মধ্যে একটি অন্য-

পেক্ষা বৃহত্তর হইবে; খগ

যেন বৃহত্তর হইল; উচএর

সমান করিয়া খজ অংশ ছেদ কর ;

এবং কজ সংযুক্ত কর ।

পরে, খজ বাহু উচএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন ।

এবং কথ বাহু ঘণ্টের সমান হওয়াতে, [কম্পনা ।

কথ ও খজ দুই বাহু যথাক্রমে ঘণ্ট ও উচ দুই বাহুর
সমান ;

আর কখজ কোণ ঘণ্টচ কোণের সমান ; [কম্পনা ।

এই হেতু কজ ভূমি ঘচ ভূমির সমান এবং কখজ ত্রিভুজ
যঙচ ত্রিভুজের সমান, আর সমান সমান কোণের সম্মু-
খীন বাহুগুলি যথাক্রমে সমান ; [১ম, ৪।

অতএব খজক কোণ ওচঘ কোণের সমান ;

আর ওচঘ কোণ খগক কোণের সমান ; [কম্পনা।

এই হেতু খজক কোণ খগক কোণের সমান ; [স্বতঃ ১।

অর্থাৎ কজগ ত্রিভুজের বহিস্থ খজক কোণ অন্তর স্থিত
দূরবর্তী খগক কোণের সমান ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব । [১ম, ১৬।

অতএব খগ বাহু ওচএর অসমান নহে, অর্থাৎ সমান ;

আর কখ বাহু যঙর সমান ; [কম্পনা।

এই হেতু কখ ও খগ বাহু দ্বয় যথাক্রমে যঙ ও ওচ বাহু
দ্বয়ের সমান ;

এবং কখগ কোণ যঙচ কোণের সমান ; [কম্পনা।

সুতরাং কগ ভূমি ঘচ ভূমির সমান এবং খকগ তৃতীয়
কোণ ওঘচ তৃতীয় কোণের সমান । [১ম, ৪।

অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩০। যদি একটি সরল রেখা কোন ত্রিভুজের
শীর্ষ কোণ ও ভূমি এই উভয়কে দ্বিখণ্ড করে, তবে ত্রিভুজটি
সমদ্বিবাছ হইবে ।

৩১। এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এমন এক সরল রেখা টানিতে
হইবে, যেন তাহা পরস্পর অবনত দুই নির্দিষ্ট রেখার সহিত
সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে ।

২৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সরল রেখার উপর অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, যদি একান্তর কোণগুলি পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ দুই সরল রেখা পরস্পর সমান্তর হইবে ।

কথ ও গঘ দুই সরল রেখার উপর উচ সরল রেখার সম্পাত হওয়াতে যেন কঙচ ও উচঘ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হইল ; তাহা হইলে কথ ও গঘ এই দুই সরল রেখা পরস্পর সমান্তর হইবে ।

যদি কথ ও গঘ পরস্পর সমান্তর না হয়, তবে বর্দ্ধিত হইলে তাহারা থ ও ঘএর দিকে কিম্বা ক ও গএর দিকে মিলিত হইবে ; ইহারা যেন থ ও ঘএর দিকে বর্দ্ধিত হইয়া ছ বিন্দুতে মিলিত হইল ;

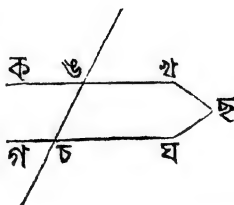
তাহাতে, ছঙচ ক্ষেত্র একটা

ত্রিভুজ হওয়াতে, ইহার

বহিস্থ কঙচ কোণ অন্তর-

স্থিত উচঘ কোণ অপেক্ষা

বৃহত্তর হইবে ; [১ম, ১৬ ।



কিন্তু কঙচ কোণ উচঘ কোণের সমান ; [কল্পনা ।

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

সুতরাং কথ ও গঘ রেখা দ্বয় থ ও ঘএর দিকে বর্দ্ধিত হইলে মিলিত হইবে না ; এই রূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, তাহারা ক ও গএর দিকেও মিলিত হইবে না ; আর দুই সরল রেখা উভয় দিকে উত্তরোত্তর

বর্দ্ধিত হইয়াও মিলিত না হইলে পরস্পর সমান্তর হইয়া থাকে । [সংজ্ঞা, ৩৫ ।

সুতরাং কথ, গঘএর সমান্তর ।

অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩২ । দুই সরল রেখার উপর অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, যদি সহিদিকের একান্তর কোণ দ্বয়, অর্থাৎ কচও কোণ ও চজঘ কোণ (২৮ প্রতিজ্ঞার চিত্র দেখ) পরস্পর সমান হয়, তবে ঐ দুই রেখা সমান্তর হইবে ।

৩৩ । প্রতিপন্ন কর যে, রম্বস মাত্রেই সমান্তর ত্রৈখিক ক্ষেত্র ও রম্বসের কর্ণ রেখা দ্বয় পরস্পর লম্বভাবে ছেদ করে ।

২৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সরল রেখার উপর অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, যদি তাহার একই দিকের বহিস্থ কোণ ও অন্তরস্থ দূরবর্তী কোণ পরস্পর সমান হয়, অথবা একই দিকের অন্তরস্থ দুই কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয়, তবে ঐ দুই সরল রেখা পরস্পর সমান্তর হইবে ।

কথ ও গঘ দুই সরল রেখার উপর যেন ঙ্চ সরল রেখার সম্পাত হইল, তাহাতে যদি এই রেখার একই দিকের বহিস্থ ঙ্চখ কোণ ও অন্তরস্থ ছজঘ কোণ পরস্পর সমান হয় কিম্বা এক দিকের অন্তরস্থ খছজ ও ছজঘ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয়, তবে কথ রেখা, গঘ রেখার সমান্তর হইবে ।

উচ্চ কোণ ছজয কোণের
সমান হওয়াতে, [কল্পনা ।

ও উচ্চ কোণ কছজ কোণের
সমান বলিয়া, [১ম, ১৫।

কছজ কোণ ছজয কোণের
সমান ; [স্বতঃ ১।

এবং এই দুইটি একান্তর কোণ হওয়াতে,
কথ রেখা গঘএর সমান্তর ।

[১ম, ২৭।

অনন্তর, খছজ ও ছজয কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই
সম কোণের সমান বলিয়া, [কল্পনা ।

এবং কছজ ও খছজ এই দুই কোণও একত্র যোগে দুই সম
কোণের সমান হওয়াতে, [১ম, ১৩।

কছজ ও খছজ কোণ দ্বয়, খছজ ও ছজয কোণ
দ্বয়ের সমান ;

এই দুই সমান বস্তু হইতে খছজ কোণ বিয়োগ করিলে,
কছজ কোণ ছজয কোণের সমান হইবে ; [স্বতঃ ৩।

আর এই দুইটি, একান্তর কোণ ;

সুতরাং কথ রেখা গঘএর সমান্তর । [১ম, ২৭।

অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩৪। কথগঘ চতুর্ভুজের খ কোণ যদি ঘ কোণের
সমান হয় ও কথ বাহু বৃদ্ধি করিলে বহিস্ক কোণ যদি ক কোণের
সমান হয়, তবে কথগঘ এক সমান্তর ত্রৈখিক ক্ষেত্র হইবে ।

২৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সমান্তর সরল রেখার উপর অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, একান্তর কোণ গুলি পরস্পর সমান হইবে আর একই দিকের বহিস্থ কোণ ও অন্তরস্থিত দূরবর্তী কোণ পরস্পর সমান হইবে এবং একই দিকের অন্তরস্থ কোণ দ্বয় একত্রযোগে দুই সম কোণের সমান হইবে ।

কথ ও গঘ সমান্তর রেখার উপর যেন উচ রেখার সম্পাত হইয়াছে ; তা-

হাতে কছজ ও ছজঘ

একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর

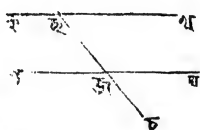
সমান হইবে এবং উচএর

একই দিকের বহিস্থ উছখ

কোণ ও অন্তরস্থ দূরবর্তী ছজঘ কোণ পরস্পর সমান হইবে

আর একই দিকের অন্তরস্থ খছজ ও ছজঘ এই দুইটি

কোণ, একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে ।



যদি কছজ কোণ ছজঘ কোণের সমান না হয়, তবে একটা অন্যাপেক্ষা অবশ্যই রহত্তর হইবে ;

কছজ যেন রহত্তর হইল ।

পরে, কছজ কোণ ছজঘ অপেক্ষা রহত্তর হওয়াতে প্রত্যেকের সহিত খছজ কোণ যোগ করিলে, কছজ ও খছজ একত্র যোগে খছজ ও ছজঘএর সমষ্টি অপেক্ষা রহত্তর হইবে ;

আর কছজ ও খছজ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ১৩ ।

অতএব খছজ ও ছজঘ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

আবার কোন দুই সরল রেখার সহিত অন্য এক সরল রেখার সম্পাত হইলে, তাহার একই দিকের দুই অন্তরস্থ কোণ যদি একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, তবে যে দিকের দুইটা কোণের সমষ্টি দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, সেই দিকে এই দুই রেখাকে উত্তরোত্তর রুদ্ধ করিলে, তাহারা সংলগ্ন হইবে ; [স্বতঃ ১২ ।

অতএব কথ ও গঘ এই দুই রেখাকে উত্তরোত্তর রুদ্ধ করিলে, অবশেষে সংলগ্ন হইবে ;

কিন্তু ইহারা সমান্তর কম্পিত হওয়াতে কখনই সংলগ্ন হইতে পারে না ;

এই হেতু কছজ কোণ ছজঘ কোণের অসমান নহে, অর্থাৎ সমান ;

আবার কছজ কোণ উছথ কোণের সমান ; [১ম, ১৫ ।

অতএব উছথ কোণ ছজঘ কোণের সমান ; [স্বতঃ ১ ।

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত খছজ কোণ যোগ করিলে,

উছথ ও খছজ একত্র যোগে খছজ ও ছজঘএর যোগ-ফলের সমান হইবে ; [স্বতঃ ২ ।

আর ইহাদের মধ্যে উছথ ও খছজ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ১৩ ।

সুতরাং খছজ ও ছজঘ কোণ দ্বয়ও একত্র যোগে দুই

সম কোণের সমান ।

[স্বতঃ ১।

অতএব দুই সমান্তর ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩৫। যদি কোন সরল রেখা, দুই সমান্তর সরল রেখার মধ্যে একটীর লম্ব হয়, তবে উহা অন্যটীরও লম্ব হইবে ।

৩৬। দুই সমান্তর সরল রেখার সংযোজক অন্য কোন সরল রেখার মধ্য বিন্দু দিয়া দুইটি সমান্তর রেখা পর্য্যন্ত যদি অপর কোন সরল রেখা টানা যায়, তবে ইহাও ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে ।

৩০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য । —

যে যে সরল রেখা কোন এক সরল রেখার সমান্তর, তাহারা পরস্পর সমান্তর ।

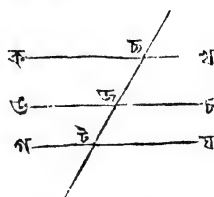
কথ ও গঘ প্রত্যেকে যেন ঙ্চএর সমান্তর; তা হইলে, কথ ও গঘ পরস্পর সমান্তর হইবে ।

ছজট সরল রেখা টান ;

ইহা যেন কথ, ঙ্চ ও

গঘকে ক্রমে ছ, জ ও ট

বিন্দুতে ছেদ করিল ।



পরে, ছজট রেখা কথ

ও ঙ্চকে ছেদ করাতে কছজ কোণ ছজচ কোণের সমান হইবে ;

[১ম, ২০

আবার ছট রেখা ঙ্চ ও গঘকে ছেদ করাতে, ছজচ কোণ জটঘ কোণের সমান ;

[১ম, ২০

তার সমপ্রমাণ হইয়াছে যে, কছট কোণ ছজচ কোণের সমান ;

অতএব কছট কোণ ছটঘ কোণের সমান ; [স্বতঃ ১।

এবং এই দুইটি একান্তর কোণ ;

সুতরাং কথ ও গঘ পরস্পর সমান্তর । [১ম, ২৭।

অতএব যে যে সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাত্ত ।

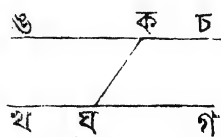
অঃ প্রঃ—৩৭। কথগঘ সমান্তরিকের পরস্পর সম্মুখীন খগ ও কঘ বাহু দ্বয় ও ও চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া যচকে গঙের সমান করিলে ও ও চ সংযুক্ত করিয়া দিলে, কথওচ একটি সমান্তরিক হইবে ।

৩১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এক নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তর এক সরল রেখা টানিতে হইবে ।

ক যেন নির্দিষ্ট বিন্দু ও খগ নির্দিষ্ট সরল রেখা ;
ক বিন্দু দিয়া খগ সরল রেখার সমান্তর এক সরল রেখা টানিতে হইবে ।

খগ রেখাতে ঘ বিন্দু
কল্পনা করিয়া কঘ সংযুক্ত
কর । কঘ রেখার ক বিন্দুতে
কঘগ কোণের সমান ঘকঙ
কোণ কর ; [১ম, ২৩।



এবং ঔক রেখাকে চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর ;

উচ সরল রেখা খগএর সমান্তর হইবে ।

উচ ও খগ দুই সরল রেখার উপর কঘ সরল রেখার
সম্পাতে, ঔকঘ ও কঘগ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান
হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন ।

উচ সরল রেখা খগএর সমান্তর । [১ম, ২৭ ।

অতএব নির্দিষ্ট ক বিন্দু দিয়া নির্দিষ্ট খগ সরল রেখার
সমান্তর ঔকচ সরল রেখা টানা হইল । এখানে ইহাই
সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ-৩৮ । একই শীর্ষকোণ বিশিষ্ট কতিপয় ত্রিভুজের
ভূমি যদি কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়, তবে যাহার ভূমি
ঐ বিন্দুতে দ্বিগুণিত হইয়াছে, সেই ত্রিভুজ সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্রতম
হইবে ।

৩৯ । কোন নির্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট সরল রেখাকে সমান তিন
অংশে বিভক্ত করিতে হইবে ।

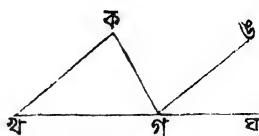
৩২ প্রতিজ্ঞা-উপপাদ্য । -

ত্রিভুজের কোন বাহু বর্দ্ধিত করিলে বহিস্থ
কোণ অন্তরস্থ দূরবর্তী কোণ দ্বয়ের সমান হইবে এবং
প্রত্যেক ত্রিভুজের অন্তরস্থ তিন কোণ একত্র যোগে
দুই সম কোণের সমান হইবে ।

কখগ ত্রিভুজের খগ বাহু যেন ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হই-
য়াছে ; তাহা হইলে বহিস্থ কগঘ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্তী
গকখ ও কখগ কোণ দ্বয়ের সমান হইবে এবং ত্রিভুজের

অন্তরস্থ কথগ, খগক ও গকথ কোণ ত্রয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে ।

গ বিন্দু দিয়া খকএর সমান্তর গঙ সরল রেখা টান । [১ম, ৩১ ।



খক সরল রেখা গঙর

সমান্তর বলিয়া, এবং তাহাদের উপর কগ সরল রেখার সম্পাত হওয়াতে, খকগ ও কগঙ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান । [১ম, ২৯ ।

আবার খক ও গঙ সরল রেখা পরস্পর সমান্তর বলিয়া, ও তাহাদের উপর খঘ রেখার সম্পাত হওয়াতে, বহিস্থ ঙগঘ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্তী কথগ কোণের সমান ; [১ম, ২৯ ।

আর কগঙ কোণ যে খকগ কোণের সমান, তাহা প্রতিপন্ন হইয়াছে ;

অতএব সমস্ত বহিস্থ কগঘ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্তী গকথ ও কথগ কোণ দ্বয়ের সমান । [স্বতঃ ২ ।

এই দুই সমান বস্তুতে কগথ কোণ যোগ করিলে, কগঘ ও কগথ কোণ একত্র যোগে কথগ, খগক ও গকথ এই তিন কোণের সমান হইবে ; [স্বতঃ ২ ।

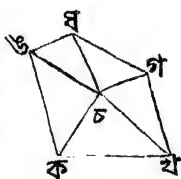
আর কগঘ ও কগথ এই দুই কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ১৩ ।

সুতরাং কথগ, খগক ও গকথ এই তিন কোণও দুই সম কোণের সমান । [স্বতঃ ১ ।

অতএব ত্রিভুজের কোণ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাত্ত।

১ অনুমান। কোন সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তরস্থ যাবতীয় কোণ ও চারি সম কোণ একত্র যোগে, ঐ ক্ষেত্রের বাহু সংখ্যার দ্বিগুণ সম কোণের সমান হইবে।

কথগঘঙ সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের অভ্যন্তরে চ বিন্দু কল্পনা করিয়া ইহার সহিত প্রত্যেক কোণিক বিন্দু সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত করিয়া দিলে, ঐ ক্ষেত্রটি যতগুলি ভুজ বিশিষ্ট, তত গুলি ত্রিভুজে বিভক্ত হইবে ;



পরে, ত্রিভুজের তিনটি কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয় বলিয়া, এবং সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র যতগুলি ভুজ বিশিষ্ট উহা ততগুলি ত্রিভুজে বিভক্ত হওয়াতে, ত্রিভুজ গুলির কোণ সমষ্টি, সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের যত ভুজ আছে, তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান হইবে ;

আর ত্রিভুজ গুলির সাধারণ শৃঙ্গ চ বিন্দুস্থ সমস্ত কোণ অর্থাৎ চারি সম কোণ ও সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের কোণ সকল একত্র যোগে ত্রিভুজ সমূহের কোণ সমষ্টির সমান হইবে ;

[১ন, ১৫, অনু ২।

সুতরাং ত্রিভুজ গুলির সমস্ত কোণ, সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সমস্ত কোণ ও চারি সম কোণের সমান ;

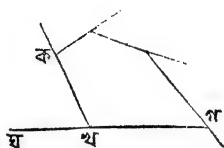
পুনশ্চ, সপ্রমাণ হইয়াছে যে, ত্রিভুজ গুলির কোণ

সকল, সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের যত ভুজ আছে, তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান ;

অতএব সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের যাবতীয় কোণ ও চারি সম কোণ একত্র যোগে, সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের যত গুলি ভুজ আছে, তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান ।

২ অনুমান । কোন সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের প্রত্যেক ভুজকে এক রূপে এক দিকে বৃদ্ধি করিলে, যে সকল বহিস্থ কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা একত্র যোগে চারি সম কোণের সমান হইবে ।

অন্তরস্থ কথগ কোণ ও
সন্নিহিত বহিস্থ কথঘ কোণ
একত্র যোগে, দুই সম কোণের
সমান বলিয়া, [১ম, ১৩।
এবং এই রূপে প্রত্যেক



অন্তরস্থ ও সন্নিহিত বহিস্থ কোণ দুই সম কোণের সমান হওয়াতে,

সমস্ত অন্তরস্থ ও সমস্ত বহিস্থ কোণ একত্র যোগে, সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের যত গুলি ভুজ আছে, তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান হইবে ;

আর পূর্ববর্তী অনুমানে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, সমস্ত অন্তরস্থ কোণ গুলি ও চারি সম কোণ একত্র যোগে, ক্ষেত্রের যত গুলি ভুজ আছে, তাহার দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান ;

অতএব সমস্ত অন্তরস্থ কোণ ও সমস্ত বহিস্থ কোণ একত্র

যোগে, সমস্ত অন্তরস্থ কোণ ও চারি সম কোণের সমান ;
এই দুই সমান বস্তু হইতে সমস্ত অন্তরস্থ কোণ বিয়োগ
করিলে, বহিস্থ কোণ সকল চারি সম কোণের সমান
হইবে । [স্বতঃ ৩।

অঃ প্রঃ—৪০। ত্রিভুজের শৃঙ্গ ও ভূমির মধ্য বিন্দু
সংযোজক রেখা ভূমির অর্ধেকের সমান হইলে, শৃঙ্গস্থ কোণ
সম কোণ, অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে সূক্ষ্ম কোণ ও ক্ষুদ্রতর
হইলে স্থূল কোণ হইবে ।

৪১। কোন পঞ্চভুজের তুজ গুলিকে উভয় পার্শ্বে বর্জিত
করিলে, তাহারা সংলগ্ন হইয়া যে যে কোণ উৎপন্ন করিবে,
তাহাদের সমষ্টি দুই সম কোণের সমান হইবে ।

৪২। ষড় ভুজের তুজ গুলিকে উভয় পার্শ্বে বর্জিত করিলে,
তাহারা সংলগ্ন হইয়া যে যে কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহাদের
সমষ্টি চারি সম কোণের সমান হইবে ।

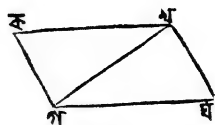
৩৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সগান ও সমান্তর সরল রেখার এক এক দিকের
দুইটি প্রান্ত যে দুই সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত হয়,
তাহারাও পরস্পর সগান ও সমান্তর হইবে ।

কথ ও গঘ যেন দুই সমান ও সমান্তর সরল রেখা
এবং তাহারা যেন এক এক দিকে কগ ও খঘ সরল রেখা
দ্বারা সংযুক্ত হইয়াছে ; তাহা হইলে কগ এবং খঘও
সমান ও সমান্তর হইবে ।

খগ সংযুক্ত কর ।

পরে, কথ সরল রেখা গ্যএর
সমান্তর বলিয়া, [কম্পনা।
এবং খগ ইহাদের সহিত
সংলগ্ন হওয়াতে,



কথগ ও খগঘ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান; [১ম, ২৯।
আর কথ, গঘএর সমান বলিয়া, [কম্পনা।
এবং খগ সরল রেখা কথগ ও ঘগথ ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ
বাহু হওয়াতে,

কথ ও খগ বাহু ক্রমে ঘগ ও গথ বাহুর সমান;
এবং সপ্রমাণ হইয়াছে যে, কথগ কোণ ঘগথ কোণের
সমান;

অতএব কগ ভূমি যথ ভূমির সমান এবং কথগ ত্রিভুজ
ঘগথ ত্রিভুজের সমান, আর সমান সমান বাহুর সম্মু-
খীন কোণ গুলি যথাক্রমে পরস্পর সমান; [১ম, ৮।

এই হেতু খগক কোণ গথঘ কোণের সমান।

আবার কগ ও খঘএর উপর গথ সরল রেখার সম্মাণ্ডে
কগথ ও গথঘ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হই-
য়াছে বলিয়া, কগ সরল রেখা খঘএর সমান্তর; [১ম, ২৭।

আর পূর্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে ইহারা সমান।

অতএব দুই সমান ও সমান্তর ইত্যাদি। এখানে ইহাই
উপপাদ্য।

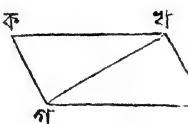
অঃ প্রঃ—৪৩। কোন ত্রিভুজের দুই বাহুর মধ্য বিন্দু দ্বয়
সংযুক্ত করিলে, যোজক রেখা তৃতীয় বাহুর সমান্তর ও তাহার
অর্ধেকের সমান হইবে।

৩৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সমান্তরিকের সম্মুখীন বাহু ও কোণ পরস্পর সমান হইয়া থাকে এবং তাহার কর্ণ রেখা তাহাকে দ্বিখণ্ড অর্থাৎ দুই সমান ভাগে বিভক্ত করে ।

কথ্য যেন এক সমান্তরিক ও খণ্ড তাহার একটি কর্ণ ; এই ক্ষেত্রের সম্মুখীন বাহু ও কোণ পরস্পর সমান হইবে এবং খণ্ড কর্ণ, ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিবে ।

কথ্য, গহ্বের সমান্তর হওয়াতে,
ও খণ্ড ইহাদের সহিত সংলগ্ন
হইয়াছে বলিয়া,
কথ্য ও খণ্ড একান্তর কোণ দ্বয়
পরস্পর সমান ; [১ম, ২৯ .



আর, কগ সরল রেখা খঘের সমান্তর হওয়াতে, ও খ ইহাদের সহিত সংলগ্ন হইয়াছে বলিয়া, কগখ ও গখ ঘ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান ; [১ম, ২৯
অতএব কথ্য ও ঘগখ এই দুই ত্রিভুজের একের কথ্য খগক কোণ দ্বয়, যথা ক্রমে অন্যের ঘগখ ও গখঘ কোণ দ্বয়ের সমান এবং সমান সমান কোণের সম্মিহিত খ রেখা উভয় ত্রিভুজের সাধারণ বাহু ;
এই হেতু অপর বাহু গুলি যথাক্রমে সমান এবং এতে তৃতীয় কোণ অন্যের তৃতীয় কোণের সমান ; অর্থ কথ্য বাহু ঘগ বাহুর, কগ বাহু ঘখ বাহুর এবং খ কোণ গঘখ কোণের সমান । [১ম, ২

আবার কথগ কোণ থগঘ কোণের এবং গথঘ কোণ
কগথ কোণের সমান বলিয়া, সমস্ত কথঘ কোণ সমস্ত
কগঘ কোণের সমান ; [স্বতঃ ২ ।

এবং থকগ কোণ যে গঘথ কোণের সমান, তাহা প্রতি-
পন্ন হইয়াছে ;

সুতরাং সমান্তরিকের সম্মুখীন বাহু ও কোণ পরস্পর
সমান ।

অনন্তর, কর্ণ রেখা ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিবে ।

কথ বাহু গঘএর সমান এবং থগ সাধারণ বাহু
বলিয়া,

কথ ও থগ বাহু ক্রমে ঘগ ও গথ বাহুর সমান ;

এবং কথগ কোণ যে ঘগথ কোণের সমান, তাহা সপ্রমাণ
হইয়াছে ;

এই হেতু কথগ ত্রিভুজ ঘগথ ত্রিভুজের সমান ; [১ম, ৪ ।

সুতরাং থগ কর্ণ রেখা কগঘথ সমান্তরিককে দুই সমান
ভাগে বিভক্ত করিয়াছে ।

অতএব সমান্তরিকের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৪৪ । সমান্তরিকের কর্ণ দ্বয় পরস্পরকে দ্বিখণ্ড
করে আর যে চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বয় পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করে,
তাহা সমান্তরিক ।

* ৪৫ । সম কোণী সমান্তরিকের কর্ণ দ্বয় পরস্পর সমান এবং
বিষম কোণী সমান্তরিকের সূক্ষ্ম কোণ দ্বয় সংযোজক কর্ণ রেখা
অপর কর্ণ অপেক্ষা বৃহত্তর ।

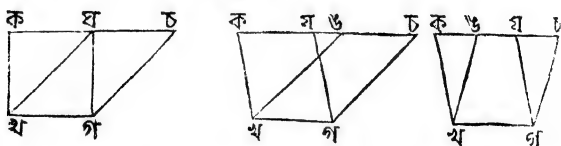
* ৪৬ । কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে কতিপয় সমান ভাগে
বিভক্ত করিতে হইবে ।

৪৭। কোন সমান্তরিকের একটি বাহু স্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক সরল রেখা টানিয়া সমান্তরিককে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে ।

৩৫ প্রতিজ্ঞা — উপপাদ্য ।

যে সকল সমান্তরিক এক ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকে, তাহারা পরস্পর সমান ।

কখগঘ ও ঙখগচ সমান্তরিক দ্বয় যেন একই খণ্ড ভূমির উপর এবং কচ ও খগ একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে ; কখগঘ সমান্তরিক ঙখগচ সমান্তরিকের সমান হইবে ।



যদি কখগঘ ও ঘখগচ সমান্তরিক দ্বয়ের খণ্ড ভূমির সম্মুখীন কঘ ও ঘচ বাহু দ্বয়ের এক এক প্রান্ত একই বিন্দুতে থাকে, তবে স্পষ্টই বোধ হইতেছে যে, প্রত্যেক সমান্তরিক ঘখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ ; [১ম, ৩৪।
সুতরাং তাহারা পরস্পর সমান । [স্বতঃ ৬।

কিন্তু যদি কখগঘ ও ঙখগচ সমান্তরিক দ্বয়ের খণ্ড ভূমির সম্মুখীন কঘ ও ঙচ বাহু দ্বয়ের এক এক প্রান্ত একই বিন্দুতে না থাকে, তবে কখগঘ ক্ষেত্রটী সমান্তরিক হওয়াতে, কঘ সরল রেখা খগএর সমান ; [১ম, ৩৪।

এই কারণে, উচ সরল রেখা খণ্ডের সমান ;

অতএব কঘ সরল রেখা উচএর সমান ; [স্বতঃ ১।

এই হেতু সমস্ত বা অবশিষ্ট কঙ, সমস্ত বা অবশিষ্ট ঘচএর সমান ; [স্বতঃ ২ অথবা ৩।

আর কখ বাহু ঘগ বাহুর সমান ; [১ম, ৩৪।

অতএব ঙক ও কখ এই দুই বাহু যথাক্রমে চঘ ও ঘগ এই দুই বাহুর সমান ;

এবং বহিস্থ চঘগ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্তী ঙকখ কোণের সমান ; [১ম, ২৯।

এই হেতু ঙখ ভূমি চগ ভূমির এবং ঙকখ ত্রিভুজ চঘগ ত্রিভুজের সমান । [১ম, ৪।

কখগচ বিষম চতুর্ভুজ হইতে চঘগ ত্রিভুজ এবং ঐ বিষম চতুর্ভুজ হইতে ঙকখ ত্রিভুজ বিয়োগ কর ; তাহা হইলে অবশিষ্ট ক্ষেত্র গুলি সমান হইবে ; [স্বতঃ ৩।

অর্থাৎ কখগঘ সমান্তরিক ঙখগচ সমান্তরিকের সমান হইবে ।

অতএব যে সকল সমান্তরিক ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৪৮। সমান সমান সমান্তরিক একই ভূমির উপর এক দিকে থাকিলে একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকিবে ।

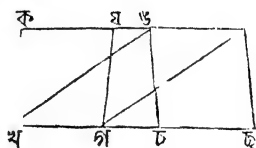
- ৪৯। কখগ ত্রিভুজের কখ ও কগ বাহুর উপর কখঘঙ ও কগচছ সমান্তরিক অঙ্কিত কর এবং ঘঙ ও চছকে বর্ধিত করিয়া জ বিন্দুতে মিলাইয়া দাও ; তাহা হইলে কখ ও কঘএর উপর অঙ্কিত সমান্তরিক দ্বয়ের সমষ্টি খগ ভূমির ও কজএর অন্তর্গত সমান্তরিকের সমান হইবে ।

৩৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যে সকল সমান্তরিক সমান সমান ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকে তাহারা পরস্পর সমান ।

কথগঘ ও উচছজ সমান্তরিক দ্বয় যেন খগ ও চছ সমান সমান ভূমির উপর এবং কজ ও খছ একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে ; কথগঘ সমান্তরিক উচছজ সমান্তরিকের সমান হইবে ।

খঙ ও গজ সংযুক্ত কর ।
পরে, খগ ভূমি চছএর
সমান বলিয়া, [কম্পনা ।
এবং চছ, উজএর সমান



হওয়াতে, [১ম, ৩৪ ।

খগ, উজএর সমান ; [স্বতঃ ১ ।

এবং ইহারা পরস্পর সমান্তর, [কম্পনা ।

ও তাহাদের এক এক পার্শ্বের দুইটি প্রান্ত খঙ ও গজ সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত হইয়াছে ;

আর সমান ও সমান্তর সরল রেখা দ্বয়ের এক এক পার্শ্বের দুইটি প্রান্ত যে দুই সরল রেখা দ্বারা সংযুক্ত হয়, তাহারাও পরস্পর সমান ও সমান্তর হইয়া থাকে । [১ম, ৩৩ ।

এই হেতু খঙ ও গজ সরল রেখা দ্বয় সমান ও সমান্তর ;

অতএব খঙজগ একটা সমান্তরিক ; [সং, ক ।

এবং ইহা কথগঘ সমান্তরিকের সমান, কেননা উভয়

একই খণ্ড ভূমির উপর এবং একই খণ্ড ও কজ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত । [১ম, ৩৫ ।

এইরূপে সমপ্রমাণ হইবে যে, ঊচছজ সমান্তরিক ঊখণ্ডজ সমান্তরিকের সমান ;

সুতরাং কখগঘ সমান্তরিক ঊচছজ সমান্তরিকের সমান হইল । [স্বতঃ ১ ।

অতএব যে সকল সামান্তরিক ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৫০ । কখগঘ একটি বিষম চতুর্ভুজের কঘ ও খগ বাহু দ্বয় সমান্তর ; প্রমাণ কর যে, কঘ ও খগএর সমষ্টির অর্ধেক পরিমিত ভূমি বিশিষ্ট একটি সামান্তরিক কঘ ও খগ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে স্থাপিত হইলে, তাহা বিষম চতুর্ভুজের সমান হইবে ।

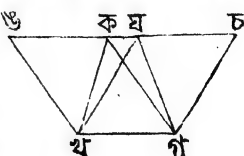
৩৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যে সকল ত্রিভুজ এক ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকে, তাহার পরস্পর সমান ।

কখগ ও ঘখগ ত্রিভুজ দ্বয় যেন একই খণ্ড ভূমির উপর এবং একই কঘ ও খগ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে ; কখগ ত্রিভুজ ঘখগ ত্রিভুজের সমান হইবে ।

কঘ সরল রেখার উভয় পার্শ্ব ঊ ও চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর ; [স্বীঃ ২ ।

খ বিন্দু দিয়া গক সরল



রেখার সমান্তর খণ্ড এবং গ বিন্দু দিয়া খঘএর সমান্তর গচ সরল রেখা টান । [১ম, ৩১ ।

পরে, ঔখগক ও ঘখগচ প্রত্যেক ক্ষেত্র সমান্তরিক হওয়াতে, ও তাহারা একই খগ ভূমির উপর এবং একই খগ ও ঔচ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে বলিয়া, পরস্পর সমান ; [১ম, ৩৫ ।

আর কখ কর্ণ রেখা ঔখগক সমান্তরিককে দ্বিখণ্ড করিতেছে বলিয়া, [১ম, ৩৪ ।

কখগ ত্রিভুজ ঔখগক সামান্তরিকের অর্দ্ধেক ;

এবং ঘগ কর্ণ রেখা ঘখগচ সমান্তরিককে দ্বিখণ্ড করিতেছে বলিয়া, [১ম, ৩৪ ।

ঘখগ ত্রিভুজ ঘখগচ সমান্তরিকের অর্দ্ধেক ;

আবার যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর অর্দ্ধ তাহারা পরস্পর সমান ; [স্বতঃ ৭ ।

সুতরাং কখগ ত্রিভুজ ঘখগ ত্রিভুজের সমান ।

অতএব যে সকল ত্রিভুজ ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

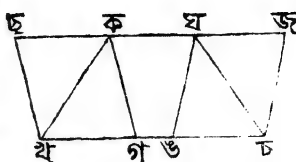
অঃ প্রঃ—৫১ । কোন বিষম চতুর্ভুজের সমান এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

৩৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যে সকল ত্রিভুজ সমান সমান ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকে, তাহারা পরস্পর সমান ।

কথগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয় যেন সমান সমান
খগ ও ঙচ ভূমির উপর এবং একই খচ ও কঘ সমান্তর রেখা
দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে ; কথগ ত্রিভুজ ঘঙচ
ত্রিভুজের সমান হইবে ।

কথ সরল রেখাকে
উভয় পাশ্বে ছ ও জ
পর্যন্ত বৃদ্ধি কর; থ বিন্দু
দিয়া গকএর সমান্তর খছ
রেখা এবং চ বিন্দু দিয়া



ঙঘএর সমান্তর চজ রেখা টান ।

[১ম, ৩১।

পরে, ছথগক ও ঘঙচজ প্রত্যেক ক্ষেত্র সমান্তরিক
হওয়াতে,

[২ম, ক।

আর সমান সমান খগ ও ঙচ ভূমির উপর এবং একই খচ
ও ছজ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে
বলিয়া, পরস্পর সমান,

[১ম, ৩৬।

এবং কথ কর্ণ রেখা ছথগক সমান্তরিককে দ্বিখণ্ড করি-
তেছে বলিয়া,

[১ম, ৩৪।

কথগ ত্রিভুজ ছথগক সমান্তরিকের অর্ধেক ;

এবং ঘচ কর্ণ রেখা ঘঙচজ সমান্তরিককে দ্বিখণ্ড করিতেছে
বলিয়া,

[১ম, ৩৪।

যঙচ ত্রিভুজ ঘঙচজ সমান্তরিকের অর্ধেক ;

আর যে সকল বস্তু প্রত্যেকে কোন এক বস্তুর অর্ধ তাহারা
পরস্পর সমান ;

[স্বতঃ ৭।

সুতরাং কথগ ত্রিভুজ যঙচ ত্রিভুজের সমান ।

অতএব যে সকল ত্রিভুজ ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৫২ । কোন ত্রিভুজের এক বাহুস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে একটি রেখা টানিয়া ত্রিভুজটিকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে ।

৫৩ । কথগম সমান্তরিকের ক ও গ কোণিক বিন্দু হইতে খগ কর্ণস্থিত কোন নির্দিষ্ট ও বিন্দু পর্য্যন্ত কঙ ও গঙ দুই সরল রেখা টানিলে, কঘঙ ত্রিভুজ গঘঙ ত্রিভুজের সমান হইবে ।

৩৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

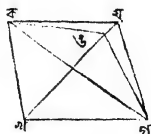
সমান সমান ত্রিভুজ এক ভূমির এক দিকে থাকিলে, একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইবে ।

কথগ ও ঘখগ এই দুই সমান ত্রিভুজ যেন খগ ভূমির এক দিকে অবস্থিত হইয়াছে ; ইহারা একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকিবে ।

কঘ সংযুক্ত কর ।

কঘ, খগএর সমান্তর হইবে ।

যদি সমান্তর না হয়, তবে



ক বিন্দু দিয়া খগএর সমান্তর কঙ রেখা টান, [১ম, ৩১ এবং ঙগ সংযুক্ত কর ।

পরে, খগ ভূমির উপর এবং একই খগ ও কঙ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে কথগ ও ঙখগ ত্রিভুজ দ্বয় থাকাতে, ইহারা পরস্পর সমান ; [১ম, ৩৭ ।

আবার কথগ ত্রিভুজ যথগ ত্রিভুজের সমান; [কম্পনা ।
 অতএব যথগ ত্রিভুজ ঔথগ ত্রিভুজের সমান, [স্বতঃ ১ ।
 অর্থাৎ রহস্তর ক্ষুদ্রতরের সমান ;
 কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ;
 অতএব কঙ সরল রেখা থগএর সমান্তর নহে ।
 এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, কঘ ব্যতীত অন্য কোন রেখা
 ক বিন্দু দিয়া টানিলে, তাহা থগএর সমান্তর হইবে না ;
 সুতরাং কঘ সরল রেখা থগএর সমান্তর ।
 অতএব সমান সমান ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৫৪ । কথগঘ বিষম চতুর্ভুজের কগ ও থঘ কর্ণ দ্বয়
 পরস্পর ও বিন্দুতে ছেদ করিলে, যদি কঙঘ ত্রিভুজ গঙঘ ত্রিভু-
 জের সমান হয়, তবে কথ বাহু ঘগ বাহুর সমান্তর হইবে ।

৫৫ । কোন বিষম চতুর্ভুজের প্রত্যেক বাহু দ্বিখণ্ড করিয়া
 পরস্পর নিকটবর্তী দুইটি দুইটি মধ্য বিন্দু সংযুক্ত করিলে,
 তদ্বারা যে চতুর্ভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহা সমান্তরিক ও বিষম
 চতুর্ভুজের অর্ধেক ।

৪০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সমান সমান ত্রিভুজ এক রেখাস্থ সমান সমান ভূমির
 এক দিকে থাকিলে, একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে
 অবস্থিত হইবে ।

কথগ ও ঘঙচ দুই সমান ত্রিভুজ এক রেখাস্থ সমান
 সমান থগ ও ঙচ ভূমির এক দিকে অবস্থিত হইয়াছে ;
 ইহারা একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকিবে ।

কঘ সংযুক্ত কর।

কঘ, খচএর সমান্তর হইবে।

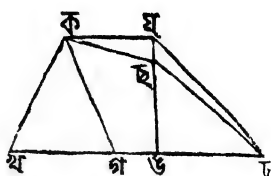
যদি সমান্তর না হয়,

তবে ক বিন্দু দিয়া খচএর

সমান্তর কছ রেখা টান

[১ম, ৩১।

এবং ছচ সংযুক্ত কর।



পরে, কখগ ও ছগচ ত্রিভুজ সমান সমান খগ ও গচ ভূমির উপর এবং একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হওয়াতে, পরস্পর সমান ;

[১ম, ৩৮।

আর কখগ ত্রিভুজ ঘগচ ত্রিভুজের সমান ; [কম্পনা।

অতএব ঘগচ ত্রিভুজ ছগচ ত্রিভুজের সমান। [স্বতঃ ১।

অর্থাৎ রহস্তর ক্ষুদ্রতরের সমান ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ;

অতএব কছ, খচএর সমান্তর নহে।

এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে কঘ ব্যতীত অন্য কোন সরল রেখা ক বিন্দু দিয়া টানিলে খচএর সমান্তর হইবে না।

সুতরাং কঘ, খচএর সমান্তর।

অতএব সমান সমান ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৫৩। সমান সমান ত্রিভুজ একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকিলে, সমান সমান ভূমির উপর অবস্থিত হইবে।

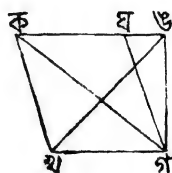
৪১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

একটি সমান্তরিক ও একটি ত্রিভুজ এক ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে থাকিলে, সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্রটি ত্রিভুজের দ্বিগুণ হইবে ।

কথগঘ সমান্তরিক ও ঙখগ ত্রিভুজ যেন একই খগ ভূমির উপর এবং একই খগ ও কঙ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে ; কথগঘ সমান্তরিক ঙখগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ হইবে ।

কগ সংযুক্ত কর ।

পরে, কথগ ও ঙখগ ত্রিভুজ একই খগ ভূমির উপর এবং একই খগ ও কঙ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অব-



স্থিত হওয়াতে, পরস্পর সমান হইয়াছে ; [১ম, ৩৭ ।

আর কগ কর্ণ কথগঘ সমান্তর রৈখিক ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করাতে, [১ম, ৩৪ ।

কথগঘ সমান্তরিক কথগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ ;

সুতরাং কথগঘ সমান্তরিক ঙখগ ত্রিভুজেরও দ্বিগুণ ;

অতএব একটি সমান্তরিক ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৫৭ । কোন সমান্তরিকের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে চারিটি কৌণিক বিন্দু পর্য্যন্ত চারি রেখা টানিলে সম্মুখীন বাহু দ্বয়ের উপর যে দুইটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হয়, তাহারা একত্র যোগে সমান্তরিকের অর্ধেক হইবে ।

তাহারা একই ঙ্গ ভূমির উপর এবং একই ঙ্গ ও কছ সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত । [১ম, ৪১ ।

সুতরাং চঙগছ সমান্তর তৈখিক ক্ষেত্র কথগ ত্রিভুজের সমান ; [স্বতঃ ২ ।

এবং ইহার একটা গঙচ কোণ য কোণের সমান । [অঙ্কন ।
অতএব কথগ ত্রিভুজের সমান ও য কোণের সমান একটা কোণ বিশিষ্ট চঙগছ সমান্তরিক অঙ্কিত হইল ।
এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

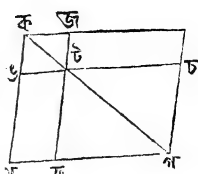
অঃ প্রঃ—৫৮ । এক নির্দিষ্ট সমান্তরিকের সমান ও কোন নির্দিষ্ট সরল তৈখিক কোণের সমান একটা কোণ বিশিষ্ট, এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

৪৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যে সকল ক্ষেত্র কোন সমান্তরিকের অভ্যন্তরীণ ও কর্ণের পরিতঃস্থ, তাহাদের অনুপূরক ক্ষেত্র গুলি পরস্পর সমান ।

কথগয যেন কোন সমান্তরিক ও কগ ইহার কর্ণ ;
ঙজ ও ছচ, কর্ণের পরিতঃস্থ সমান্তরিক অর্থাৎ এই দুই ক্ষেত্রের অভ্যন্তর ভেদ করিয়া কগ কর্ণ যাইতেছে এবং খট ও টঘ অন্য দুই সমান্তরিক ; এই দুইটা সমস্ত কথগয ক্ষেত্রের অবশিষ্ট অংশ পূর্ণ করিতেছে ; এজন্য ইহাদিগকে অনুপূরক ক্ষেত্র বলে ; খট অনুপূরক ক্ষেত্র টঘ অনুপূরক ক্ষেত্রের সমান হইবে ।

কথগঘ একটি সমান্তর ত্রৈখিক
ক্ষেত্র ও কগ ইহার কর্ণ বলিয়া,
কথগ ত্রিভুজ কঘগ ত্রিভুজের
সমান । [১ম, ৩৪ ।



আর কঙটজ একটি সমান্তরিক
ও কট ইহার কর্ণ বলিয়া, কঙট ত্রিভুজ কজট
ত্রিভুজের সমান । [১ম, ৩৪ ।

এই রূপে টছগ ত্রিভুজ টচগ ত্রিভুজের সমান ;
অতএব কঙট ত্রিভুজ কজট ত্রিভুজের এবং টছগ ত্রিভুজ
টচগ ত্রিভুজের সমান হওয়াতে, কঙট ও টছগ ত্রিভুজ-
দ্বয়ের যোগ ফল কজট ও টচগ ত্রিভুজ দ্বয়ের যোগফলের
সমান ; [স্বতঃ ২ ।

আর সমস্ত কথগ ত্রিভুজ সমস্ত কঘগ ত্রিভুজের সমান ;
সুতরাং অবশিষ্ট খট অনুপূরক ক্ষেত্র অবশিষ্ট টঘ
অনুপূরক ক্ষেত্রের সমান । [স্বতঃ ৩ ।

অতএব যে সকল ক্ষেত্র ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

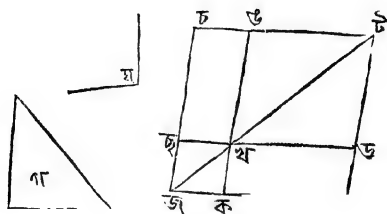
অঃ প্রঃ—৫২ । প্রথম অধ্যায়ের ৪৩ প্রতিজ্ঞার চিত্রে ওজ,
খঘ ও ছচ সংযুক্ত করিলে, এই তিনটি কর্ণ পরস্পর সমান্তর
হইবে ।

৪৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান ও কোন নির্দিষ্ট সরল
দ্বৈখিক কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট একটি

সমান্তরিক, কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর স্থাপন করিতে হইবে।

কথ যেন নির্দিষ্ট সরল রেখা, গ নির্দিষ্ট ত্রিভুজ এবং ঘ নির্দিষ্ট সরল ত্রৈখিক কোণ ; গ ত্রিভুজের সমান ও ঘ কোণের সমান একটি কোণ বিশিষ্ট এক সমান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে।



গ ত্রিভুজের সমান ও ঘ কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট খঙচছ সমান্তরিক এরূপে অঙ্কিত কর, যেন খঙ ও কথ একই রেখা হয় ; [১ম, ৪২।

চছ বাহুকে জ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর ;

ক বিন্দু দিয়া খছ বা ঙচএর সমান্তর কজ সরল রেখা গান ; [১ম, ৩১।

এবং জখ সংযুক্ত কর।

পরে, জক ও চঙ সমান্তর রেখা দ্বয়ের উপর জচ রেখার পাত হওয়াতে,

ঙচজ ও চজক কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ২৯।

অতএব খজচ ও জচঙ কোণ দ্বয় একত্রযোগে দুই সম কোণ
অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

আর কোন দুই সরল রেখার সহিত অন্য এক সরল রেখার
সম্পাত হইলে, তাহার এক দিকের দুই অন্তরস্থ কোণ
যদি একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্র হয়, তবে
যে দিকের দুইটা কোণ সমষ্টি দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্র,
সেই দিকে এই দুই রেখাকে উত্তরোত্তর রুদ্ধ করিলে,
অবশেষে তাহারা সংলগ্ন হইবে । [স্বতঃ ১২ ।

এই হেতু জখ ও চঙ এই দুই সরল রেখাকে রুদ্ধ করিলে
সংলগ্ন হইবে ;

ইহারা যেন ট বিন্দুতে সংলগ্ন হইল ।

ট বিন্দু দিয়া ঙক বা চজ সরল রেখার সমান্তর টঠ সরল
রেখা টান : [১ম, ৩১ ।

এবং জক ও ছথকে ঠ ও ড পর্যন্ত রুদ্ধ কর ;

তাহা হইলে জঠটচ একটা সমান্তরিক, জট ইহার
কর্ণ, কছ ও ডঙ কর্ণের পরিতঃস্থ সমান্তরিক আর ঠথ ও
খচ দুইটা অনুপূরক ক্ষেত্র হইবে ;

অতএব ঠথ, খচএর সমান ; [১ম, ৪৩ ।

আর খচ ক্ষেত্র গ ত্রিভুজের সমান ; [অঙ্কন ।

এই হেতু ঠথ ক্ষেত্রও গ ত্রিভুজের সমান । [স্বতঃ ১ ।

আবার ছথঙ কোণ তাহার প্রতীপ কখড কোণের সমান
হওয়াতে, [১ম, ১৫ ।

এবং ঘ কোণের সমান বলিয়া, [অঙ্কন ।

কখড কোণও ঘ কোণের সমান । [স্বতঃ ১ ।

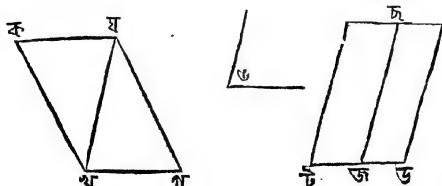
অতএব গা ত্রিভুজের সমান এবং ঘা কোণের সমান একটি কোণ বিশিষ্ট ঠাখ সমান্তরিক, কখ রেখার উপর অঙ্কিত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৬০ । এক নির্দিষ্ট সমান্তরিকের সমান ও নির্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান একটি কোণ বিশিষ্ট এক ত্রিভুজ, কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর অঙ্কিত করিতে হইবে ।

৪৫ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

এক নির্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান এবং কোন নির্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান একটি কোণ "বিশিষ্ট এক সমান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে ।

কখগঘ" যেন নির্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্র এবং ঙ নির্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ ; কখগঘ ক্ষেত্রের সমান এবং ঙ কোণের সমান একটি কোণ বিশিষ্ট এক সমান্তরিক অঙ্কিত করিতে হইবে ।



খঘ সংযুক্ত কর, এবং কঘখ ত্রিভুজের সমান চজ সমান্তরিক এরূপে অঙ্কিত কর, যেন চটজ কোণ ঙ কোণের সমান হয় ;

[১ম, ৪২ ।

আর ছজ রেখার উপর যথগ ত্রিভুজের সমান ছড সমান্তরিক এক্রুপে অঙ্কিত কর যেন ছজড কোণ ও কোণের সমান হয়। [১ম, ৪৪।

চটডঠ ক্ষেত্র সম্পাদ্য সমান্তরিক।

চটজ ও ছজড কোণ দ্বয় প্রত্যেকে ও কোণের সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

ইহারাও পরস্পর সমান। [স্বতঃ ১।

এই দুই সমান বস্তুতে টজছ কোণ যোগ করিলে, চটজ ও টজছ কোণ দ্বয় একত্র যোগে টজছ ও ছজড কোণ দ্বয়ের সমান হইবে; [স্বতঃ ২।

ইহাদের মধ্যে চটজ ও টজছ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; [১ম, ২৯।

অতএব টজছ এবং ছজড কোণ দ্বয়ও একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান;

আর ছজ সরল রেখার জ বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে টজ ও ডজ সংলগ্ন হইয়া সম্বিহিত কোণ দ্বয়কে দুই সম কোণের সমান করিতেছে বলিয়া, টজ ও ডজ একই সরল রেখা হইবে। [১ম, ১৪।

আবার, টড ও চছ সমান্তর রেখা দ্বয়ের সহিত জছ সরল রেখা সংলগ্ন হওয়াতে, ডজছ ও জছচ একান্তর কোণ দ্বয় পরস্পর সমান; [১ম, ২৯।

এই দুই সমান বস্তুতে জছঠ কোণ যোগ করিলে, ডজছ ও জছঠ কোণ দ্বয় চছজ ও জছঠ কোণ দ্বয়ের সমান; [স্বতঃ ২।

ইহাদের মধ্যে ডজছ ও জছঠ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ২৯ ।

অতএব চছজ ও জছঠ এই দুই কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ;

এই হেতু চছ ও ছঠ একই সরল রেখা । [১ম, ১৪ ।

আবার, টচ রেখা জছএর এবং জছ রেখা ডঠএর সমান্তর বলিয়া,

টচ রেখা ডঠএর সমান্তর ; [১ম, ৩০ ।

এবং চঠ ও টড পরস্পর সমান্তর সমপ্রমাণ হইয়াছে ;

এই হেতু চটডঠ ক্ষেত্র একটি সমান্তরিক ; [সংজ্ঞা, ক

আর কথখ ত্রিভুজ চজ ক্ষেত্রের সমান বলিয়া, [অঙ্কন ।

এবং ঘখগ ত্রিভুজ ছড ক্ষেত্রের সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।

সমস্ত কথগঘ সরল তৈখিক ক্ষেত্র সমস্ত চটডঠ সমান্তরিকের সমান । [স্বতঃ ২ ।

অতএব কথগঘ সরল তৈখিক ক্ষেত্রের সমান এবং ট কোণের সমান চটড কোণ বিশিষ্ট চটডঠ সমান্তরিক অঙ্কিত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অনুমান । এক নির্দিষ্ট সরল তৈখিক ক্ষেত্রের সমান এবং কোন নির্দিষ্ট সরল তৈখিক কোণের সমান একটি কোণ বিশিষ্ট এক সমান্তরিক, কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর কি রূপে স্থাপন করা যায়, তাহা মূল প্রতিজ্ঞা হইতে সহজেই বোধ হইবে ; প্রথমত, নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর কথঘ ত্রিভুজের সমান ও নির্দিষ্ট কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এক সমান্তরিক স্থাপন করিয়া

পূৰ্ণ রূপ চিত্র অঙ্কিত করিলেই ইহা সিদ্ধ হইবে।

[১ম, ৪৪।

অঃ প্রঃ—৩১। কোন নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের সমান একটি রম্বস অঙ্কিত করিতে হইবে।

৪৬ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

কথ যেন নির্দিষ্ট সরল রেখা ; কথএর উপর এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ক বিন্দু হইতে কথএর
সহিত সম কোণ করিয়া কগ গ
সরল রেখা টান ; [১ম, ১১। ঘা
এবং কগ হইতে কথএর সমান
কঘ অংশ ছেদ কর ; ১ম, ৩।
ঘ বিন্দু দিয়া কথএর সমান্তর
ঘঙ রেখা এবং খ বিন্দু দিয়া ক
কথএর সমান্তর খঙ রেখা টান। [১ম, ৩১।
কঘঙখ সম্পাদ্য সমচতুর্ভুজ।

কঘঙখ ক্ষেত্র একটি সমান্তরিক হওয়াতে, [অঙ্কন।
কথ, ঘঙর এবং কঘ, খঙর সমান ; [১ম, ৩৪।
আর কথ, কঘএর সমান ; [অঙ্কন।
অতএব খক, কঘ, ঘঙ ও ঙখ এই চারি সরল রেখা
পরস্পর সমান ; [স্বতঃ ১।

সুতরাং কথ্যুথ সমান্তরিকটী সমবাহু ।

আর এই ক্ষেত্রের কোণ গুলি প্রত্যেকে সম কোণ ;

কেননা, কথ ও ঘঙ সমান্তর রেখা দ্বয়ের সহিত কঘ রেখার
সম্পাত হওয়াতে, থকঘ ও কঘঙ কোণ দ্বয় একত্র যোগে
দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ২৯ ।

ইহাদের মধ্যে থকঘ এক সম কোণ ; [অঙ্কন ।

এই হেতু কঘঙ কোণও এক সম কোণ ; [স্বতঃ ৩ ।

আর সমান্তরিকের সম্মুখীন কোণ পরস্পর সমান হইয়া
থাকে বলিয়া, [১ম, ৩৪ ।

কথঙ ও থঙঘ প্রত্যেকে সম কোণ ;

অতএব কঘঙুথ ক্ষেত্র সমকোণী ;

এবং ইহা যে সমবাহু, তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে ।

অতএব ইহা একটী সমচতুর্ভুজ ; [সং ৩৩ ।

এবং কথ নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত হইয়াছে । এখানে
ইহাই সম্পাদ্য ।

অনুমান । এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তি হইতে সহজেই
বোধ হইবে যে, কোন সমান্তরিকের একটী কোণ সম কোণ
হইলে অবশিষ্ট কোণ গুলিও প্রত্যেকে সম কোণ হইবে ।

অঃ প্রঃ—৩২ । কোন নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের চতুর্গুণ আর
এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

৪৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

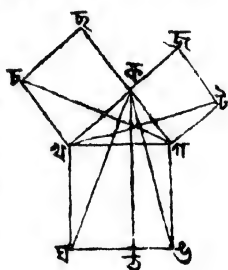
সমকোণী ত্রিভুজের সম কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, সম কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান ।

কথগ সমকোণী ত্রিভুজের খকগ কোণ যেন সম কোণ ; খগ বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ খক ও কগ বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

খগএর উপর খঘঙগ সম-
চতুর্ভুজ এবং খক ও কগএর উপর
খছ ও গজ সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত
কর ; [১ম, ৪৬।

ক বিন্দু দিয়া খঘ বা গঙর সমান্তর
কঠ রেখা টান ; [১ম, ৩১।

এবং কঘ ও গচ সংযুক্ত কর ।



পরে, খকগ কোণ সম কোণ হওয়াতে, [কম্পনা ।
এবং খকছ কোণও সম কোণ বলিয়া, [সং ৩০ ।
কথএর ক বিন্দুতে পরস্পর বিপরীত দিকে, কছ ও কগ
সরল রেখা দ্বয় সংলগ্ন হইয়া যে দুই সরলিহিত কোণ উৎপন্ন
করিয়াছে, তাহারা দুই সম কোণের সমান ;
অতএব কছ ও কগ এই দুইটি একই সরল রেখা ; [১ম, ১৪।
এই কারণে কখ.ও কজ এই দুইটিও এক সরল রেখা ।

একণে, যখগ কোণ কখচ কোণের সমান ; কেননা

উভয়েই সম কোণ ; [স্বতঃ ১১ ।

প্রত্যেকের সহিত কথগ কোণ যোগ করিলে,
সমস্ত যথক কোণ, সমস্ত চথগ কোণের সমান ; [স্বতঃ ২ ।
আর কথ ও থয এই দুই বাহু যথাক্রমে চথ ও থগ দুই
বাহুর সমান বলিয়া, [সং ৩০ ।

এবং যথক কোণ গথচ কোণের সমান হওয়াতে,
কয ভূমি চগ ভূমির সমান এবং কথয ত্রিভুজ চথগ
ত্রিভুজের সমান । [১ম, ৪ ।

আবার খঠ সমান্তরিক কথয ত্রিভুজের দ্বিগুণ ;
কেননা ইহার একই থয ভূমির উপর এবং একই থয ও কঠ
সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে ; [১ম, ৪১ ।
এবং খছ সমচতুর্ভুজ চথগ ত্রিভুজের দ্বিগুণ ; কেননা,
ইহার একই চথ ভূমির উপর এবং একই চথ ও ছগ
সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যে অবস্থিত হইয়াছে ;
আর যে সকল বস্তু সমান সমান বস্তুর দ্বিগুণ তাহার
পরস্পর সমান ; [স্বতঃ ৬ ।

এই হেতু খঠ সমান্তরিক খছ সমচতুর্ভুজের সমান ।

এই রূপে, কঙ ও খঠ সংযুক্ত করিলে সপ্রমাণ হইবে
য, গঠ সমান্তরিক গজ সমচতুর্ভুজের সমান ।

অতএব সমস্ত থযঙগ সমচতুর্ভুজ ছথ ও জগ এই দুই
সমচতুর্ভুজের সমান ; [স্বতঃ ২ ।

এবং থযঙগ সমচতুর্ভুজ থগ রেখার উপর আর ছথ ও
জগ সমচতুর্ভুজ দ্বয়, থক ও কগ বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত
হইয়াছে ।

সুতরাং খগ বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, খক ও কগ বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ।

অতএব সমকোণী ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।*

অঃ প্রঃ—৩৩। কতিপয় সমচতুর্ভুজের সমান একটি সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

৩৪। কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে ভূমির উপর লম্ব পাত করিলে, ভূমির দুই খণ্ডের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের অন্তর, অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের অন্তরের সমান হইবে ।

৩৫। কখগ সমকোণী ত্রিভুজের যদি ক কোণ সম কোণ হয় এবং খ ও গ বিন্দু হইতে খঙ ও গচ রেখা সম্মুখীন বাহু দ্বয়ের মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত টানা যায়, তবে $৪(খঙ^২ + গচ^২) = ৫খগ^২$ ।

৩৬। রস্বসের চারি বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ চতুর্ফর, কগ দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুইটি সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

৩৭। কোন সূক্ষাকোণী ত্রিভুজের সূক্ষ্ম কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ সূক্ষ্ম কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা ক্ষুদ্র হইবে ।

৩৮। কোন স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূল কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, স্থূল কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা বৃহৎ হইবে ।

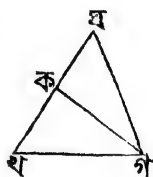
* সমকোণী ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলি ছয় প্রকারে স্থাপন করা যায় ; অতএব এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তিও অন্তত ছয় প্রকারে সম্পন্ন হইতে পারে । (পরিশিষ্ট দেখ ।)

৪৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত সম চতুর্ভুজ যদি অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত সম চতুর্ভুজ দ্বয়ের সগাণ হয়, তবে এই দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ সম কোণ হইবে ।

কথগ ত্রিভুজের থগ বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ যেন থক ও কগ বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান ; থকগ কোণ সম কোণ হইবে ।

• ক বিন্দু হইতে কগএর সহিত সম কোণ করিয়া কঘ রেখা টান , [১ম, ১১।
কঘকে কথএর সমান কর ; [১ম, ৩।
এবং ঘগ সংযুক্ত কর ।



পরে ঘক সরল রেখা থকএর সমান হওয়াতে,
ঘকএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ থকএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান ;
এই দুই সমান বস্তুতে কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে,
যক ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়, থক ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান হইবে ; [স্বতঃ ২।
আর ঘকগ সম কোণ হওয়াতে,
ঘগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ঘক ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান , [১ম, ৪৭।

এবং কল্পিত হইয়াছে যে, খগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ থক ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ঘয়ের সমান ;

এই হেতু ঘগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ খগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান ;

অতএব ঘগ বাহু খগ বাহুর সমান ।

আবার যক বাহু কথ বাহুর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।
এবং কগ বাহু যকগ ও থকগ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু বলিয়া,

যক ও কগ বাহু দ্বয় ক্রমে থক ও কগ বাহু দ্বয়ের সমান
আর ঘগ ভূমি খগ ভূমির সমান সপ্রমাণ হইয়াছে ;

অতএব যকগ কোণ থকগ কোণের সমান । [১ম, ৮ ।

ইহাদের মধ্যে যকগ এক সম কোণ ; [অঙ্কন ।

সুতরাং থকগও এক সম কোণ ।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাত্ত ।

অঃ প্রঃ—৩৯ । কথগ ত্রিভুজের যদি খগ বাহু কথএর ত্রিগুণ হয় ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ কথএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের ত্রিগুণ হয়, তবে থকগ সম কোণ হইবে ।

৭০। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দুই প্রান্ত হইতে দুই বাহুর উপর লম্ব টানিলে, ইহাদের প্রত্যেকে ভূমির সহিত যে কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহা শীর্ষ কোণের অর্ধেক হইবে।

৭১। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার দুই দিকে দুইটি বিন্দু নির্দিষ্ট আছে; এই রেখার যে কোন বিন্দু হইতে ঐ দুইটি বিন্দু পর্য্যন্ত দুই সরল রেখা টানিলে, যদি তাহারা সমান হয়, তবে প্রথমোক্ত দুই বিন্দু সংযোজক রেখা, নির্দিষ্ট রেখা দ্বারা লম্ব-ভাবে দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৭২। বহিস্ক কোন বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার সহিত এক নির্দিষ্ট কোণ করিয়া একটি রেখা টানিতে হইবে।

৭৩। কোন ত্রিভুজের দুইটি বাহু ও তাহাদের মধ্যে একটির সম্মুখীন কোণ নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর এবং প্রতিপন্ন কর যে, এক্ষণে ত্রিভুজ একটি বা দুইটি অঙ্কিত হইবে অথবা প্রকার ভেদে, তদ্রূপ ত্রিভুজ অঙ্কিত করা অসম্ভব হইবে।

৭৪। কোন নির্দিষ্ট রেখার এক দিকে দুইটি বিন্দু নির্দিষ্ট আছে; এই দুই বিন্দু হইতে এমন দুই রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহারা নির্দিষ্ট রেখার একই বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়া তাহার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে।

৭৫। কোন সমচতুর্ভুজের কর্ণ নির্দিষ্ট আছে; সমচতুর্ভুজটি অঙ্কিত কর।

৭৬। কোন চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বয়ের সমষ্টি, তাহাদের ছেদ বিন্দু ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু হইতে ক্ষেত্রের কৌণিক বিন্দুগুলি পর্য্যন্ত অঙ্কিত চারি রেখার সমষ্টি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

৭৭। কোন বৃত্তের কেন্দ্র নির্দিষ্ট আছে; কম্পাস দ্বারা পরিধিস্থ বিপরীত দুই বিন্দু স্থির কর।

৭৮। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট পরিমাণ বিশিষ্ট তিন সরল রেখা এক্ষণে টানিতে হইবে, যেন তাহাদের অপর প্রান্তগুলি এক সরল রেখাতে থাকে ও এই রেখা যে দুই খণ্ডে বিভক্ত হইবে, তাহারা পরস্পর সমান হয়।

৭৯। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন এক সরল রেখা

টানিতে হইবে, যেন অন্য দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার উপর লম্ব টানিলে, সেই দুই লম্ব পরস্পর সমান হয় ।

৮০। কোন ত্রিভুজের পরিমিতি ও ভূমিস্থ দুই কোণ নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর ।

৮১। যে তিন সরল রেখা কোন ত্রিভুজের বাহুগুলিকে লম্বভাবে দ্বিখণ্ড করে, তাহার একই বিন্দুতে মিলিত হইবে ।

৮২। যে তিন সরল রেখা কোন ত্রিভুজের কোণগুলিকে দ্বিখণ্ড করে, তাহার একই বিন্দুতে মিলিত হইবে ।

৮৩। কোন ত্রিভুজের দুই বাহু বর্ধিত করিলে, বহিঃস্থ দুই কোণ দ্বিখণ্ড কারক রেখা দ্বয় ও তৃতীয় অন্তরস্থ কোণ দ্বিখণ্ড কারক রেখা, একই বিন্দুতে মিলিত হইবে ।

৮৪। কোন বিবম চতুর্ভুজের সম্মুখীন দুই বাহু সমান্তর হইলে, অপর দুই বাহুর দুইটি মধ্য বিন্দু সংযোজক রেখা সমান্তর দুই বাহুর সমষ্টির অর্ধেক হইবে ।

৮৫। যে সমান্তরিকের কর্ণ দ্বয় পরস্পর সমান, তাহা আয়ত ক্ষেত্র ।

৮৬। কোন নির্দিষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইতে এমন এক বিবম চতুর্ভুজ ছেদ কর, যাহার দুইটি বাহু সমান্তর হইলে, ভূমি ত্রিভুজের ভূমির সহিত সমান হইয়া মিলিয়া যাইবে এবং অপর তিন বাহু পরস্পর সমান হইবে ।

৮৭। কোন পুস্তকের এক পত্রের একটা কোণ এক্ষেপে উপর্যুপরি দুই বার ভাঁজা গেল, যে ভাঁজগুলি পরস্পর সমান্তর ও তদ্বারা উৎপন্ন দুই ক্ষেত্রের, অর্থাৎ ত্রিভুজ এবং চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের উন্নতি পরস্পর সমান হইল ; প্রমাণ কর যে দ্বিতীয় ও প্রথম বারের ভাঁজের দ্বারা যে স্থান পরিবদ্ধ হইল তাহা প্রথম ভাঁজের দ্বারা পরিবদ্ধ স্থানের তিন গুণ ।

৮৮। যে চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বয় পরস্পর দ্বিখণ্ড করে, তাহা একটা সমান্তরিক ।

৮৯। পরস্পর অবনত, কিন্তু সংলগ্ন নহে, এমন দুই সরল রেখার মধ্যবর্তী কল্পিত কোণকে দ্বিখণ্ড করে, এরূপ এক সরল রেখা টান ।

২০। কথগ ত্রিভুজের খগ ভূমির সমান্তর, এমন এক (ঘঙ) রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহা খঘ ও গঙর সমষ্টির সমান হয়।

২১। কথগ ত্রিভুজের কগ ভূমির সমান্তর এমন এক (ঘঙ) রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহা খঘ ও গঙর অন্তরের সমান হয়।

২২। যদি কথ রেখাকে গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করিয়া ক, খ, গ বিন্দু দিয়া সমান্তর তিনটি রেখা টানা যায় আর ইহারা অন্য কোন নির্দিষ্ট রেখাকে ক্রমে ঘ, ঙ ও চ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে ঙ ও খ বিন্দু নির্দিষ্ট রেখার এক দিকে থাকিলে, গচ রেখা কঘ ও খঙর সমষ্টির অর্ধেকের সমান হইবে আর ভিন্ন দিকে থাকিলে, তাহাদের অন্তরের অর্ধেকের সমান হইবে।

২৩। দুই নির্দিষ্ট রেখার মধ্যবর্তী স্থানে অবস্থিত কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া একরূপে এক রেখা টানিতে হইবে, যেন নির্দিষ্ট বিন্দু ও প্রত্যেক রেখার মধ্যস্থিত খণ্ড দ্বয় পরস্পর সমান হয়।

২৪। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সহিত সমান সমান কোণ করিয়া যদি ভূমির প্রান্ত হইতে একটি ও ভূমির অন্য কোন বিন্দু হইতে আর দুইটি সরল রেখা ত্রিভুজের বাহু পর্যন্ত টানা যায়, তবে প্রথম রেখাটি অন্য দুইটির সমষ্টির সমান হইবে।

২৫। কথগস কোন সমান্তরিক; ক বিন্দু হইতে কোন সরল রেখা টানিলে, যদি তাহা ক্ষেত্রের অভ্যন্তর দিয়া যায়, তবে গ হইতে তাহার দূরত্ব খ ও ঘ হইতে দূরত্বের অন্তরের সমান হইবে; যদি বাহিরে থাকে, তবে উহাদের সমষ্টির সমান হইবে।

২৬। এক নির্দিষ্ট কোণের বহিষ্ক কোন বিন্দু হইতে এমন এক সরল রেখা টানিতে হইবে, যাহার বহিষ্ক অংশ কোণের মধ্যস্থ অংশের সমান হয়।

২৭। কোন সমচতুর্ভুজের কর্ণ বর্জিত করিয়া বর্জিত অংশে এমন এক বিন্দু স্থির কর, যাহা হইতে সমচতুর্ভুজের এক বাহুর সমান্তর এক রেখা টানিলে ও তাহাকে ক্ষেত্রের আর একটি বর্জিত বাহুর সহিত মিলাইয়া দিলে, এই রেখা, বর্জিত বাহু ও বর্জিত কর্ণ দ্বারা যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহা যেন সমচতুর্ভুজের সমান হয়।

৯৮। ইউক্লিডের প্রথম অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি $\angle A$ ও $\angle C$ পরস্পর জ বিন্দুতে ছেদ করে আর যদি $\angle A$ ও $\angle C$ কোণ কখনো কোণের সমান হয়, তবে $\angle A$ কোণ $\angle C$ কোণের দ্বিগুণ হইবে।

৯৯। ইউক্লিডের প্রথম অধ্যায়ের প্রথম প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি বর্জিত গক ও গক বৃত্ত দ্বয়ের পরিধির সহিত $\angle A$ ও $\angle C$ বিন্দুতে স্পর্শ হয় এবং বৃত্ত দ্বয়ের উপর ছেদ বিন্দু D হয়, তাহা হইলে $\angle A$ ও $\angle C$ একই সরল রেখা হইবে।

১০০। এক সমকোণকে সমান তিন কোণে বিভক্ত করিতে হইবে।

১০১। কোন সমকোণী ত্রিভুজের দুইটি ক্ষুদ্র কোণের মধ্যে একটি অন্যের তিন গুণ; ক্ষুদ্রতরটিকে তিন সমান কোণে বিভক্ত কর।

১০২। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি বর্জিত করিলে, দ্বিগুণিত বহিস্থ কোণ, দুই সম কোণ ও ত্রিভুজের শীর্ষ কোণের সমষ্টির সমান হইবে।

১০৩। একটি সমদ্বিবাহু ও একটি সমবাহু ত্রিভুজ একই ভূমির উপর স্থাপিত হইলে, যদি অভ্যন্তরীণ ত্রিভুজের শীর্ষ উপরের শীর্ষ ও ভূমির দুই প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী হয়, তবে সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষ অন্তরস্থ হইলে, ভূমি স্পর্শ কোণ শীর্ষ কোণের এক চতুর্থাংশ ও বহিস্থ হইলে, সার্ক দ্বিগুণ হইবে।

১০৪। কোন সমবাহু ত্রিভুজকে সমান নয়টি ত্রিভুজে বিভক্ত করিতে হইবে।

১০৫। কোন ত্রিভুজের শীর্ষ হইতে যদি ভূমি দ্বিখণ্ড কারক ও শীর্ষ কোণ দ্বিখণ্ড কারক দুইটি সরল রেখা টানা যায়, তবে ইহাদের অন্তর্গত কোণ ভূমি স্পর্শ দুই কোণের অন্তরের অর্ধেক হইবে।

১০৬। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের খণ্ড ভূমিতে $\angle A$ বিন্দু কল্পনা করিয়া, গক হইতে গকএর সমান গও ছেদ কর এবং $\angle A$ সংযোজক রেখাকে বৃদ্ধি করিয়া বর্জিত কখএর সহিত $\angle A$

বিন্দুতে মিলাইয়া দাও ; তাহা হইলে ত্রিগুণিত কণ্ড কোণ, চারি সম কোণ ও কণ্ড কোণের সমষ্টির সমান হইবে ।

১০৭। কোন বহুভুজের একান্তর বাহুগুলি বর্দ্ধিত করিলে, তাহারা সংলগ্ন হইয়া যে সকল কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহাদের সমষ্টি ও আটটি সম কোণ একত্র যোগে বহুভুজের বাহুগুলির দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান হইবে ।

১০৮। যদি কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি স্ব কোণ শীর্ষ কোণের একচতুর্থাংশ হয় এবং ভূমির এক প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ করিয়া একটি রেখা টানা যায় ও ইহাকে বর্দ্ধিত সম্মুখীন বাহুর সহিত মিলাইয়া দেওয়া যায়, তবে এই বাহুর বর্দ্ধিত অংশ, লম্ব রেখা ও নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অপর বাহু দ্বারা এক সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে ।

১০৯। কথগ ত্রিভুজের ক সম কোণ এবং খ কোণ গ কোণের দ্বিগুণ ; প্রমাণ কর যে, গখ বাহু কখ বাহুর দ্বিগুণ ।

১১০। যদি কোন চতুর্ভুজের সম্মুখীন বাহুগুলি বা সম্মুখীন কোণগুলি পরস্পর সমান হয়, তবে ক্ষেত্রটি সমান্তরিক হইবে ।

১১১। যদি কোন চতুর্ভুজের চারি কোণ হইতে সমান সমান দূরে চারি বাহুতে চারিটি বিন্দু কল্পনা করা যায়, তবে তাহাদের সংযোজক রেখা চতুর্ভুজের দ্বারা একটি সমচতুর্ভুজ হইবে ।

১১২। কোন সমান্তরিকের সম্মুখীন দুই বাহুর মধ্য বিন্দু দ্বয় হইতে পরস্পর সম্মুখীন কোণ দ্বয় পর্য্যন্ত দুইটি রেখা টানিলে, কর্ণ রেখা ইহাদের দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হইবে ।

১১৩। কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে ভূমির উপর লম্ব নির্দিষ্ট আছে এবং লম্বের দ্বারা ভূমি যে দুই খণ্ডে বিভক্ত হইয়াছে, তাহাদের প্রত্যেকের ও তৎসংলগ্ন বাহুর অন্তরও জানা আছে ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর ।

১১৪। কোন সমান্তরিকের চারি কোণ দ্বিগুণ করক রেখা দ্বারা একটি সমকোণী সমান্তরিক উৎপন্ন হইবে আর ইহার কর্ণ দ্বয় নির্দিষ্ট সমান্তরিকের বাহুগুলির সমান্তর হইবে ।

১১৫। এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অভ্যন্তরে এমন এক রেখা স্থাপন কর, যাহার দুই প্রান্ত দুই বাহুতে সংলগ্ন হইবে ও

যাহা একটি নির্দিষ্ট রেখার সমান ও আর একটি নির্দিষ্ট রেখার সমান্তর হইবে।

১১৬। কোন সমান্তরিকের কর্ণের মধ্য বিন্দু দিয়া দুই বাহু পর্যন্ত কোন একটি রেখা টানিলে, তাহা ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে ও সমান্তরিককে দুই সমান ভাগে বিভক্ত করিবে।

১১৭। সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের মধ্য বিন্দু, ত্রিভুজের তিন কোণ হইতে সমদূরবর্তী।

১১৮। যদি কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণ হইতে ভূমির উপর একটি রেখা লম্ব ভাবে ও আর একটি ভূমিকে দ্বিখণ্ড করিয়া টানা যায়, তবে এই দুই রেখার অন্তর্গত কোণ, ভূমি সংলগ্ন দুই কোণের অন্তরের সমান হইবে।

১১৯। কোন ত্রিভুজের ভূমিতে এমন এক বিন্দু স্থির কর, যাহা হইতে বাহু দুইটা পর্যন্ত দুই বাহুর সমান্তর দুই রেখা টানিলে, তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

১২০। কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

১২১। প্রতিপন্ন কর যে, কোন নির্দিষ্ট ভূমির উপর যতগুলি সমান সমান ত্রিভুজ অঙ্কিত করা যাইতে পারে, তন্মধ্যে যেটা সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ, তাহার পরিমিতি সন্ধ্যাপেক্ষা ক্ষুদ্র।

১২২। একই ভূমি ও একই পরিমিতি বিশিষ্ট ত্রিভুজ সকলের মধ্যে যেটা সমদ্বিবাহু, তাহা সন্ধ্যাপেক্ষা বৃহৎ।

১২৩। যদি কোন ত্রিভুজের একটি কোণ সমকোণ এবং আর একটি সমকোণের দুই তৃতীয়াংশ হয়, তবে কর্ণের উপর অঙ্কিত সমবাহু ত্রিভুজ অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমবাহু ত্রিভুজের সমান হইবে।

১২৪। কথগ ত্রিভুজ এবং ইহার কথ বাহুস্থিত য বিন্দু নির্দিষ্ট আছে; সাধারণ ক কোণ বিশিষ্ট কথগ ত্রিভুজের সমান কথগ ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

১২৫। নির্দিষ্ট উন্নতি বিশিষ্ট কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

১২৬। কথগয চতুর্ভুজের খঘ কর্ণের মধ্য বিন্দু ও দিয়া

কগএর সমান্তর চওছ রেখা টানিয়া প্রতিপন্ন কর যে, কছ সরল রেখা ক্ষেত্রকে দ্বিখণ্ড করিবে ।

১২৭। কথগঘ ক্ষেত্রে কগ ও খঘ দুই গাছ জরীপের শিকল স্থাপন করিয়া দেখা গেল যে, ইহার গঘএর সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিতেছে এবং কগ শৃঙ্খল কঘএর সহিত যে কোণ উৎপন্ন করিতেছে, খঘ শৃঙ্খল ও খগএর সহিত ততুল্য কোণ উৎপন্ন করিতেছে; প্রমাণ কর যে, কথ ও গঘ পরস্পর সমান্তর ।

১২৮। কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর মধ্য বিন্দু গুলি হইতে সম্মুখীন কৌণিক বিন্দু পর্য্যন্ত তিন সরল রেখা টানিলে, তাহার একই বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিবে ও ত্রিভুজকে তিন সমান অংশে বিভক্ত করিবে ।

১২৯। প্রতিপন্ন কর যে, এক শত আটাশের অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞার উল্লিখিত তিন রেখা, সাধারণ ছেদ বিন্দুতে এক্রূপে দ্বিভক্ত হইয়াছে যে, প্রত্যেকের এক এক অংশ অন্যান্য অংশের দ্বিগুণ ।

১৩০। দুই বাহু নির্দিষ্ট থাকিলে যদি তাহাদের অন্তর্গত কোণ সম কোণ হয়, তবে যে ত্রিভুজটি অঙ্কিত হইবে, তাহা অপর কোন কোন ও ঐ দুইটি বাহু বিশিষ্ট ত্রিভুজ অপেক্ষা বৃহৎ ।

১৩১। যদি দুইটি সমান্তর বাহু বিশিষ্ট কোন বিষম চতুর্ভুজের অন্য এক বাহুর দুই প্রান্ত হইতে সম্মুখীন বাহুর মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত দুইটি রেখা টানা যায়, তবে প্রথমোক্ত বাহু ও ঐ দুই রেখা দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজ, বিষম চতুর্ভুজের অর্ধেক হইবে ।

১৩২। যদি কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির দুই প্রান্ত হইতে দুই বাহুর উপর লম্ব টানা যায়, তবে ইহাদের ছেদ বিন্দু ও শৃঙ্গ সংযোজক রেখাকে বর্জিত করিলে, উহা ভূমিকে লম্ব ভাবে দ্বিখণ্ড করিবে ।

১৩৩। ইউক্লিডের প্রথম অধ্যায়ের ৪৭ প্রতিজ্ঞার চিত্রে প্রমাণ কর যে, ছথ ও জগ সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের চক ও কট কর্ণ একই রেখা হইবে ।

১৩৪। উক্ত চিত্রে গচ ও গুট সংযুক্ত করিলে চখগ ও টগঃ ত্রিভুজ দ্বয়ের ভূমিস্থ কোণ স্থলির সমষ্টি, এক সম কোণের সমান হইবে ।

১৩৫। উক্ত চিত্রে খ্ছ ও গজ সংযুক্ত করিলে, তাহার পরস্পর সমান্তর হইবে ।

১৩৬। উক্ত চিত্রে চ ও ট বিন্দু হইতে যদি বর্জিত খগএর উপর লম্ব টানা যায়, তবে খগএর বর্জিত অংশ দ্বয় পরস্পর সমান হইবে এবং দুইটি লম্বের সমষ্টি খগএর সমান হইবে ।

১৩৭। উক্ত চিত্রে ছজ, চঘ ও টগ সংযুক্ত করিলে, যে তিনটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহার প্রত্যেকেই কখগ ত্রিভুজের সমান হইবে ।

১৩৮। উক্ত চিত্রে ছজ, চঘ, ও টগর উপর অঙ্কিত তিনটি সমচতুর্ভুজ, কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের ছয় গুণ হইবে

১৩৯। উক্ত চিত্রে কখ ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের অন্তর, কঘ ও কগর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের অন্তরের সমান হইবে ।

১৪০। কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ নির্দিষ্ট আছে ও ভূমিঃ একটি কোণ অপরের তিন গুণ ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর ।

১৪১। কখগ ত্রিভুজের খগ ভূমিতে গ বিন্দু একপে নির্ণয় কর, যেন কখএর সমান্তর গঃ রেখা, কগ পর্য্যন্ত টানিলে, তাঃ খগএর সমান হয় ।

১৪২। কখগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর চঘ ল টানিলে, যদি তাহা কখ বাহুকে গ বিন্দুতে ও বর্জিত গক বাহুকে চ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে গুচক ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু হইবে ।

১৪৩। এমন একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার তিন বাহুর উপর অঙ্কিত তিনটি সমচতুর্ভুজের সমষ্টি, অন্য কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমষ্টির সমান হয় ।

১৪৪। দুই নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন দুই সরল রেখা টানি হইবে, যাহারা কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার সহিত সংলগ্ন হইবে এক সমবাহু ত্রিভুজ উৎপন্ন করিবে ।

১৪৫। একটা কোণ, তাহার সম্মুখীন বাহু ও অন্য দুই বাহুর সমষ্টি নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

১৪৬। কোন সমান্তরিকের কর্ণ দ্বয় ও কোণ গুলি নির্দিষ্ট আছে ; সমান্তরিকটি অঙ্কিত কর।

১৪৭। এক সমান্তরিকের কোন বাহু স্থিত এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে অথবা কোন কৌণিক বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া, ক্ষেত্রটিকে তিন সমান ভাগে বিভক্ত কর।

১৪৮। একটা কর্ণের দ্বারা যদি কোন চতুর্ভুজ দ্বিখণ্ডিত হয়, তবে তাহার দ্বিতীয় কর্ণও প্রথম কর্ণের দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

১৪৯। কোন সমান্তরিকের এক বাহুস্থিত কোন এক বিন্দু হইতে সরল রেখা টানিয়া ক্ষেত্রটিকে চারি সমান অংশে বিভক্ত কর।

১৫০। যদি কখগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের গ বিন্দু হইতে কখএর উপর গঘ লম্ব টানা যায়, তবে $কখ^২ + খগ^২ = কগ^২$
 $= থগ^২ + ২ কঘ^২ + ৩ গঘ^২$ ।

১ম অধ্যায়।

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট।

ইউক্লিড লিখিত প্রথম সাতটি সংজ্ঞা লইয়া জ্যামিতি বেত্তা ও অন্যান্য পণ্ডিত গণ অনেক বিতণ্ডা করিয়া থাকেন ; ইউক্লিড বিন্দু, রেখা, সরল রেখা, সমতল প্রভৃতির যেরূপ লক্ষণ করিয়াছেন, সেই লক্ষণাক্রান্ত পদার্থ জগতে আছে কি না ? যদি না থাকে ও ইউক্লিডের স্বকপোল কল্পিত হয়, তবে তাহাদিগকে মূল স্বরূপ অবলম্বন করিয়া কোন শাস্ত্র বিশেষ রচনা করিবার প্রয়োজন কি ও সেই কল্পিত শাস্ত্র পাঠেই বা বিদ্যার্থীদিগের কি লাভ হইতে পারে ? এই সকল প্রশ্নের উত্তর দিতে হইলে, পুঙ্খানুপুঙ্খ রূপে বিচারের আবশ্যিকতা হয় ; এরূপ বিচার করিতে হইলে এক খানি স্বতন্ত্র গ্রন্থ হইয়া উঠে ; এই আশঙ্কায় আমরা তাহা না করিয়া সংক্ষেপে কেবল তৎসংক্রান্ত কতকগুলি স্থূল স্থূল বিষয়ের উল্লেখ করিব।

ইউক্লিডের লিখিত বিন্দু, রেখা বা তল স্বতন্ত্র রূপে কোথাও বর্তমান নাই ; কিন্তু প্রাকৃতিক বা কৃত্রিম বস্তু সমুদয় পর্যালোচনা করিলে, তৎ সম্বন্ধে ইহাদিগের বিদ্যমানতা বোধ হইবে। জগতে যত বস্তু দৃষ্ট হয়, সকলই স্থান অবরোধ করে ; এই রূপে অবরুদ্ধ বা সীমাবদ্ধ স্থানের নাম ক্ষেত্র। ক্ষেত্র দুই প্রকার ;— ঘনক্ষেত্র ও সামন্তলিক বা পৃষ্ঠ ক্ষেত্র। এই দুইএর মধ্যে কেবল প্রথম প্রকার ক্ষেত্রের স্বতন্ত্র অবস্থিতি আছে, অন্য প্রকার ক্ষেত্রের তাহা নাই। ঘনক্ষেত্রের এক একটা পার্শ্ব এক এক পৃষ্ঠ বা তল। বিদ্যার্থীদিগের সহজেই প্রতীতি হইবে যে, ঘন ক্ষেত্র মাত্রেই তিন দিকে বিস্তৃত অর্থাৎ তাহার দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ আছে ; এই ক্ষেত্রের বেধ পরিত্যাগ করিলে তল বা পৃষ্ঠ ক্ষেত্র হইবে। আবার পৃষ্ঠ ক্ষেত্র বা তলের প্রস্থ পরিত্যাগ করিলে রেখা হইবে।

পূর্বেই উল্লিখিত হইয়াছে যে, তল এবং রেখা স্বতন্ত্র রূপে জগতে দিদ্যমান নাই ; কিন্তু ঘনক্ষেত্র সম্বন্ধে ইহাদের বিদ্যমানতা অনায়াসে বোধ হয় ; আবার ঘন ক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য, প্রস্থ এবং বেধ এই তিনটি গুণের এক একটিকে ক্রমে পরিত্যাগ করিয়া, প্রত্যেকটিকে স্বতন্ত্র রূপে কল্পনা করা আমাদের মানসিক শক্তি বিশেষের বহির্ভূত কার্য্য নহে ; ফলত, আমরা প্রতি দিন প্রতি দণ্ডে ও প্রতি পলে এই রূপে প্রত্যেক বস্তুর ভিন্ন ভিন্ন গুণের স্বতন্ত্র রূপে কল্পনা করিতেছি এবং তাহা না করিলে কোন বিষয়ের বিচার করিতে বা জ্ঞানোপার্জন করিতে পারি না। পুষ্প মাত্রেরই আকৃতি ও বিস্তারিতা গুণ আছে এবং প্রত্যেক পুষ্পই কোন না কোন বর্ণ বিশিষ্ট। যখন আমরা উহাদের সৌরভের বিচার করি, তখন অন্যান্য গুণের উল্লেখও করি না আর পুষ্পে যে অপর গুণ দিদ্যমান আছে, তাহা আমাদের মনেও উদয় হয় কি না সন্দেহ। বস্তুত, আমরা বিশিষ্ট রূপে অবগত আছি যে, অন্যান্য গুণ বিহীন, গন্ধ মাত্র গুণোপেত, কুসুম জগতে নাই। কিন্তু পুষ্পকে অন্যান্য গুণ বর্জিত, কেবল গন্ধ বিশিষ্ট পদার্থ জ্ঞান করিয়া তাহার সৌরভের বিষয় অনুসন্ধান করিলে, আমাদের উদ্দেশ্য কি সফল হয় না? আর আমরা যখন কোন বস্তুর কোন গুণ সংক্রান্ত কোন বিষয়ের বিচারে প্রবৃত্ত হই, তখন তাহার অন্যান্য গুণ পরিত্যাগ ব্যতীত কি অন্য কোন পথ অবলম্বন করি? যখন যে বিষয় বিচার করি, তখন সেইটি ব্যতীত অন্য কোন বিষয় তাহার সহিত সংশ্লিষ্ট করি না ; প্রণিধান করিলে সকলেই বুঝিতে পারিবেন যে, বিচারের এইটি অদ্বিতীয় পথ। ইউক্লিড তাহার জ্যামিতিতে এই অনতিক্রমণীয় পথ ব্যতীত অন্য কোন পথ অবলম্বন করেন নাই ; তলের কেবল দৈর্ঘ্য ও বিস্তার এবং রেখার কেবল দৈর্ঘ্য লওয়াই তাহার উদ্দেশ্য ; এজন্য তিনি তলকে বেধ বর্জিত ও রেখাকে প্রস্থ বর্জিত পদার্থ বলিয়া স্বীকার করিয়াছেন। ইউক্লিডের কএকটি প্রত্যজ্ঞা পাঠ করিলেই তাহার যে এই উদ্দেশ্য ছিল, তাহা সহজেই বোধ হইবে।

বিখ্যাত দার্শনিক ডিউগালড্‌ ফুয়ার্ট্‌ সাহেব লিখিয়াছেন যে, নব্য ও অদূরদর্শী শিক্ষকেরা “ইউক্লিডের রচিত কএকটি সংজ্ঞার মর্ম বিশেষরূপে বুঝাইতে চেষ্টা ও অনেক বাক্য ব্যয় করিয়া, বিদ্যার্থীদিগের মনে এই রূপ জ্ঞান জন্মাইয়া দেন যে, তিনি যে সকল অভিপ্রায় প্রকাশ করিয়াছেন, সেগুলি বোধ গম্য হইবার নহে; সুতরাং তাহারা তজ্জপ কাম্পনিক পদার্থের প্রতিক্রিয়া কোন মতেই মনে ধারণ করিতে পারে না। যদি সংজ্ঞাগুলির উল্লেখ না করিয়া ও তদ্বিষয়ে শিক্ষা না দিয়া, অধ্যাপক মহাশয়েরা জ্যামিতির প্রকৃত বিষয় শিক্ষা দেন, তবে ছাত্রের অনায়াসে বুঝিতে পারিবে যে, চিত্রগুলিতে অঙ্কিত রেখা সকল দৈর্ঘ্য ও প্রস্থ বিশিষ্ট হইলেও তাহাদিগকে কেবল দৈর্ঘ্য বিশিষ্ট জ্ঞান করিয়া, প্রতিজ্ঞাগুলির উপপত্তি করা হইয়াছে। ভিন্ন ভিন্ন গুণ বিশিষ্ট পদার্থ সকলের বিষয় বিচার করিতে হইলে, তাহাদের এক একটি গুণ পৃথক্ করিয়া, কেবল তদ্বিষয়ের বিচার করা মনুষ্যমাত্রের মানসিক শক্তির বহির্ভূত কার্য্য নহে। নিতান্ত অজ্ঞ ব্যক্তিরও এই রূপে বিচার করিয়া থাকে; ইহা মনুষ্যমাত্রেরই স্বাভাবিক ধর্ম্ম। যখন কোন ব্যক্তি কোন গৃহের প্রবেশের কথা প্রসঙ্গ না করিয়া, কেবল দৈর্ঘ্যের বিষয় উল্লেখ করেন কিম্বা দুই স্থানের দূরত্ব লইয়া কোন কথা বলেন, তখন তিনি যেরূপ ঐ সকল পদার্থের এক একটি গুণকে পৃথক্ করিয়া মনোমধ্যে ধারণা করেন ইউক্লিড তাঁহার দ্বিতীয় সংজ্ঞাতে অবিকল সেই রূপই করিয়াছেন; অতএব এই সংজ্ঞাটি বিদ্যার্থীদিগকে বুঝাইবার জন্য টীকাকারেরা যেরূপ বাগাড়ম্বর করিয়া থাকেন তাহা নিতান্ত অনাবশ্যক।”

যে সকল কথা উল্লিখিত হইল, তদ্বারা পাঠক বৃন্দের বোধ চইয়া থাকিবে যে, ইউক্লিড লিখিত বিন্দু, রেখা বা তল স্বতন্ত্র রূপে বিদ্যমান নাই; কিন্তু ইহাদিগকে পদার্থ স্বরূপ জ্ঞান করিয়া বিচারে প্রবৃত্ত হইলে, সর্ব্ব প্রকার ক্ষেত্র সম্বন্ধে যাহা কিছু আমাদের জ্ঞান আবশ্যক, সকলই অবগত হইতে পারি। এতদ্ভিন্ন ইউক্লিডের জ্যামিতি পাঠে আর এক মহৎ উপকার

লাভ হয়। এই গ্রন্থ পাঠ করিলে আমাদের বিচার শক্তি যে রূপ প্রবল হইয়া উঠে, বোধ হয়, কোন দেশীয় কোন গ্রন্থ পাঠে সেরূপ হয় না। ইউক্লিডের একটি কথাও পরিত্যাগ করিবার নহে; তিনি প্রতিজ্ঞা গুলি সাধন করিবার নিমিত্ত যাহা লিখিয়াছেন ও যে প্রণালী অবলম্বন করিয়াছেন, সে সকলই নিতান্ত আবশ্যিক ও অভেদ্য তর্ক পদ্ধতির ন্যায় গ্রথিত। কেহ কেহ বলেন যে, ন্যায়শাস্ত্রের শত শত গ্রন্থ পাঠে যত উপকার দর্শে, ইউক্লিডের জ্যামিতি পাঠ করিলে তদপেক্ষা অধিকতর উপকার দর্শিয়া থাকে। ফলত, ইউক্লিডের জ্যামিতি পাঠ, আমাদের মানসিক বিচার শক্তির উৎকর্ষ সাধনের একটি উৎকৃষ্ট উপায়। এই নিমিত্তই এক্ষণে পৃথিবীর প্রায় সকল দেশে, সকল বিদ্যালয়ে তাঁহার রচিত পুস্তক পাঠিত হইয়া থাকে।

সং ১। কেহ কেহ বলেন যে, ইউক্লিডের প্রথম সংজ্ঞা দ্বারা কোন ভাবই মনে উদয় হয় না; যেহেতু, তাঁহার লিখিত বিন্দু কোন প্রকার গুণোপেত পদার্থই নহে; যাহার অংশ নাই, তাহারই নাম বিন্দু, ইহা দ্বারা গুণের অভাবই প্রকাশ হইয়াছে। বিন্দুর অংশ নাই, তবে কি আছে? এই প্রশ্নের উত্তর করা সহজ নয় বলিয়া, প্লেফেয়ার বলেন যে, “যাহার অবস্থিতি আছে, কিন্তু বিস্তৃতি নাই, তাহাকে বিন্দু বলা যায়।” গ্রীস দেশীয় পিথাগোরাস নামক সুপ্রসিদ্ধ পণ্ডিতের সংজ্ঞা অবলম্বন করিয়া প্লেফেয়ার এই রূপ লিখিয়াছেন। পিথাগোরাসের মতে “অবস্থিতিমান সূক্ষ্মতম অণুর নাম বিন্দু।” অপর কোন কোন টীকাকার লিখিয়াছেন যে, “বস্তুমাত্রের (যেমন রেখার) অগ্র ভাগকে বিন্দু বলে।” সত্ৰাট্ জগন্নাথ পণ্ডিত তাঁহার রেখাগণিতে লিখিয়াছেন, “যঃ পদার্থঃ দর্শনযোগ্যঃ বিভাগানহঃ স বিন্দুর্বাচ্যঃ।” এই সকল সংজ্ঞার বিষয় পুঙ্খানুপুঙ্খ বিবেচনা করা আমাদের উদ্দেশ্য নহে; তবে এইমাত্র বলা যাইতে পারে যে, ইউক্লিডের সংজ্ঞা অপেক্ষা ইহাদের কোনটাই উৎকৃষ্ট নহে। বিন্দুর যে অবস্থিতি আছে, তাহা সংজ্ঞাতে প্রকাশ করা নিতান্ত অনাবশ্যিক; কেননা,

তাহা হইলে, পদার্থ মাত্রেরই সংজ্ঞাতে অবস্থিতিমত্ব গুণের পরিচয় দিতে হয়; আর যদি বিন্দুর স্বতন্ত্র রূপে বিদ্যমানতা ভাবিয়া তদবস্থায় উহাকে দর্শন যোগ্য বলা যায়, তবে উহা গণিত সম্বন্ধীয় বিন্দু না হইয়া, জড় পদার্থের সূক্ষ্ম অংশ হইয়া উঠে, সুতরাং উহা বিভাগ্য হইয়া পড়ে।

সং ২। দর্শন যোগ্য রেখা মাত্রেরই দৈর্ঘ্য ও বিস্তার আছে এবং বিস্তার বিহীন রেখা অঙ্কিত করাও যায় না। সুতরাং ইউক্লিডের সংজ্ঞানুসারে বিস্তার বিহীন রেখার সম্ভাব্য ভাবিয়া লইতে হয়। কেহ কেহ বলেন যে, “বিন্দুর গতি দ্বারা রেখা উৎপন্ন হয়, তথাৎ সঞ্চরণশীলতা গুণের কল্পনা করিয়া বিন্দুকে চালাইয়া দিলে, উহার যে পথ হয়, তাহাকে রেখা বলে।” আবার অন্যান্য টীকাকার লিখিয়াছেন যে, “বস্তু মাত্রের সূক্ষ্ম ধারকে রেখা বলা যায়।”

সং ৩। এই সংজ্ঞা দ্বারা বিন্দু শব্দের প্রকৃত অর্থ স্পষ্ট রূপে ব্যক্ত হইয়াছে। ইউক্লিড কোন স্থানে বিশেষ রূপে উল্লেখ না করিয়া, প্রতিজ্ঞা গুলির উপপত্তি কালে, স্বীকার করিয়া লইয়াছেন যে, দুই রেখার ছেদে বিন্দু উৎপন্ন হয়।

সং ৪। সরল বা ঋজু রেখা এই শব্দগুলির অর্থ কি, তাহা সকলেই অনায়াসে বুঝিতে পারেন; ইহা অপেক্ষা সুখ বোধ শব্দ ভাষায় অপ্রসিদ্ধ; সুতরাং সরল রেখার সংজ্ঞা লিখবার বিশেষ আবশ্যকতা দৃষ্ট হয় না। ফলত, “সরল রেখা” এই শব্দকে অন্য কোন রূপে প্রকাশ করিতে হইলেই, তাহা সহজ না হইয়া কঠিন হইয়া পড়ে। সহজ করিবার মানসে পণ্ডিতেরা ভিন্ন ভিন্ন রূপে উহার যে যে সংজ্ঞা লিখিয়াছেন, সেই সকল প্রদর্শিত হইতেছে;—

১ম—“দুই বিন্দুর ক্ষুদ্রতম দূরত্বের নাম সরল রেখা।”
আর্কিমিডিস ও লেজেণ্ডর।

২য়—“যে রেখার প্রান্ত বিন্দু দ্বয়ের অন্যতরের পশ্চাতে চক্ষু রাখিলে, রেখার অপরাংশের দৃষ্টি অবরোধ হয়, তাহার নাম সরল রেখা।”
প্লেটো ও জগন্নাথ।

৩য়—“ যদি দুই রেখা একরূপ হয় যে, তাহাদিগকে একাধিক বিন্দুতে সংলগ্ন করিতে গেলে, তাহারা সৰ্ব্বতোভাবে মিলিয়া যায়, তবে তাহাদের প্রত্যেককে সরল রেখা বলা যায় ।”

প্লেফেয়ার ।

৪র্থ—“ যে রেখার কোন দুই বিন্দুর অবস্থিতি জানিলে, সমস্ত রেখার অবস্থিতি জানা যায়, তাহার নাম সরল রেখা ।”

এই কএকটি সংজ্ঞার মধ্যে প্রথমটি প্রমাণ যোগ্য ; ২য় ও ৪র্থটি সরল রেখার বিশেষ বিশেষ ধর্ম জ্ঞাপক এবং ৩য়টিতে একটি সরল রেখার লক্ষণ না হইয়া একেবারে দুইটির লক্ষণ হইয়াছে । ইউক্লিডের সংজ্ঞার তাৎপর্য্য এই যে, যে রেখা, সীমা সূচক দুই বিন্দুর মধ্যে থাকিয়া, ঐ দুই বিন্দু হইতে অন্য কোন দিকে মুখ না ফিরাই, তাহার নাম সরল রেখা ।

সং ৭ । এই সংজ্ঞাটি মূলে যেরূপে লিখিত হইয়াছে, তাহা অবিকল ইউক্লিডের রচিত নহে । সিম্‌সন সাহেব, হিরো নামক গ্রীস দেশীয় পণ্ডিতের মতানুসারে সংজ্ঞাটি সেইরূপ করিয়া লিখিয়াছেন । ইউক্লিডের সংজ্ঞা এই ;—“যে তল তাহার অন্তর্গত সরল রেখাগুলির ন্যায় ঋজু বা সরল ভাবে অবস্থিত, তাহার নাম সমতল ।”

সং ৮ ও ৯ । রেখা, সমতল ও ঘনক্ষেত্র এই তিন প্রকার রাশি ব্যতীত জ্যামিতিতে আর এক প্রকার রাশির বিষয় লিখিত আছে ; সেই জ্যামিতিক রাশির নাম কোণ । কোন বিন্দু হইতে দুইটি রেখা টানিলে, তাহাদের পরস্পর বিসারণে কোণের উৎপত্তি হয় । এই দুইটি রেখার হ্রাস বা বৃদ্ধি করিলে, কোণের পরিমাণের হ্রাস বা বৃদ্ধি হয় না । দুইটি কোণের মধ্যে কোন্‌টি বৃহত্তর ও কোন্‌টি ক্ষুদ্রতর নিরূপণ করিতে হইলে, সেই সেই কোণ উৎপাদক রেখা দ্বয়ের পরস্পর বিসারণের তরতম্যের অনুসারে তাহা স্থির করিতে হয় ।

যে বিন্দুতে কোণ উৎপাদক সরল রেখা দুইটি সংলগ্ন হয়, তাহার নাম কোণিক বিন্দু । যে দুই সরল রেখা বর্জিত হইলে, সংলগ্ন হয় ও কোণ উৎপন্ন করে, তাহাদিগকে পরস্পর অবনত সরল রেখা বলে ।

কোন কোন জ্যামিতিবেত্তা কোণের সংজ্ঞা এইরূপে লিখিয়াছেন ;—

“ কোন সরল রেখার এক প্রান্ত স্থির রাখিয়া যদি তাহাকে এমন করিয়া ঘুরাইয়া দেওয়া যায় যে, সে অপর কোন স্থানে উপস্থিত হয়, তাহা হইলে এই রেখার প্রথম ও শেষ এই দুই স্থান দ্বারা যে অবনতি বিশেষ উৎপন্ন হয়, তাহাকে কোণ বলে ।”

ইউক্লিডের অষ্টম সংজ্ঞার বিশেষ আবশ্যকতা দৃষ্ট হয় না ; কেননা, জ্যামিতিতে দুই বক্র রেখা দ্বারা কিম্বা একটি বক্র ও আর একটি সরল রেখা দ্বারা উৎপন্ন কোণের ব্যবহার নাই ।

সং ১০ । ইউক্লিড মূল গ্রন্থের সকল স্থানেই স্পীকার করিয়াছেন যে, একটি রেখা আর একটির লম্ব হইলে দ্বিতীয়টিও প্রথমটির লম্ব হইবে ।

সং ১৩ । অনাবশ্যকতা হেতু এই সংজ্ঞাটি পরিত্যাগ করিলে করা যায় ।

সং ১৫ । পরিবন্ধ সমতলের নাম সামন্তলিক ক্ষেত্র । বৃত্তক্ষেত্রের সংজ্ঞাতে কিরূপে বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হয়, ইউক্লিড তাহা লেখেন নাই ; এই নিমিত্ত কেহ কেহ বৃত্তক্ষেত্রের সংজ্ঞাটি এইরূপে লিখিয়াছেন ;—

কোন সরল রেখার এক প্রান্ত স্থির রাখিয়া যদি তাহাকে কোন সমতলে একবার ঘুরাইয়া আনা যায়, তবে ঐ রেখা যে স্থান পরিভ্রমণ করিয়া আইসে, তাহাকে বৃত্ত, ঐ সরল রেখার মূল প্রান্ত দ্বারা যে রেখা অঙ্কিত হয়, তাহাকে পরিধি, ভ্রাম্যমাণ সরল রেখাকে ব্যাসার্ধ এবং যে বিন্দুর চতুর্দিকে রেখাটি ভ্রমিত হয়, তাহাকে কেন্দ্র বলে ।

সং ২৩ । যে সকল সরল রেখা দ্বারা ক্ষেত্র পরিবন্ধ হয়, তাহাদিগকে ক্ষেত্রের ভূজ বা বাহু ও বাহু সমষ্টিতে পরিমিতি বলে ।

সং ২৪—২৯ । ইউক্লিড ত্রিভুজকে ভূজের তারতম্যানুসারে তিন শ্রেণীতে এবং কোণের প্রকারানুসারে তিন শ্রেণীতে বিভক্ত করিয়াছেন । ইউক্লিড সমবাহু ত্রিভুজের সংজ্ঞা করিবার

অগ্রেই তাহার বিদ্যমানতা স্বীকার করিয়াছেন বলিয়া কেহ কেহ এ প্রকারে লিখিত সংজ্ঞাতে আপত্তি করেন ; তাঁহাদের মতে সমবাহু ত্রিভুজের সংজ্ঞা এইরূপে লিখিলে ভাল হইত ;— যদি কোন ত্রিভুজের তিন বাহু সমান হয়, তবে তাহাকে সম-বাহু ত্রিভুজ বলে।

• সং ৩০—৩৪। কোন কোন টীকাকার বলেন যে, সমচতুর্ভুজ, আয়ত ও রম্বসড ক্ষেত্রের সংজ্ঞাতে ইউক্লিডের অতি ব্যাপ্তি দোষ হইয়াছে। যে ক্ষেত্রের চারি ভুজ সমান ও একটী কোণ সম কোণ সেইটী সমচতুর্ভুজ, এই পর্য্যন্ত লিখিলেই বর্গক্ষেত্রের বিবরণ যথেষ্ট লেখা হইত ; কেননা, একটী কোণ সম কোণ হইলেই অন্য কোণ গুলিও যে সম কোণ, তাহা সপ্রমাণ হইতে পারে। এইরূপ দোষ আয়ত ও রম্বসড ক্ষেত্রের সংজ্ঞাতেও লক্ষিত হয়।

সং ৩৫। উত্তরোত্তর বর্দ্ধিত হইলে কখনই মিলিত হয় না একরূপ দুই সরল রেখা সমান্তর না হইলেও হইতে পারে। যদি তাহার বিস্তারিত সমতলে অবস্থিত হয়, তবে মিলিত না হইলেও সমান্তর হইবে না।

স্বীকৃত বিষয় ।

সরল রেখা, ত্রিভুজ ও বৃত্ত প্রভৃতি ক্ষেত্র কাহাকে বলে তাহা জানিলেই জ্যামিতি সম্বন্ধীয় কোন প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করা যায় না ; তদনুরূপ চিত্র করিতে না পারিলে কোন বিষয়েরই সিদ্ধান্ত হয় না ; এজন্য এক বিন্দু হইতে অপর কোন বিন্দু পর্য্যন্ত একটী সরল রেখা অঙ্কিত করিতে পারা যায়, সরল রেখাকে ইচ্ছামত বর্দ্ধিত করিতে পারা যায় এবং বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়, এই কথা গুলি ইউক্লিড স্বীকার করিয়াছেন। ফলত, একরূপ স্বীকার না করিলে, কোন প্রতিজ্ঞারই উপপত্তি হইতে পারে না। কেহ কেহ বলেন যে, স্বীকৃত বিষয় গুলিতে ঐ মাত্র বলা হইয়াছে যে, জ্যামিতিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইলে, চিত্র করিবার কল ও কম্পাসের প্রয়োজন হইবে।

কিন্তু ইউক্লিড কোন যন্ত্রেরই উল্লেখ করেন নাই ; তাহার কারণ এই যে, তাঁহার লিখিত সরল রেখা, বৃত্ত প্রভৃতি ক্ষেত্র, কোন যন্ত্রের সাহায্যে অঙ্কিত হইতে পারে না ; তথাপি প্রতিজ্ঞাগুলি সাধনের জন্য তাহাদিগকে অঙ্কিত করা আবশ্যিক ; এনিমিত্ত তিনি ইহাদিগের অঙ্কন মাত্র স্বীকার করিয়াই সন্তুষ্ট হইয়াছেন ।

স্বতঃ সিদ্ধ ।

সংজ্ঞা গুলির ন্যায় ইউক্লিডের স্বতঃ সিদ্ধ গুলি লইয়া জ্যামিতিবেদ্য, দার্শনিক ও তর্কিকেরা অনেক বাদানুবাদ করিয়া থাকেন । কেহ কেহ স্বতঃ সিদ্ধ গুলিকে জ্যামিতির মূল স্বরূপ জ্ঞান করিয়াছেন ; অপর কোন কোন পণ্ডিত বলেন যে, ইহাদের দ্বারা কোন প্রকার জ্ঞানই লব্ধ হয় না । আমাদিগের বিবেচনায় সংজ্ঞা গুলিই জ্যামিতির প্রকৃত মূল ও স্বতঃ সিদ্ধ গুলির প্রয়োগদ্বারা ইউক্লিডের প্রতিজ্ঞা গুলির উপপত্তি হইয়াছে ; যে হেতু বৃত্ত কাহাকে বলে অথবা সমকোণী ত্রিভুজ কাহাকে বলে, না জানিলে, কেবল স্বতঃ সিদ্ধ গুলির সম্যক জ্ঞান লাভ করিয়া, সমস্ত জীবন ক্ষেপণ করিলেও কেহ জানিতে পারিবেন না যে, অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সমকোণ বা সমকোণী ত্রিভুজের সম কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ অন্য দুইটি বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান । সুতরাং সংজ্ঞা গুলিকে মূল স্বরূপ জ্ঞান করিয়া, স্বতঃসিদ্ধ সকলের সাহায্য গ্রহণ পূর্বক বিচারে প্রবৃত্ত হইলে, জ্যামিতি সংক্রান্ত তাবৎ বিষয়ই জ্ঞান যায় । অতএব সংক্ষেপে এরূপ বলা যাইতে পারে যে,

- (১) সংজ্ঞা গুলি জ্যামিতির মূল ;
- (২) স্বীকৃত বিষয় গুলি অঙ্কনের মূল ;
- (৩) স্বতঃ সিদ্ধ গুলি বিচার বা উপপত্তির মূল ।

যেমন সংজ্ঞায় লিখিত রেখা, কোণ ও ক্ষেত্র প্রভৃতি পদার্থ গুলি, স্বতন্ত্র রূপে ইঞ্জিয় গ্রাহ্য না হইলেও প্রথমত দর্শনেন্দ্রিয়ের প্রয়োগ দ্বারা উহাদের জ্ঞান লাভ হয়, সেই প্রকার স্বতঃসিদ্ধ গুলির জ্ঞানও প্রথমত কোন না কোন জ্ঞানেন্দ্রিয়ের সাহায্যে

লব্ধ হইয়া থাকে ; এক বস্তু আর এক বস্তুর সমান বা অসমান এই জ্ঞান ইন্দ্রিয়জন্য ; প্রথমে ইন্দ্রিয়ের সহায়তায় এ জ্ঞান না জন্মিলে, ইউক্লিডের কোন স্বতঃসিদ্ধেরই সিদ্ধতা প্রতীয়মান হয় না । কিন্তু এরূপ জ্ঞান জন্মিলে, অনেকগুলি স্বতঃসিদ্ধের সিদ্ধতা স্বতই মনে উদয় হয় এবং তদ্বিষয়ে বিচারের প্রয়োজন হয় না ; এই নিমিত্তই এগুলির নাম স্বতঃসিদ্ধ হইয়াছে ।

স্বতঃ ৪ ও ৫। ইউক্লিড ৪র্থ স্বতঃসিদ্ধে এই মাত্র প্রকাশ করিয়াছেন যে, যদি ক ও খ দুই অসমান রাশিতে ক্রমে গ ও ঘ দুই সমান রাশি যোগ করা যায়, তবে ক ও গএর যোগফল খ ও ঘএর যোগফলের অসমান হইবে । প্রতিজ্ঞাগুলির উপপত্তি কালে এই স্বতঃসিদ্ধটির ঠিক এইরূপে প্রয়োগ না হইয়া ভিন্নরূপে প্রয়োগ হইয়াছে ; যথা,—যদি ক, খ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রত্যেকের সহিত গ ও ঘ এই দুইটি সমান রাশির এক একটি যোগ করিলে ক ও গএর যোগফল খ ও ঘএর যোগফল অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে । পঞ্চম স্বতঃসিদ্ধটিরও প্রয়োগ এইরূপ ।

স্বতঃ ৮। কিরূপে দুই জ্যামিতিক রাশির সমানত্ব জানা যাইবে, ইউক্লিড ইহাই এই স্বতঃসিদ্ধে ব্যক্ত করিয়াছেন । একটি রেখা অপর একটি রেখার উপর, একটি কোণ আর একটি কোণের উপর এবং এক সরল ট্রৈখিক ক্ষেত্র অন্য সরল ট্রৈখিক ক্ষেত্রের উপর স্থাপিত হইয়াছে কল্পনা করিলে, যদি এরূপ বোধ হয় যে, তাহারা সর্বতোভাবে মিলিত হইয়াছে, তবে তাহারা পরস্পর সমান হইবে । ইউক্লিড এই প্রণালী অবলম্বন করিয়া তাঁহার জ্যামিতিতে ক্ষেত্র প্রভৃতির সমানত্ব প্রমাণ করিয়াছেন । এই প্রণালীকে উপস্থাপন, অর্থাৎ একটির উপর আর একটির স্থাপন, বলা যায় । অষ্টম স্বতঃসিদ্ধটি স্পর্শ বৃত্তাদিবার জন্য টীকাকারেণ “যে যে রাশি ঠিক এক স্থান আবরণ করে,” এই বাক্যটি উহাতে সন্নিবেশিত করিয়াছেন ; কিন্তু মূলে এরূপ নাই । রেখা ও কোণ সম্বন্ধে এই বাক্যের উপযোগিতা দৃষ্ট হয় না ; এ নিমিত্ত ঐ বাক্যের সন্নিবেশ অনাবশ্যক ।

স্বতঃ ১০। প্লেফেয়ারের জ্যামিতিতে এইটী স্বতঃসিদ্ধের মধ্যে লিখিত না হইয়া সরল রেখার সংজ্ঞার অনুমান স্বরূপ লিখিত হইয়াছে। প্লেফেয়ারের সরল রেখার সংজ্ঞা এই পুস্তকে পরিগৃহীত হয় নাই ; অতএব মূল গ্রন্থানুসারে এই স্বতঃসিদ্ধটীকে যথা স্থানে সম্বিবেশিত করা গেল।

স্বতঃ ১১। একটী সম কোণ যে আর একটী সম কোণের সমান, তাহা প্রমাণ যোগ্য, এজন্য জ্যামিতিবেত্তারা সকল সম কোণ যে পরস্পর সমান ইহা স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া স্বীকার করেন না।

স্বতঃ ১২। প্লেফেয়ার এই স্বতঃসিদ্ধটির পরিবর্তে আর একটী স্বতঃসিদ্ধ লিখিয়াছেন, তাহা এই ;—দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে, উভয়েই অন্য কোন সরল রেখার সমান্তর হইতে পারে না। ইউক্লিড ও প্লেফেয়ারের রচিত দুইটী স্বতঃসিদ্ধের মধ্যে কোনটী প্রকৃত স্বতঃসিদ্ধ, তাহা ২২এর প্রতিজ্ঞার ব্যাখ্যাতে প্রকাশিত হইবে।

ইউক্লিডের প্রথম অধ্যায় তিন অংশে বিভক্ত হইতে পারে। প্রথম ২৬টী প্রতিজ্ঞার ত্রিভুজের অঙ্কন, উপস্থাপন দ্বারা তাহাদিগের সমানত্ব বা অসমানত্ব এবং তাহাদের কোণ ও ভুজের বিষয় লিখিত হইয়াছে ; ২৭শ হইতে ৩৪শ পর্য্যন্ত আটটী প্রতিজ্ঞাতে সমান্তর রেখা ও সমান্তর বৈশ্বিক ক্ষেত্রের ধর্ম নির্ণীত হইয়াছে ; অবশিষ্ট ১৪টী প্রতিজ্ঞায় যে সকল ত্রিভুজ ও সমান্তরিক উপস্থাপন দ্বারা সর্বতোভাবে মিলিত না হয়, কি রূপে তাহাদিগের ক্ষেত্র ফলের তুলনা করা যাইতে পারে, এবং সমকোণী ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজগুলির পরস্পর সম্বন্ধ কি রূপ, এই সকল স্থিরীকৃত হইয়াছে।

১ম—১। এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে প্রত্যেক বৃত্তের কেন্দ্র অন্য বৃত্তের পরিধিতে স্থাপিত হওয়াতে সহজেই বোধ হইবে যে,

বৃত্ত দ্বয় পরস্পরকে দুই বিন্দুতে ছেদ করিবে ; এই দুই বিন্দুর প্রত্যেককে, নির্দিষ্ট সরল রেখার দুই প্রান্তের সহিত সংযুক্ত করিয়া দিলে, রেখার দুই দিকে দুইটি সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে। “নির্দিষ্ট সীমাবিশিষ্ট” এই বাক্যের দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, রেখাটির অবস্থিতি ও সীমা উভয়ই নিরূপিত আছে।

১ম—২। নির্দিষ্ট বিন্দু, নির্দিষ্ট সরল রেখাতে বা বর্জিত নির্দিষ্ট সরল রেখাতে অবস্থিত না হইলে, এই প্রতিজ্ঞাটি নিম্ন লিখিত তিন রূপ অঙ্কন দ্বারা আট প্রকারে সম্পাদন করা যাইতে পারে ; যথা,—

(১) নির্দিষ্ট বিন্দুকে নির্দিষ্ট রেখার উভয় প্রান্তের সহিত সংযুক্ত করা যাইতে পারে ;

(২) সমবাহু ত্রিভুজটি সংযোজক রেখার উভয় দিকে অঙ্কিত হইতে পারে ;

(৩) কখন সমবাহু ত্রিভুজের খণ্ড বাহুকে উভয় পার্শ্বে বর্জিত করা যাইতে পারে।

এই প্রতিজ্ঞাটির চিত্র অঙ্কিত করিতে হইলে,

(১) নির্দিষ্ট সরল রেখাকে প্রথম বৃত্তের ব্যাসার্ধ স্বরূপ লইতে হইবে ও তাহার সংযুক্ত প্রান্তকে কেন্দ্র করিতে হইবে।

(২) সমবাহু ত্রিভুজের যে বাহু নির্দিষ্ট বিন্দুর সম্মুখীন, তাহাকে প্রথম বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত বর্জিত করিতে হইবে।

(৩) সংযোজক রেখার সম্মুখবর্ত্তী শৃঙ্গকে দ্বিতীয় বৃত্তের কেন্দ্র এবং প্রথম বৃত্তের ব্যাসার্ধের ও সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর সমষ্টি বা অন্তরকে ব্যাসার্ধ করিতে হইবে।

(৪) ত্রিভুজের যে বাহু নির্দিষ্ট রেখার সংযুক্ত প্রান্তের সম্মুখীন, তাহাকে ২য় বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত বর্জিত করিলেই সম্পাদ্য রেখা অঙ্কিত হইবে।

১ম—৪। এই প্রতিজ্ঞাটি জ্যামিতির মূল স্বরূপ জ্ঞান করিলেও করা যায়। ফলত, এই প্রতিজ্ঞার ষত প্রয়োগ আছে, অন্য কোন প্রতিজ্ঞার প্রয়োগ তত দেখা যায় না। কি রূপ অবস্থাপন্ন হইলে, ত্রিভুজ গুলি সর্ব্বতোভাবে সমান হয়, তাহা দর্শাইবার

জন্য ইউক্লিড তিনটি প্রতিজ্ঞা লিখিয়াছেন ; তন্মধ্যে এইটি প্রথম, অষ্টম উপপাদ্য দ্বিতীয় ও ষড়বিংশ উপপাদ্য তৃতীয় । প্রথম প্রতিজ্ঞাটি যেমন স্বীকৃত বিষয় গুলি দ্বারা সম্পাদিত হইয়াছে, ৪র্থ প্রতিজ্ঞাটিও সেই রূপ, উপপাদ্যের প্রথম বলিয়া, স্বতঃসিদ্ধ গুলির সাহায্যে উপপন্ন হইয়াছে । আর এই প্রতিজ্ঞার প্রমাণ ইন্দ্রিয় জ্ঞান সাপেক্ষ বলিলেও বলা যায় ; কেননা, উপস্থাপন কালে যদিও আমরা একটি ত্রিভুজকে তুলিয়া লইয়া আর একটির উপর সংস্থাপন করি না, তথাপি ঐ কার্য ইন্দ্রিয় জনিত পূর্ব সংস্কার দ্বারা কল্পনা করিয়া থাকি ।

১ম—৫। সমান দুইটি বাহু বর্জিত না করিয়া যদি কথ বাহুতে ঘ বিন্দু কল্পনা করিয়া, কগ হইতে কগএর সমান কঙ অংশ ছেদ করা যায়, তবে গঘ ও খঙ সংযুক্ত করিলে, প্রমাণ করা যাইবে পারে যে, ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন কোণ দ্বয় পরস্পর সমান ।

১ম—৬। এই প্রতিজ্ঞাতে কথ বাহু হইতে ক্ষুদ্রতর কগএর সমান অংশ লইতে হইলে, কথএর খ প্রান্ত হইতে আরম্ভ করিয়া সেই অংশ ছেদ করিতে হইবে; ইহা না করিলে উপপত্তিতে চতুর্থ প্রতিজ্ঞা প্রয়োগ করা যায় না ।

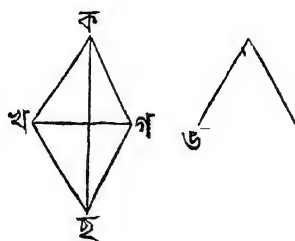
পঞ্চম ও ষষ্ঠ প্রতিজ্ঞার সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত, অর্থাৎ প্রত্যেকের কল্পিত অংশ অন্যের প্রমাণ স্থল । এই দুইটি ব্যতীত আরও অনেক গুলি প্রতিজ্ঞার সম্বন্ধ এই রূপ আছে ;—
১৩ ও ১৪, ১৮ ও ২২, ২৪ ও ২৫, ৪৭ ও ৪৮ ইত্যাদি ।

ইউক্লিডের অষ্টকোশ প্রতিজ্ঞার প্রমাণ অন্তর মুখে আর কতিপয় প্রতিজ্ঞার প্রমাণ ব্যতিরেক মুখে সম্পাদিত হইয়াছে । ষষ্ঠ প্রতিজ্ঞাটি ব্যতিরেক মুখে প্রমাণের প্রথম উদাহরণ ।

১ম—৭। অষ্টম প্রতিজ্ঞা প্রমাণের জন্য এই প্রতিজ্ঞার প্রয়োজন হয়; ইহা ব্যতীত অন্য কোন স্থানে ইহার উপযোগিতা দৃষ্ট হয় না ।

১ম—৮। এই প্রতিজ্ঞা সপ্তমের সাহায্য না লইয়া অন্তর মুখে প্রমাণ করা যায়; তাহা করিলে সপ্তমের আর আবশ্যকতা থাকে না ।

কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজের যেন কখ ও কগ বাহু যথাক্রমে ঘঙ ও ঘচ বাহুর সমান এবং খগ ভূমি ওচ ভূমির সমান; তাহা হইলে খকগ কোণ ওঘচ কোণের সমান হইবে।



ঘঙচ ত্রিভুজকে কখগ ত্রিভুজের সহিত একরূপ করিয়া রাখ, যেন ওচ ভূমি খগ ভূমির সহিত মিলিয়া যায় ও সমান সমান বাহু পরস্পর সংলগ্ন হয় এবং ত্রিভুজ দ্বয়ের শৃঙ্গ পরস্পর বিপরীত ভাবে ভূমির উভয় দিকে পড়ে; ঘঙচ ত্রিভুজকে এই রূপে রাখিলে যেন ছখগ ত্রিভুজের ন্যায় অবস্থিত হইল, অর্থাৎ চ বিন্দু ঘ শৃঙ্গের স্থানীয় হইল। কহ সংযুক্ত কর। তাহা হইলে, খক বাহু খহএর সমান কল্পিত হওয়াতে, খকহ কোণ খহক কোণের সমান; [১ম, ৫।

এই রূপে গকহ কোণ গহক কোণের সমান। অতএব সমস্ত খকগ কোণ সমস্ত খহগ কোণের, অর্থাৎ ওঘচ কোণের সমান।

ত্রিভুজের প্রকার ভেদে, কহ রেখা খ অথবা গ বিন্দু দিয়া গাইতে পারে অথবা বর্ধিত খগকে ছেদ করিতে পারে; তাহা হইলে এই প্রতিজ্ঞার আর দুইটি প্রকরণ হয়; সে দুইটিও উক্ত রূপে সপ্রমাণ হইবে।

১ম—১। ঘঙ রেখার উপর দিকে সমবাহু ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিলে, ইহা কঘঙ ত্রিভুজের সহিত মিলিয়া গাইতে পারে; এজন্য নীচে অঙ্কিত হইয়াছে; যদি সমবাহু ত্রিভুজের শৃঙ্গ ক

শৃঙ্খের সহিত মিলিত না হয়, তবে তাহা উপর দিকে অঙ্কিত হইলেও প্রতিজ্ঞাটী সিদ্ধ হইবে। এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা সরল রেখিক কোণকে ৪, ৮, ১৬ প্রভৃতি অংশে বিভাগ করা যায়।

১ম—১১। নির্দিষ্ট বিন্দু, নির্দিষ্ট রেখার কোন প্রান্তে কম্পিত হইলে, রেখাকে প্রথমত বর্ধিত করিতে হইবে। এই প্রতিজ্ঞার অনুমান সিমসন সাহেবের রচিত; ইউক্লিডের মূল গ্রন্থে এ অনুমানটী নাই।

১ম—১২। নির্দিষ্ট রেখাটী অসীম হওয়া আবশ্যিক; তাহা না হইলে চমচ্ছ বৃত্ত উহাকে দুই বিন্দুতে ছেদ না করিলেও করিতে পারে; দুই বিন্দুতে ছেদ না করিলে, প্রতিজ্ঞাটীর সমাপ্তি করা যায় না।

১ম—১৪। এই প্রতিজ্ঞায় “পরস্পর বিপরীত দিকে” এই বাক্য সন্নিবেশিত করা নিতান্ত আবশ্যিক; কেননা, নির্দিষ্ট রেখার এক দিকে অন্য দুই সরল রেখা সংলগ্ন হইয়া যে দুইটী কোণ উৎপন্ন করে, তাহারা একত্র যোগে যদি দুই সম কোণের সমান হয়, তাহা হইলে শেষোক্ত দুই রেখা কোন ক্রমেই এক সরল রেখা হইতে পারে না।

এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তিতে লিখিত হইয়াছে যে, “কথাগ ও কথাগ কোণ হয় কথাগ ও কথাগ কোণ দ্বয়ের সমান,” এই বাক্যটী একাদশ ও প্রথম এই দুই স্বতঃসিদ্ধের সাপেক্ষ; কেননা, সকল সম কোণ যে পরস্পর সমান, তাহা না জানিলে, কোণ গুলির সমানত্ব জানা যায় না। ইউক্লিড সর্ব প্রথমে এই স্থানে ১১শ স্বতঃসিদ্ধের প্রয়োগ করিয়াছেন। পূর্বের লিখিত হইয়াছে যে, এইটী প্রমাণ যোগ্য বলিয়া কেহ কেহ ইহাকে স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া স্বীকার করেন না; ইহার প্রমাণ এই;—ত্রয়োদশ প্রতিজ্ঞার দুইটী চিত্রে দখ, খগ রেখা গুলি পরস্পর সমান ও খক লম্ব খগ লম্বের সমান জ্ঞান করিয়া যদি প্রথম চিত্রটী দ্বিতীয়ের উপর স্থাপন করা যায়, তবে একের ঘ, খ, গ বিন্দু অন্যের ঘ, খ, গ বিন্দুর সহিত মিলিয়া যাইবে; এক্ষণে যদি খক লম্ব খগ লম্বের সহিত মিলিত না হইয়া দ্বিতীয় চিত্রের খক রেখার ন্যায় অবস্থিত হয়, তবে গখগ কোণ গখক কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে;

অতএব যথাকোণে গণক কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; [সং ১০। সূত্রাৎ যথাকোণে গণক কোণ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর ; কিন্তু যথাকোণে গণক কোণের সমান (সং ১০); অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব। সূত্রাৎ উপস্থাপন করিতে হইলে, একটি চিত্র অপরাপরটির সহিত সম্পূর্ণ রূপে মিলিয়া যাইবে, অর্থাৎ সম কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে।

১ম—১৭। প্রথম অধ্যায়ের ১৬র ও ১৭র প্রতিজ্ঞা ৩২এর প্রতিজ্ঞার অন্তর্গত ; ১৭র প্রতিজ্ঞাটি ১৬র প্রতিজ্ঞার অনুমান বলিয়া লিখিলেও চলিত। ১৭র প্রতিজ্ঞা দ্বারা দ্বাদশ স্বতঃসিদ্ধের অর্থ বিশদ রূপে প্রকাশিত হইয়াছে। এই প্রতিজ্ঞার ও উক্ত স্বতঃসিদ্ধের সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত।

১ম—২০। কেহ কেহ বলেন যে, এই প্রতিজ্ঞাটিকে স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া লিখিলেও চলিত ; কেননা, ত্রিভুজের দুই ভুজ যে একত্র যোগে অবশিষ্ট ভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর, তাহা প্রমাণ না করিলেও কন্যাসে বুঝা যায়। কিন্তু প্রতিজ্ঞা গুলি অনায়াস বোধগম্য হইলেই যে তাহারা স্বতঃসিদ্ধ হইবে, এরূপ স্বীকার করা উচিত হইতেছে না। সরল রেখা যে দুই বিন্দুর ক্ষুদ্রতম দূরত্ব, তাহা এটি প্রতিজ্ঞার একটি অনুমান বলিয়া লিখিলেও হয় ; কেননা, ক বিন্দু খগ রেখার যতই নিকটবর্তী হউক না কেন, খক ও কগ রেখার সমষ্টি খগ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

১ম—২১। এই প্রতিজ্ঞাতে ত্রিভুজের অভ্যন্তরে যে দুইটি রেখা আঁকিত করিতে হইবে, তাহাদিগকে কোন এক বাহুর “দুই প্রান্ত হইতে টানা আবশ্যিক” একথা বলা নিতান্ত প্রয়োজনীয় ; কেননা, তাহা না হইলে কোন কোন ত্রিভুজের ভূমিতে এমন দুই বিন্দু স্থির করা যাইতে পারে যে, তথা হইতে অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু পর্যন্ত দুইটি রেখা টানিলে, তাহাদিগের সমষ্টি দুই ভুজের সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইয়া থাকে। কেবল সমবাহু ত্রিভুজের কিম্বা ভুজ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ভূমি বিশিষ্ট সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরে এরূপ বৃহত্তর দুই রেখা টানা যাইতে পারে না।

১ম—২২। এই প্রতিজ্ঞাতে, তিনটি নির্দিষ্ট রেখার মধ্যে দুইটির সমষ্টি যে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইয়া আবশ্যিক,

এ কথার উপযোগিতা সহজেই বোধ হইবে ; কেননা, $k > x + g$ হইলে, ক্ষুদ্র বৃত্তটি বৃহত্তরের অভ্যন্তরে থাকিবে, এই হেতু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইবে না ; $k = x + g$ হইলেও এই রূপ হইবে এবং দুইটি বৃত্ত পরস্পর এক বিন্দুতে সংস্পর্শ করিবে ; $x > k + g$ হইলে একটি বৃত্ত সম্পূর্ণ রূপে অপরটির বাহিরে থাকিবে এবং $g > k + x$ হইলেও এই রূপ হইবে । যদি নির্দিষ্ট তিনটি রেখা পরস্পর সমান হয়, তবে এই প্রতিজ্ঞাটি অবিকল প্রথম প্রতিজ্ঞা হইয়া উঠে ।

১ম—২৪। এই প্রতিজ্ঞার চিত্র অঙ্কিত করিবার সময় লিখিত হইয়াছে যে, “যদ্য বাহু যেন ঘচ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে,” এই কথা। গুলি মিসসন সাহেব ইহাতে সন্নিবেশিত করিয়াছেন ; ইউক্লিডের মূল গ্রন্থে ইহার উল্লেখ ছিল না । এরূপ না লিখিলে প্রতিজ্ঞাটির তিনটি প্রকরণ হইয়া পড়ে ; যথা—চ বিন্দু (১) ওছ রেখার নিম্নে (২) ওছ রেখাতে এবং (৩) ওছ রেখার উপরে, অবস্থিত হইতে পারে । প্রথম প্রকরণের উপপত্তি, মূলে লিখিত হইয়াছে ; দ্বিতীয়, চ বিন্দু ওছ রেখাঙ্কিত হইলে অনায়াসে বোধ হইবে যে, ওচ ভূমি ওছ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর (স্বতঃ ১) ; তৃতীয়, চ বিন্দু ওছ রেখার উপর অবস্থিত হইলে, $ঘচ + চঙ < ঘছ + ছঙ$ (১ম, ২১) ; অতএব ওচ $<$ ওছ ।

১ম—২৬। পূর্বেই লিখিত হইয়াছে যে, সমানত্ব সম্বন্ধে এইটি ইউক্লিডের তৃতীয় প্রতিজ্ঞা । প্রত্যেক ত্রিভুজে তিন ভূজ ও তিন কোণ এই ছয়টি রাশি আছে ; ইহাদিগের মধ্যে যদি এক ত্রিভুজের পরস্পর নিরপেক্ষ কোন তিন রাশি অন্য ত্রিভুজের তিন রাশির সমান হয়, তবে একের অবশিষ্ট রাশি গুলি যথা-ক্রমে অন্যের অবশিষ্ট রাশি গুলির সমান হইয়া থাকে । কখন কখন সমান হয়ও না ।

ছয় রাশির মধ্যে ত্রিভুজের যে কোন তিন রাশি আর এক ত্রিভুজের তিন রাশির সমান হইতে পারে ; যথা—

- (১) দুই ভূজ ও তদন্তর্গত কোণ ।
- (২) দুই কোণ ও তাহাদের মধ্যস্থিত ভূজ ।
- (৩) দুই ভূজ ও একের সম্মুখীন কোণ ।

(৪) দুই কোণ ও একের সম্মুখীন ভুজ ।

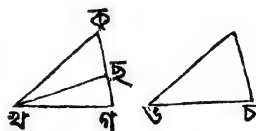
(৫) তিন ভুজ ।

(৬) তিন কোণ ।

ইহাদের মধ্যে ইউক্লিড ৪র্থ প্রতিজ্ঞাতে প্রথম প্রকার, ২৬শ প্রতিজ্ঞাতে দ্বিতীয় ও চতুর্থ প্রকার, এবং ৮ম প্রতিজ্ঞাতে পঞ্চম প্রকার কল্পনা দ্বারা ত্রিভুজ দ্বয়ের সমানত্ব প্রমাণ করিয়াছেন। যষ্ঠের তিন রাশি পরস্পর নিরপেক্ষ নহে; কেননা, দুইটি জানিলেই অবশিষ্ট কোণ স্থির করা যায় (১ম, ৩২); এজন্য এক ত্রিভুজের তিনটি কোণ, অন্যের তিনটি কোণের সমান হইলে, দুই ত্রিভুজ যে অবশ্যই সর্বতোভাবে সমান হইবে, এমন নহে। ইউক্লিড তৃতীয় প্রকার কল্পনা করেন নাই; এতুলেও একটি ত্রিভুজের দুই ভুজ ও একের সম্মুখীন কোণ অপর ত্রিভুজের দুই ভুজ ও একের সম্মুখীন কোণের সমান হইলেই যে ত্রিভুজ দুইটি অবশ্যই সর্বতোভাবে সমান হইবে, এমন নহে। একাদশ প্রতিজ্ঞার চিত্রে চখ সংযুক্ত করিয়া দিলে, চখও ত্রিভুজের চখ ও চঃ ভুজ চখঃ ত্রিভুজের চখ ও চঃ ভুজের সমান এবং খা কোণ দুই ত্রিভুজেরই সাধারণ কোণ; কিন্তু এই দুই ত্রিভুজ সর্বতোভাবে সমান নহে। কিন্তু স্থান বিশেষে দুই ত্রিভুজের একপ সম্বন্ধ থাকিলে, তাহারা সর্বতোভাবে সমান হইতে পারে; যথা—

দুই ত্রিভুজের মধ্যে যদি একের দুই বাহু যথাক্রমে অন্যের দুই বাহুর সমান হয় এবং এক একটি সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ সমান হয়, তবে অপর সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ দ্বয় প্রত্যেকে সূক্ষ্ম, স্থূল বা সম কোণ হইলে, ত্রিভুজ দুইটির অবশিষ্ট বাহু ও কোণ সমান হইবে।

কথাগ ত্রিভুজের কথা ও খগ বাহু যেন ঘগঃ ত্রিভুজের ঘগ ও গঃ বাহুর সমান এবং ক কোণ ঘ কোণের সমান; তাহা হইলে যদি গ ও চ উভয়েই



সূক্ষ্ম, স্থূল বা সম কোণ হয়, তবে ত্রিভুজ দুইটি সর্বতোভাবে সমান হইবে।

প্রথমত, গ ও চ কোণ যেন উভয়েই সূক্ষ্ম কোণ হইল ; এক্ষণে অবশিষ্ট কগ বাহু যদি অবশিষ্ট ঘচ বাহুর সমান না হয়, তবে কছ যেন ঘচএর সমান হইল । তাহা হইলে, কথছ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান (১ম, ৪) এবং কছখ কোণ ঘচঙ কোণের সমান আর খছ ভূমি ওচএর সমান । আবার খগ বাহু ওচএর সমান হওয়াতে (কম্পনা), খছ বাহু খগএর সমান ; এই হেতু খছগ কোণ খগছ কোণের সমান (১ম, ৫) ; অতএব খছগ একটি সূক্ষ্ম কোণ ; এজন্য খছক স্থূল কোণ (১ম, ১০) । আবার খছক কোণ, চ কোণের সমান প্রমাণ হইয়াছে ; এজন্য তাহা সূক্ষ্ম কোণ, অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব ; সুতরাং কগ, ঘচএর অসমান নহে, অর্থাৎ সমান এবং একের অবশিষ্ট কোণ গুলি, অন্যের অবশিষ্ট কোণ গুলির সমান । দ্বিতীয়ত, গ ও চ উভয়েই স্থূল কোণ হইলে, প্রতিজ্ঞার উপপত্তি উক্তরূপই হইবে । তৃতীয়ত, দুই কোণ প্রত্যেকে সম কোণ হইলে প্রতিজ্ঞাটি ২৬শ প্রতিজ্ঞার একটি প্রকরণ মাত্র হইয়া পড়ে ।

১ম, ২৭—২৯ । ২৭শ ও ২৮শ এই দুই প্রতিজ্ঞার সহিত ২৯শ প্রতিজ্ঞার সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত । এই পুস্তকে ২৯শ প্রতিজ্ঞা ইউক্লিডের স্থূল গ্রন্থানুসারে দ্বাদশ স্বতঃসিদ্ধের সাহায্যে সপ্রমাণ হইয়াছে ; কোন কোন টীকাকার এ প্রতিজ্ঞাটী অন্যরূপে প্রমাণ করিয়াছেন ; তাহা এই—

যদি কছজ কোণ ছজঘএর সমান না হয়, তবে টছ সরল রেখা টানিয়া টছজ কোণকে ছজঘএর সমান কর এবং টছকে ঠ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া দাও ; তাহা হইলে টঠ সরল রেখা গঘএর সমান্তর হইবে (১ম, ২৭) । আর কথ, গঘএর সমান্তর (কম্পন) ; সুতরাং কথ ও টঠ উভয়েই গঘএর সমান্তর ; কিন্তু দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে, উভয়েই অন্য কোন সরল রেখার সমান্তর হইতে পারে না (প্যেফেয়ারের স্বতঃসিদ্ধ) ; অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব, ইত্যাদি । ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধের পরিবর্তে প্যেফেয়ার এই স্বতঃসিদ্ধটী তাঁহার অনুবাদিত জ্যামিতিতে লিখিয়া দিয়াছেন । টীকাকারেরা এরূপ মত প্রকাশ করিয়াছেন যে, ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধটী, স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া গ্রহণ করা

যাইতে পারে না । সিমসন সাহেব এইটিকে প্রতিজ্ঞা জ্ঞান করিয়া, দুইটি নূতন সংজ্ঞা, একটি স্বতঃসিদ্ধ ও পাঁচটি প্রতিজ্ঞার সাহায্যে প্রমাণ করিয়াছেন। দুই সরল রেখা এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইলে, সমান্তর ত্রাহাদের উপর যদি কোন তৃতীয় রেখার সম্পাত হয়, তবে তদ্বারা উৎপন্ন অন্তরস্থ দুই কোণ, দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে অথবা ত্রিকূজের যে দুইটি কোণ লও, তাহার। একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে (১ম, ১৭) । এই প্রতিজ্ঞাটির সহিত ইউক্লিডের ১২শ স্বতঃসিদ্ধের সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত । ইউক্লিডের ১৭শ প্রতিজ্ঞা স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া গৃহীত হয় না, ইহা প্রমাণ সাপেক্ষ ; তবে যাহার সহিত ইহার বিপরীত সম্বন্ধ, তাহা কিরূপে স্বতঃসিদ্ধ বলিয়া গৃহীত হইতে পারে ? এই প্রশ্নের উত্তর দেওয়া সহজ নয় বলিয়া, জ্যামিতি-বেদাদিগের মধ্যে কেহ কেহ সমান্তর রেখার একটি নূতন সংজ্ঞা দ্বারা, কেহ কেহ একটি নূতন স্বতঃসিদ্ধ দ্বারা আর কেহ কেহ কেবল সরল ও সমান্তর রেখার সংজ্ঞা দ্বারা, সমান্তর রেখা সম্বন্ধীয় যাবতীয় প্রতিজ্ঞার উপপাদন করিতে চেষ্টা করিয়াছেন । কিন্তু দুই সহস্র বর্ষেও কেহ তাহাতে কৃতকার্য হইতে পারেন নাই, এ কথা বলিলে অত্যাশ্চর্য্য দোষে দূষিত হইতে হয় না । ইউক্লিড ৩৫শ সংজ্ঞাতে এই মাত্র লিখিয়া সন্তুষ্ট হইয়াছেন যে, যে দুই রেখা উত্তরোত্তর বর্জিত হইলেও মিলিত হয় না, তাহাদিগের নাম সমান্তর রেখা ; এই লক্ষণ দ্বারা সমান্তর রেখার কোন বিশেষ ধর্ম্ম ব্যক্ত হয় নাই ; কেবল একটি গুণের অভাবের পরিচয় দেওয়া হইয়াছে ; এই নিমিত্তই এ বিষয়টি কঠিন হইয়া পড়িয়াছে । সমান্তর রেখা সম্বন্ধীয় প্রতিজ্ঞা গুলি প্রমাণ করিবার জন্য ইউক্লিডের ১২শ স্বতঃসিদ্ধের পরিবর্তে প্রায় ত্রিশ প্রকার নূতন উপায়ের উদ্ভাবন হইয়াছে, তন্মধ্যে লেজেণ্ডর ও প্লেফেরার লিখিত দুইটি প্রণালী সর্বাপেক্ষা উৎকৃষ্ট বলিয়া কেহ কেহ স্বীকার করিয়া থাকেন । লেজেণ্ডরের উদ্ভাবিত উপায়টি প্রায় দোষ শূন্য, কিন্তু শিক্ষার্থীদিগের পক্ষে অত্যন্ত কঠিন ; এজন্য আমরা তাহার উল্লেখ করিলাম না । প্লেফেরার স্বতঃসিদ্ধটি নূতন

বলিয়া বোধ না হইয়া ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধের রূপান্তর বলিয়া বোধ হইতেছে আর উহাকে অবিবাদে ৩শ প্রতিজ্ঞার অনুমান স্বরূপ গ্রহণ করা যাইতে পারে । উহা যে ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধের রূপান্তর তাহা সহজেই বোধ হইবে ; যথা—

২৮শ প্রতিজ্ঞায় কল্পিত হইয়াছে যে, খজ্জ ও ছজ্জ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইলে, কখ ও গঘ সমান্তর হইবে ; অতএব ছ দিয়া অন্য কোন সরল রেখা টানিলে, তাহা ছজ্জের সহিত যে কোণ উৎপন্ন করিবে, সেইটি ও ছজ্জ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অথবা বৃহত্তর হইবে ; তাহা হইলে অঙ্কিত রেখাটি ও গঘ সমান্তর হইতে পারে না, অর্থাৎ তাহার পরস্পর সংলগ্ন হইবে । অতএব স্পষ্টই বোধ হইতেছে যে, ঐ দুইটি স্বতঃসিদ্ধের কোন প্রভেদ নাই ; একটি আর একটির রূপান্তর মাত্র । এই সকল কারণ বশত পাঠক বৃন্দেব অনায়াসেই বোধ হইবে যে, ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধের পরিবর্তে প্লেফেরারের স্বতঃসিদ্ধ গ্রহণ করিলে কিছুই লাভ হইবে না ; কেননা, যদি উহাদের মধ্যে একটি স্বতঃসিদ্ধ না হয়, তাহা হইলে অপরটিও স্বতঃসিদ্ধ হইতে পারে না । এই নিমিত্ত মূলে ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধ গৃহীত হইয়াছে । সংক্ষেপে একথা বলা যাইতে পারে যে, যে সকল টীকাকার দ্বাদশের পরিবর্তে একটি নূতন স্বতঃসিদ্ধ উদ্ভাবিত করিয়াছেন তাহাদের উদ্ভাবন প্রণালী ইউক্লিডের প্রণালী অপেক্ষা সহজ নয় ; ইউক্লিডের স্বতঃসিদ্ধটি একবার স্বীকার করিয়া লইলে সমান্তর সরল রেখা সংক্রান্ত যাবতীয় বিষয় অনায়াস বোধগম্য হইয়া উঠে ।

১ম—৩২ । এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা স্পষ্টই বুঝা যায় যে, কোন ত্রিভুজের একটি কোণ আর দুইটির সমষ্টির সমান হইলে সেই কোণটি সম কোণ হইবে আর সমবাহু ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ সম কোণের দুই তৃতীয়াংশের সমান । পুনশ্চ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের একটি কোণ সম কোণ হইলে অপর দুইটি কোণের প্রত্যেকে অর্ধ সম কোণ হইবে ।

ত্রিভুজের কোন বাহু বর্ধিত না করিয়া একটি কৌণিক বিন্দু দিয়া সম্মুখীন বাহুর সমান্তর রেখা টানিলেই প্রমাণ করা যায়

যে “ত্রিভুজের অন্তরস্থ তিন কোণ দুই সম কোণের সমান।”

কোন রেখাকে বর্জিত না করিলেও এক প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ করিয়া এক সরল রেখা টানা যাইতে পারে। কথ যেন নির্দিষ্ট সরল রেখা ; কথএর উপর (চিত্র করিয়া লও) কথগ সম বাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিয়া খগকে য পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর এবং গঘকে খগএর সমান কর। কথ রেখা কথএর সহিত সম কোণ করিবে। গঘ বাহু গকএর সমান বলিয়া, গঘক কোণ গকঘ কোণের সমান এবং গখক কোণ গকখ কোণের সমান ; এই সমান সমান কোণের সমষ্টি, অর্থাৎ য ও খ কোণ একত্র যোগে খকঘ কোণের সমান ; সুতরাং খকঘ কোণ একটী সম কোণ (১ম, ৩১)।

৩২শ প্রতিজ্ঞার দুইটি অনুমান সিমসন সাহেবের লিখিত ; ইউক্লিডের মূল গ্রন্থে এই দুইটি দৃষ্ট হয় না। ২য় অনুমানটি সকল প্রকার ক্ষেত্র দ্বারা উপপন্ন হইতে পারেনা। ইউক্লিডের লিখিত যাবতীয় কোণ দুই সম কোণ অপেক্ষা নূন ; তিনি প্রবৃত্ত অর্থাৎ দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণের বিষয় উল্লেখ করেন নাই ; আর তাহার গ্রন্থে প্রবৃত্ত কোণ বিশিষ্ট ক্ষেত্রের লক্ষণ কিম্বা তাহার নামও নাই। ইহাতে স্পষ্ট বোধ হইতেছে যে, এরূপ ক্ষেত্রের পরিচয় দেওয়া তাহার উদ্দেশ্য ছিল না। ৩২শ প্রতিজ্ঞার ২য় অনুমানটি এক বা তদধিক প্রবৃত্ত কোন বিশিষ্ট ক্ষেত্র দ্বারা সপ্রমাণ হয় না। ১ম অনুমানটি সকল প্রকার ক্ষেত্রেই প্রমাণ সিদ্ধ।

১ম—৩৫। ১ম অধ্যায়ের ৪র্থ প্রতিজ্ঞায় লিখিত হইয়াছে যে, “ত্রিভুজ দুইটি পরস্পর সমান হইবে।” এখানে “সমান” ইহার অর্থ, সর্ব্বতোভাবে সমান, অর্থাৎ একটী ত্রিভুজের উপর আর একটী ত্রিভুজ স্থাপন করিলে তাহারা সম্যক প্রকারে মিলিয়া যাইবে। ৩৫শ প্রতিজ্ঞায় “সমান” শব্দের অর্থ অন্য প্রকার। “সমাস্তরিক দুইটি সমান” ইহা দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, একের ক্ষেত্রফল অন্যের ক্ষেত্রফলের সমান।

১ম—৪০। এই প্রতিজ্ঞাটি অম্বয় মুখেও প্রমাণ করা যায়, যথা ;—খগ ও গঘ সংযুক্ত কর ; তাহা হইলে খঘগ ত্রিভুজ

ঘঙচ ত্রিভুজের সমান (১ম, ৩৮); আর কখনও ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান কম্পিত হইয়াছে; সুতরাং কখনও ত্রিভুজ ঘঙগ ত্রিভুজের সমান (স্বতঃ ১); অতএব কখনও, খগএর সমান্তর (১ম, ৩৯)।

১ম—৪৫। একটি চতুর্ভুজ সরল বৈখিক ক্ষেত্র লইয়া এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তি হইয়াছে। ক্ষেত্রটি পঞ্চ অথবা তদধিক ভুজ বিশিষ্ট হইলেও, ঐ রূপেই অঙ্কন ও উপপত্তি হইত।

১ম—৪৭। কথিত আছে যে, গ্রীস দেশীয় মহাপণ্ডিত পিথাগোরাস ৩২শ ও ৪৭শ প্রতিজ্ঞার আবিষ্কার করেন। ৪৭শের ন্যায় প্রয়োজনীয় প্রতিজ্ঞা জ্যামিতিতে প্রায় দৃষ্ট হয় না।

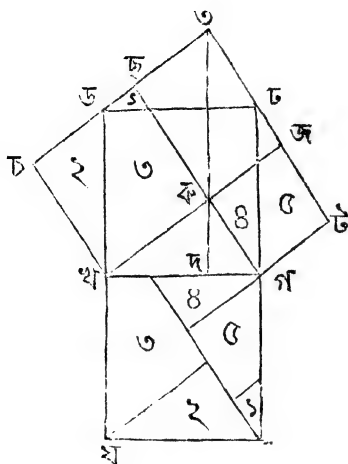
সমকোণী ত্রিভুজের সম কোণের সম্মুখীন বাহুর নাম কর্ণ; আর অপর দুই বাহুর মধ্যে অবস্থা ভেদে একটিকে কোটি ও অপরটিকে ভূজ বলা যায়।

সমকোণী ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর সমচতুর্ভুজ গুলি ভিন্ন ভিন্ন রূপে অঙ্কিত করা যায়। ইউক্লিড তন্মধ্যে এক রূপে অঙ্কিত করিয়াছেন। সর্ব্ব শূন্য ছয় প্রকারে এই প্রতিজ্ঞার অঙ্কন হইতে পারে, যথা;—

- (১) তিন সমচতুর্ভুজ তিন বাহুর বহির্দিকে।
- (২) তিন সমচতুর্ভুজ তিন বাহুর অন্তর দিকে।
- (৩) বৃহত্তর সমচতুর্ভুজটি কর্ণের অন্তর দিকে ও ক্ষুদ্রতর দুইটি অন্য দুই বাহুর বহির্দিকে।
- (৪) বৃহত্তর সমচতুর্ভুজটি কর্ণের বহির্দিকে ও ক্ষুদ্রতর দুইটি অন্য দুই বাহুর অন্তর দিকে।
- (৫) বৃহত্তর ও একটি ক্ষুদ্রতর সমচতুর্ভুজ দুই ভুজের বহির্দিকে ও অপর সমচতুর্ভুজ অবশিষ্ট ভুজের অন্তর দিকে।
- (৬) বৃহত্তর ও একটি ক্ষুদ্রতর সমচতুর্ভুজ দুই ভুজের অন্তর দিকে ও অপর সমচতুর্ভুজ অবশিষ্ট ভুজের বহির্দিকে।

উক্তরূপ অঙ্কন হইলে উপপত্তিও বিভিন্ন প্রকার হইতে পারে; ইউক্লিড কেবল প্রথম প্রকারের উপপত্তি করিয়াছেন; এখানে আর দুই প্রকারের উপপত্তি লিখিত হইল; অবশিষ্ট

শ্রুতি বিদ্যার্থীগণ অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা স্বরূপ জ্ঞান করিয়া
প্রমাণ করিবেন ।



(১ম) এই চিত্রে কচ ও কট এই দুইটি ক্ষেত্র কখ ও কগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ; খড ও গত এই দুই রেখা খগএর উপর লম্ব ; ডত ও তক সংযুক্ত কর এবং তককে দ পর্ব্যন্ত বর্দ্ধিত কর । এক্ষণে খচড ও গটত এই দুই ত্রিভুজের প্রত্যেকে কখগ ত্রিভুজের সমান ; ডগ একটা সমচতুর্ভুজ এবং ইহা খগ কণের অন্তর দিকে স্থাপিত হইয়াছে ।

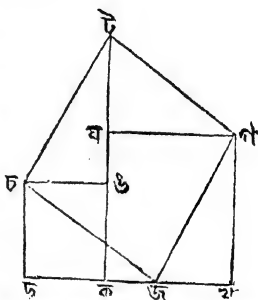
পরে, কছত ত্রিভুজ কখগ ত্রিভুজের সমান ; এজন্য ছতক কোণ, কগখ অর্থাৎ চডখ কোণের সমান ; সুতরাং খড ও কত স্ফিরা পরস্পর সমান্তর । এই রূপে কত ও গত পরস্পর সমান্তর ; অতএব খত ও গত এই দুইটি ক্ষেত্র সমান্তরিক ।

পুনশ্চ, খছ সমচতুর্ভুজ খত সমান্তরিকের সমান ; (১ম, ৩৫) আবার খত সমান্তরিক ডদ সমান্তরিকের সমান ; অতএব খছ সমচতুর্ভুজ ডদ সমান্তরিকের সমান । এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে,

গজ সমচতুর্ভুজ চন্দ সমান্তরিকের সমান। সুতরাং খহ ও গজ সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে ডগ সমচতুর্ভুজের সমান।

তিন ভুজের বহির্দিকে তিনটি সমচতুর্ভুজ আঁকিত করিয়া পূর্ব পৃষ্ঠের চিত্রে যেরূপ ১,২ ইত্যাদি সংখ্যা লিখিত হইয়াছে, তদ্রূপে চতুর্ভুজ তিনটিকে বিভক্ত করিলে, প্রত্যক্ষ হইবে যে, বৃহত্তর ক্ষেত্রটি ক্ষুদ্রতর দইটির সমান।

(২য়) কাণ্ড কচ দুইটি সম
চতুর্ভুজ একপে স্থাপন কর যে,
তাহাদের কথ ও কছ ভূমি
এক রেখা হইয়া ছজ ও টটকে
কথের সমান কর এবং টট,
চজ, জগ ও গট সংযুক্ত করিয়া
দাও। এক্ষণে সহজেই প্রমাণ
হইবে যে, টট ও ত্রিভুজ গজখ
ত্রিভুজের এবং টটগ ত্রিভুজ



চছজ ত্রিভুজের সহিত সৰ্বতোভাবে সমান। অতএব টঘগ ও টঙচ ত্রিভুজ একত্র যোগে চছজ ও গজখ এই দুই ত্রিভুজের সমষ্টির সমান; এই দুই সমান বস্তুতে গঘওচজ ক্ষেত্র যোগ করিলে, টচজগ চতুর্ভুজ চক ও কগ বর্গ ক্ষেত্র দ্বয়ের সমষ্টির সমান। আবার টঘগ, টচঙ, চছজ ও জখগ এই চারিটি ত্রিভুজ পরস্পর সৰ্বতোভাবে সমান হওয়াতে অনায়াসে প্রমাণ করা যায় যে, টচজগ ক্ষেত্র সমচতুর্ভুজ এবং ইহা জগ কর্ণের উপর অঙ্কিত হইয়াছে আর চক ও কগ সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের বাহু ঞাল জখ ও খগ বাহুর সমান; সুতরাং জখ ও খগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয় জগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান।

৪৭শ প্রতিজ্ঞার এই চিত্র দেখিলেও প্রতীত হইবে যে, দুইটি ক্ষুদ্র সমচতুর্ভুজকে খণ্ড খণ্ড করিয়া বৃহত্তরের উপর রাখিলে ঠিক বৃহৎ সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

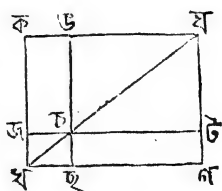
২য় অধ্যায় ।

সংজ্ঞা.

১। প্রত্যেক সমকোণী সমান্তর ত্রৈখিক ক্ষেত্রে, অর্থাৎ আয়তকে, কোন একটি সম কোণাশ্রিত দুই বাহুর অন্তর্গত বলা যায় ।

২। প্রত্যেক সমান্তরিকের অভ্যন্তরীণ ও কর্ণের পরিতস্থ কোন একটি সমান্তরিক ও দুইটি অনুপূরক ক্ষেত্রের যোগে যে ক্ষেত্র হয়, তাহাকে শঙ্কু ক্ষেত্র বলা যায় ।

যথা, জছ সমান্তরিক এবং কচ ও চগ দুইটি অনুপূরক ক্ষেত্র একত্র যোগে, শঙ্কু হইয়াছে ; সংক্ষেপে উল্লেখ করিতে হইলে, এই ক্ষেত্র যে যে সমান্তরিকের যোগে উৎপন্ন হয়, তাহাদের পরস্পর সম্মুখীন



কৌণিক বিন্দুতে লিখিত অক্ষর গুলি দ্বারা ব্যক্ত করিতে হইবে, যথা :—কছট অথবা ওজগ ।

১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সরল রেখার মধ্যে যদি একটী কতিপয় অংশে বিভক্ত হয়, তবে এই দুই রেখার অন্তর্গত আয়ত, বিভাজিত রেখার ভিন্ন ভিন্ন অংশের ও অবিভাজিত রেখার অন্তর্গত আয়ত সমষ্টির সমান হইবে ।

ক ও খগ দুই সরল রেখার মধ্যে খগ যেন ঘ, ঙ বিন্দুতে কতিপয় অংশে বিভক্ত হইয়াছে ; ক ও খগএর অন্তর্গত আয়ত, ক ও খঘএর, ক ও ঘঙএর এবং ক ও ঙগএর অন্তর্গত আয়ত সমষ্টির সমান হইবে ।

খ বিন্দু হইতে খগএর খ ঘ ঙ গ
সহিত সম কোণ করিয়া খচ
সরল রেখা টান ; [১ম, ১১।
এবং খচ হইতে কএর সমান ছ জ
খছ অংশ ছেদ কর ; [১ম, ৩। চ

ছ বিন্দু দিয়া খগএর সমান্তর ছজ সরল রেখা টান ;
এবং ঘ, ঙ ও গ বিন্দু দিয়া খছএর সমান্তর ঘট, ঙঠ ও
গজ সরল রেখা টান । [১ম, ৩১।

এক্ষণে, খজ আয়ত, খট, ঘঠ ও ঙজ এই কএকটী
আয়তের সমান । ইহাদের মধ্যে খজ আয়ত ক ও
খগএর অন্তর্গত ; কেননা, এই আয়তটী খছ ও খগএর
অন্তর্গত এবং খছ সরল রেখা কএর সমান ; [অঙ্কন।
খট আয়ত ক ও খঘএর অন্তর্গত ; কেননা ইহা খছ ও
খঘএর অন্তর্গত এবং খছ, কএর সমান ; [অঙ্কন।

আর ঘট, ক ও ঘঙর অন্তর্গত ; কেননা, ঘট, খছএর সমান এবং খছ, কএর সমান ; [১ম, ৩৪ ।

এই রূপে ঙজ, ক ও ঙগএর অন্তর্গত ।

সুতরাং ক ও খগএর অন্তর্গত আয়ত, ক ও খঘএর, ক ও ঘঙর এবং ক ও ঙগএর অন্তর্গত আয়ত সমষ্টির সমান ।

অতএব দুই সরল রেখার ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাত্ত ।

বীজঃ উপঃ । খগ রেখার অংশ গুলি যেন, প, ফ, ব ;
 \therefore খগ = প + ফ + ব ; \therefore ক.খগ = ক (প + ফ + ব) = কপ + কফ + কব ।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১ । দুই সরল রেখা প্রত্যেকে যদি কতিপয় অংশে বিভক্ত হয়, তবে এই দুই রেখার অন্তর্গত আয়ত, প্রত্যেক রেখার এক একটা অংশ লইলে যে সকল আয়ত হয় তাহাদিগের সমষ্টির সমান হইবে ।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক সরল রেখা কোন দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার ও প্রত্যেক অংশের অন্তর্গত আয়ত একত্র যোগে, সমুদয় রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

কথ সরল রেখা যেন গা বিন্দুতে কোন দুই অংশে বিভক্ত হইয়াছে ; কথ ও খগএর অন্তর্গত আয়ত এবং কথ ও কগএর অন্তর্গত আয়ত একত্র যোগে, কথএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।*

* “কথ ও কগএর অন্তর্গত আয়ত ” এ প্রকার বাক্য পুনঃ পুনঃ প্রয়োগ না করিয়া কখন কখন সংক্ষেপে “কথ, কগএর

কথএর উপর কথঙথ সমচতুর্ভুজ $\overline{\text{ক গ থ}}$ অঙ্কিত কর ; [১ম, ৪৬ ।

এবং গ বিন্দু দিয়া কথ বা থঙর সমান্তর গচ রেখা টান । [১ম, ৩য় ।

এক্ষণে, কঙ ক্ষেত্র, কচ ও গঙ আয়ত $\overline{\text{ঘ চ ঙ}}$ দ্বয়ের সমান ;

ইহাদের মধ্যে কঙ ক্ষেত্র, কথএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ; আর কচ আয়ত, কথ ও কগএর অন্তর্গত ; কেননা ইহা যক, কগএর অন্তর্গত এবং যক, কথএর সমান ।

আবার গঙ আয়ত, কথ ও থগএর অন্তর্গত ; কেননা থঙ রেখা কথএর সমান । সুতরাং কথ, কগএর আয়ত এবং কথ, থগএর আয়ত একত্র যোগে, কথএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । ক যেন সমস্ত রেখা ; ম ও ন ইহার দুই অংশ, অর্থাৎ, $\text{ক} = \text{ম} + \text{ন}$; $\therefore \text{ক} \times \text{ক} = \text{ক} (\text{ম} + \text{ন})$; অথবা, $\text{ক}^2 = \text{কম} + \text{কন}$ ।

অঃ প্রঃ—২ । কথগ সমকোণী ত্রিভুজের ক সম কোণ হইতে ভূমির উপর কথ লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে,

$$\text{খগ.খস} + \text{খগ.গঘ} = \text{খস}^2 + \text{ঘগ}^2 + ২\text{কঘ}^2 ।$$

আয়ত ” এই রূপ লেখা যাইবে ; আর “ কথএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ” ইহার পরিবর্তে “ কথএর উপর সমচতুর্ভুজ ” এই রূপ প্রকাশিত হইবে ।

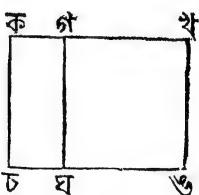
দ্বিতীয় অধ্যায়

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক সরল রেখা কোন দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখা ও এক অংশের অন্তর্গত আয়ত, দুই অংশের অন্তর্গত আয়ত ও প্রকৌণিক অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

কথ সরল রেখা যেন গা বিন্দুতে কোন দুই অংশে বিভক্ত হইয়াছে ; কথ, খগএর আয়ত, কগ ও গখএর আয়ত এবং খগএর উপর সমচতুর্ভুজ এই দুইএর যোগফলের সমান হইবে ।

খগএর উপর খগুঘগ সম-
চতুর্ভুজ অঙ্কিত কর ; উল্কে চ
পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর এবং ক বিন্দু
দিয়া গঘএর বা খগুর সমান্তর
কচ সরল রেখা টান । [১ম, ৩১।



এক্ষণে, কঙ আয়ত, কঘ ও গঙ ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান ।
ইহাদের মধ্যে কঙ আয়ত, কথ ও খগএর অন্তর্গত ;
কেননা ইহা কথ, খগুর অন্তর্গত এবং খঙ, খগএর সমান ;
আর কঘ আয়ত, কগ ও গখএর অন্তর্গত ; কেননা গঘ,
গখএর সমান ;

এবং গঙ ক্ষেত্র, গখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ।

সুতরাং কথ, খগএর আয়ত, কগ ও গখএর আয়ত এবং
খগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ। ক যেন সমস্ত রেখা; ম ও ন ইহার দুই অংশ :
অর্থাৎ, $k = m + n$, $\therefore k \times n = n (m + n)$;

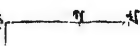
অথবা $k n = m n + n^2$;

অঃ প্রঃ—৩। এক নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এক্রূপে বর্দ্ধিত
করিতে হইবে যেন, সমস্ত বর্দ্ধিত রেখা ও বর্দ্ধিত অংশের
অন্তর্গত আয়ত, নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের
দ্বিগুণ হয়।

৪ প্রতিজ্ঞা--উপপাদ্য।

এক সরল রেখা কোন দুই অংশে বিভক্ত হইলে,
সমস্ত রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, দুই অংশের
উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ এবং দুই অংশের
অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমষ্টির সমান হইবে।

কথ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে কোন দুই অংশে
বিভক্ত হইয়াছে ; কথএর উপর সমচতুর্ভুজ কগএর উপর
ও গথএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং কগ, গথএর দ্বিগুণিত
আয়তের সমষ্টির সমান হইবে।

কথএর উপর কঘওথ সমচতুর্ভুজ  $k \text{---} g$
অঙ্কিত কর ; [১ম, ৩৬। জ

এবং থঘ সংযুক্ত করিয়া, গ বিন্দু দিয়া

কঘ বা থঙর সমান্তর গচ্চ সরল রেখা

এবং ছ বিন্দু দিয়া কথ বা ঘঙর সমান্তর জট সরল রেখা
টান। [১ম, ৩১।

পরে গচ, কঘএর সমান্তর বলিয়া, এবং থঘ ইহাদের
উপর পতিত হওয়াতে, বহিস্থ থছগ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্তী

খ্যক কোণের সমান ; [১ম, ২৯ ।

ইহাদের মধ্যে খ্যক কোণ, যখক কোণের সমান, [১ম, ৫ ।

কেননা, কয ও কখ প্রত্যেকে সমচতুর্ভুজের বাহু বলিয়া,
পরস্পর সমান ;

অতএব গছখ কোণ, গখছ কোণের সমান ; [স্বতঃ ১ ।

এই হেতু খগ বাহু গছ বাহুর সমান ; [১ম, ৬ ।

এই দুইটি বাহুর মধ্যে, গখ বাহু ছুটএর এবং গছ বাহু
খটএর সমান ; [১ম, ৩৪ ।

সুতরাং গছটখ ক্ষেত্র সমবাহু ।

আর ইহা সম কোণ বিশিষ্টও বটে ; কারণ গছ, খটএর
সমান্তর এবং ইহাদের উপর গখ রেখার পাত হইয়াছে
বলিয়া, টখগ ও খগছ কোণ দ্বয় একত্র যোগে, দুই সম
কোণের সমান । [১ম, ২৯ ।

ইহাদের মধ্যে গখট এক সম কোণ, [১ম, ৩০ সং ।

অতএব ছগখ কোণও এক সম কোণ । [স্বতঃ ৩ ।

এই হেতু ইহাদের সম্মুখীন গছট ও খটছ কোণ প্রত্যেকে
সম কোণ । [১ম, ৩৪ ও স্বতঃ ১ ।

সুতরাং গছটখ ক্ষেত্র সমকোণী ; আর ইহা যে সমবাহু,
তাহা সপ্রমাণ হইয়াছে ;

অতএব ইহা একটি সমচতুর্ভুজ এবং গখএর উপর অঙ্কিত
হইয়াছে ।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, জাচ একটি সমচতুর্ভুজ এবং
ইহা জছএর উপর অঙ্কিত হইয়াছে ; আর জছ রেখা
কগএর সমান । [১ম, ৩৪ ।

অতএব জচ ও গট এই দুইটি ক্ষেত্র কগ ও গখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ।

আবার কছ অনুপূরক ক্ষেত্র ছঙ অনুপূরক ক্ষেত্রের সমান, [১ম, ৪৩।

এবং কছ আয়ত, কগ ও গখএর অন্তর্গত ; কেননা গছ, গখএর সমান ;

অতএব ছঙ আয়ত, কগ ও গখএর অন্তর্গত আয়তের সমান । [স্বতঃ ১।

সুতরাং কছ ও ছঙ একত্র যোগে, কগ ও গখএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ;

আর জচ ও গট, কগ ও গখএর উপর দুই সমচতুর্ভুজ ।

অতএব জচ, গট, কছ ও ছঙ এই চারি ক্ষেত্র, কগএর উপর ও গখএর উপর সমচতুর্ভুজের এবং কগ ও গখএর দ্বিগুণিত আয়তের সমষ্টির সমান ;

আর জচ, গট, কছ ও ছঙ এই চারিগীতে, সমস্ত কখঙখ ক্ষেত্র হইয়াছে এবং এই ক্ষেত্রটি কখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ;

সুতরাং কখএর উপর সমচতুর্ভুজ, কগএর উপর ও গখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং কগ, গখএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অনুমান । এই উপপত্তি হইতে সহজেই বোধ হইবে যে, সমচতুর্ভুজের অভ্যন্তরীণ ও কর্ণের পারিতস্থ সমান্তরিক গুলি সমচতুর্ভুজ ।

বীজঃ উপঃ । ক যেন সমস্ত রেখা এবং ঘ ও ন ইহার দুই অংশ ; অর্থাৎ, $k = m + n$; $\therefore k^2 = (m + n)^2 = m^2 + n^2 + 2mn$ ।

অঃ প্রঃ—৪। যদি কখগ সমকোণী ত্রিভুজের ক সম কোণ হইতে ভূমির উপর কখ লম্ব টান। যায়, তবে খঘ ও ঘগএর অন্তর্গত আয়ত, কসএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন সরল রেখা দুই সমান এবং দুই অসমান অংশে ছেদিত হইলে, অসমান অংশ দ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত এবং ছেদ বিন্দু দ্বয়ের মধ্যস্থ রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, নির্দিষ্ট রেখার অর্দ্ধেকের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

কখ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে দুই সমান অংশে ও ঘ বিন্দুতে দুই অসমান অংশে ছেদিত হইয়াছে ; কঘ, ঘখএর আয়ত এবং গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

গখএর উপর গঙচখ সম- $\frac{k}{2}$ $\frac{g}{2}$ $\frac{gh}{2}$
চতুর্ভুজ অঙ্কিত কর; [১ম, ৪৮]

এবং খঙ সংযুক্ত করিয়া,

য বিন্দু দিয়া গঙ বা খচএর,

ছ চ

সমান্তর ঘজছ সরল রেখা, জ বিন্দু দিয়া গখ বা গঙএর সমান্তর টাউ সরল রেখা এবং ক বিন্দু দিয়া গঠ বা খউএর সমান্তর কট সরল রেখা টান। [১ম, ৩১।

পরে, গজ অনুপূরক ক্ষেত্র জচ অনুপূরক ক্ষেত্রের সমান

বলিয়া, প্রত্যেকের সহিত ঘড় যোগ করিলে, সমস্ত গড়,
সমস্ত ঘড়ের সমান হইবে। [স্বতঃ ২।

ইহাদের মধ্যে গড়, কঠের সমান ; [১ম, ৩৬।

কেননা কগ, গথের সমান , [কল্পনা।

অতএব ঘড়ও কঠের সমান ; [স্বতঃ ১।

প্রত্যেকের সহিত গজ যোগ করিলে, সমস্ত কজ, ঘড়ও
গজের সমষ্টির সমান হইবে : [স্বতঃ ২।

ইহাদের মধ্যে কজ ক্ষেত্র কঘ, ঘথের আয়ত ; কেননা
ঘজ, ঘথের সমান ; [২য়, ৪, অনু।

এবং ঘড় ও গজ একত্র যোগে, গড়ছ শঙ্কু ক্ষেত্র হইয়াছে ;

অতএব গড়ছ শঙ্কু, কঘ ও ঘথের আয়তের সমান ;

প্রত্যেকের সহিত ঠছ অর্থাৎ গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ
যোগ করিলে, [২য়, ৪, অনু ও ১ম, ৩৪।

গড়ছ শঙ্কু ও ঠছ একত্র যোগে, কঘ ও ঘথের আয়ত
এবং গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে। [স্বতঃ ২।

এই দুই সমান বস্তুর মধ্যে গড়ছ শঙ্কু ও ঠছ এই দুইটি
দ্বারা গচ ক্ষেত্র পূর্ণ হইয়াছে, আর এই ক্ষেত্রটি গথের
উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ;

সুতরাং কঘ, ঘথের আয়ত এবং গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ
একত্র যোগে, গথের উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

অতএব কোন সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই
উপপাদ্য।

অনুমান। এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে
যে, কগ ও গঘ এই দুই অসমান সরল রেখার উপর অঙ্কিত

দুই সমচতুর্ভুজের অন্তর, ইহাদের সমষ্টির ও অন্তরের অন্তর্গত আয়তের সমান ।

বীজঃ উপঃ । মনে কর, কথ = ২ ক ; গঘ = ম ; \therefore কঘ = ক + ম ; যথ = গথ - গঘ = ক - ম ; \therefore (ক + ম) (ক - ম) = ক^২ - ম^২ ; \therefore (ক + ম) (ক - ম) + ম^২ = ক^২ অর্থাৎ কঘ.যথ = গথ^২ ।

অঃ প্রঃ—৫ । নির্দিষ্ট পরিমিতি বিশিষ্ট যাবতীয় সমকোণী সমান্তরিকের মধ্যে সমচতুর্ভুজের ক্ষেত্র ফল সর্বাপেক্ষা বৃহৎ ।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যদি কোন সরল রেখা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং তাহাকে কোন বিন্দু পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করা যায়, তাহা হইলে সমস্ত বর্দ্ধিত রেখা ও বর্দ্ধিত অংশের অন্তর্গত আয়ত এবং দ্বিখণ্ডিত রেখার অর্দ্ধেকের উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঐ অর্দ্ধ রেখা এবং বর্দ্ধিত অংশের যোগে উপর রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

কথ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত ও ঘ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে ; কঘ, যথএর আয়ত এবং গথএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

গঘএর উপর গঙচঘ সম- ক গ থ ঘ
চতুর্ভুজ অঙ্কিত কর; এবং জ
যঙ সংযুক্ত করিয়া থ বিন্দু
দিয়া গঙ বা ঘচএর সমান্তর
খজছ, জ বিন্দু দিয়া কঘ বা ঙ হ ট

উচএর সমান্তর টঠড এবং ক বিন্দু দিয়া গঠ বা ঘডএর সমান্তর কট সরল রেখা টান । [১ম, ৩১ ।

পরে, কগ রেখা গথএর সমান বলিয়া, [কম্পনা ।

কঠ আয়ত গজ আয়তের সমান; [১ম, ৩৬ ।

ইহাদের মধ্যে গজ, জচএর সমান ; [১ম, ৪৩ ।

এই হেতু কঠ, জচএর সমান ; [স্বতঃ ১ ।

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত গড যোগ করিলে, সমস্ত কড আয়ত, গডছ শঙ্কুর সমান হইবে । [স্বতঃ ২ ।

এই দুইএর মধ্যে কড আয়ত, কঘ ও ঘথএর অন্তর্গত ; কেননা, ঘড বাছ, ঘথএর সমান ; [২য়, ৪, অনু ।

অতএব কঘ, ঘথএর আয়ত গডছ শঙ্কুর সমান । [স্বতঃ ১ ।

ইহাদের প্রত্যেকের সহিত ঠছ অর্থাৎ গথএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, [২য়, ৪, অনু ও ১ম, ৩৪ ।

কঘ, ঘথএর আয়ত এবং গথএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গডছ শঙ্কু এবং ঠছ ক্ষেত্রের সমান ;

এই দুই সমান রস্তুর মধ্যে গডছ শঙ্কু এবং ঠছ এই দুইটি দ্বারা, গচ ক্ষেত্র হইয়াছে ; আর গচ ক্ষেত্র, গঘএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ;

সুতরাং কঘ, ঘথএর আয়ত এবং গথএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ।

অতএব যদি কোন সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । যদি $কগ = গথ = ক$ এবং $খঘ = ম$ হয়, তবে, $(২ক + ম) ম = ২ কম + ম^২$; $\therefore (২ক + ম) ম + ক^২ = ক^২ + ২ কম + ম^২ = (ক + ম)^২$, অর্থাৎ, $কঘ.ঘথ = গঘ^২$ ।

অঃ প্রঃ—৩। কথগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ক শঙ্ক হইতে ভূমি বা বর্জিত ভূমি পর্য্যন্ত কগ সরল রেখা টানিয়া প্রমাণ কর যে, কগ এবং কগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের অন্তর, খগ ও যগএর অন্তর্গত আয়তের সমান ।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক সরল রেখা কোন দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার এবং এক অংশের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ, সমস্ত রেখার এবং ঐ অংশের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত ও অপর অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

কথএর উপর কবওখ সম-
চতুর্ভুজ আঁকিয়া, পূর্ববর্তী
প্রতিজ্ঞা গুলির ন্যায় চিত্র
অঙ্কিত কর ।

পরে কছ, ছগের সমান বলিয়া, [১ম, ২৩
প্রত্যেকে গট যোগ করিলে, সমস্ত কট সমস্ত গটের সমান
হইবে ; [স্বতঃ ১।
অতএব কট ও গট একত্র যোগে কটএর দ্বিগুণ ;
আবার কট ও গট একত্র যোগে কটচ শঙ্কু এবং গট সম-
চতুর্ভুজের সমান ;
এই হেতু কটচ শঙ্কু এবং গট সমচতুর্ভুজ, কটএর দ্বিগুণ ;
আর যে ক্ষেত্র কটএর দ্বিগুণ তাহা কথ ও খগএর দ্বিগুণিত
আয়তের সমান ;

কেননা, খট বাহু খগএর সমান ; [২য়, ৪, অনুল।

অতএব কটচ শঙ্কু এবং গটি সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে কথ ও খগএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ;

আর এই দুই সমান বস্তুতে জচ অর্থাৎ কগএর উপর সম-
চতুর্ভুজ যোগ করিলে, [২য়, ৪, অনুরূপ ও ১ম, ৩৪ ।

কটচ শঙ্কু এবং গটি ও জচ সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে
কথ ও খগএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং কগএর উপর সম-
চতুর্ভুজের সমান হইবে ।

ইহাদের মধ্যে কটচ শঙ্কু এবং গটি ও জচ সমচতুর্ভুজ
দ্বয় একত্র যোগে সমস্ত কট ক্ষেত্র এবং গটি ক্ষেত্র হইয়াছে ;
আর এই দুইটা ক্ষেত্র কথ ও খগএর উপর আঙ্কিত দুই
সমচতুর্ভুজ ;

সুতরাং কথ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কথ ও
খগএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং কগএর উপর সমচতুর্ভুজের
সমান ।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহা
উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । ক যেন সমস্ত রেখা, এবং য ও ন দুই অংশ ;
∴ ক = য + ন ; অথবা, ক^২ = য^২ + ২মন + ন^২ ; ∴ ক^২ + ন^২
= য^২ + ২মন + ন^২ = য^২ + ২ ন (য + ন) = য^২ + ২ কন ।

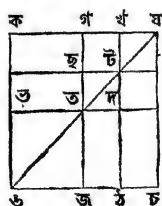
অঃ প্রঃ - ৭ । ক, খ, গ ও ঘ একই রেখাস্থ চারি বিন্দু ;
এই রেখার, কথ ও গঘএর মধ্য বিন্দু দ্বয় হইতে সমদূরে
ও বিন্দু লও ; পরে কথ রেখার যে কোন স্থানে চা'বিন্দু কল্পনা
করিয়া প্রমাণ কর যে, কচ^২ + খচ^২ + গচ^২ + ঘচ^২ + ৪ঙচ^২
= কঙ^২ + খঙ^২ + গঙ^২ + ঘঙ^২ ।

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক সরল রেখা কোন দুই অংশে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার ও এক অংশের অন্তর্গত চতুর্গুণিত আয়ত এবং অপর অংশের উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে সমস্ত রেখার ও প্রথমোক্ত অংশের যোগে উপর রেখার উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

কথ সরল রেখা যেন গ বিন্দুতে কোন দুই অংশে বিভক্ত হইয়াছে ; কথ, খগএর চতুর্গুণিত আয়ত এবং গকএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কথ ও খগএর যোগে উপর রেখার উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

কথকে ঘ পর্য্যন্ত একপে রন্ধি কর, যেন খঘ, খগএর সমান হয় ; [স্বীঃ ২ ও ১ম, ৩। এবং কঘএর উপর কঙচঘ সমচতুর্ভুজ আঁকিয়া, পূর্ব



প্রতিজ্ঞা গুলির ন্যায় এই প্রতিজ্ঞার অভ্যন্তরীণ দুইটি চিত্র অঙ্কিত কর ।

পরে গখ, খঘএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।
এবং গখ, ছটএর ও খঘ, টটএর সমান বলিয়া, [১ম, ৩৪ ।
ছট, টটএর সমান । [স্বতঃ ১ ।

এই কারণে, তদ, দগএর সমান ;

আর গখ, খঘএর ও ছট, টটএর সমান হওয়াতে,

গট আয়ত, খচ আয়তের এবং ছদ আয়ত, দচ আয়তের
সমান ; [১ম, ৩৬ ।

আবার গট, দচএর সমান ; কেননা, ইহার গণ সমান্ত-
রিকের অনুপূরক ক্ষেত্র ; [১ম, ৪৩ ।

এই হেতু খচও ছদএর সমান ; [স্বতঃ ১ ।

সুতরাং খচ, গট, ছদ ও দণ এই চারিটা আয়ত পরস্পর
সমান এবং এই চারিটা একত্র যোগে একটীর অর্থাৎ
গটএর চতুর্গুণ ।

পুনর্বার গখ, খঘএর সমান, [অঙ্কন ।

ও খঘ, খটএর সমান, [২য়, ৪, অনুরূ ।

অর্থাৎ গছএর সমান, [১ম, ৩৪ ।

এবং গখ, ছটএর অর্থাৎ ছতএর সমান, [২য়, ৪, অনুরূ ।

অতএব গছ, ছতএর সমান ; [স্বতঃ ১ ।

আর গছ, ছতএর এবং তদ, দণএর সমান বলিয়া,
কছ আয়ত, ডত আয়তের এবং তঠ আয়ত দচ
আয়তের সমান । [১ম, ৩৬ ।

ইহাদের মধ্যে ডত, তঠএর সমান ; কেননা, ইহার
ডঠ সমান্তরিকের অনুপূরক ক্ষেত্র, [১ম, ৪৩ ।

এই হেতু কছও দচএর সমান ; [স্বতঃ ১ ।

সুতরাং কছ, ডত, তঠ ও দচ এই চারি আয়ত পরস্পর
সমান এবং এই চারিটা একত্র যোগে একটীর অর্থাৎ
কছএর চতুর্গুণ ।

আবার প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, গট, খচ, ছদ ও দচ
এই চারিটা গটএর চতুর্গুণ ; অতএব যে আটটা আয়ত

নইয়া কণজ শঙ্কু হইয়াছে, তাহার একত্র যোগে কটএর চতুর্ভুজ ;

আর কট আয়ত, কথ ও খগএর অন্তর্গত ; কেননা খট, খগএর সমান ;

এই হেতু কথ, খগএর চতুর্ভুজিত আয়ত কটএর চতুর্ভুজ ; এবং কণজ শঙ্কু কটএর চতুর্ভুজ সমপ্রমাণ হইয়াছে ;

অতএব কথ, খগএর চতুর্ভুজিত আয়ত, কণজ শঙ্কুর সমান ; [স্বতঃ ১।

প্রত্যেকে ভজ, অর্থাৎ কগএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, [২য়, অনূ ও ১ম, ৩৪।

কথ, খগএর চতুর্ভুজিত আয়ত ও কগএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে কণজ শঙ্কু এবং ভজ সমচতুর্ভুজের সমান : ইহাদের মধ্যে কণজ শঙ্কু এবং ভজ সমচতুর্ভুজে, বঙচঘ ক্ষেত্র হইয়াছে ; আর এই ক্ষেত্র কঘএর উপর আঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ;

সুতরাং কথ, খগএর অন্তর্গত চতুর্ভুজিত আয়ত ও কগএর উপর আঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে কঘএর উপর, অর্থাৎ কথ ও খগএর যোগে উৎপন্ন রেখার উপর আঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান ।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । সমস্ত রেখা যেন ক ; ম এবং ন ইহার দুই অংশ ; \therefore $ম + ন = ক$, অথবা $ম = ক - ন$; \therefore $ম^2 = ক^2 - ২কন + ন^2$; সমীকরণের দুই পার্শ্বে ৪কন যোগ করিলে, $ম^2 + ৪কন = ক^2 + ২কন + ন^2 = (ক + ন)^2$ ।

উকগ কোণ, কঙগ কোণের সমান ; [১ম, ৫ ।

আর কগঙ কোণ, সম কোণ বলিয়া, [অঙ্কন ।

উকগ ও কঙগ অপর দুই কোণ একত্র যোগে এক সম কোণের সমান ; [১ম, ৩২ ।

এবং এই দুই কোণ পরস্পর সমান বলিয়া,

প্রত্যেকেই অর্দ্ধ সম কোণ ।

এই কারণে, গঙথ ও উথগ কোণ প্রত্যেকে অর্দ্ধ সম কোণ ;

অতএব সমস্ত কঙঘ কোণ, এক সম কোণ ।

আবার সপ্রমাণ হইয়াছে যে, ছুচুচ কোণ অর্দ্ধ সম কোণ, এবং উচুচ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্তী উগঘ কোণের সমান বলিয়া এক সম কোণ ; [১ম, ২৯ ।

অতএব অবশিষ্ট উচুচ কোণ অর্দ্ধ সম কোণ ;

সুতরাং, ছুচুচ কোণ উচুচ কোণের সমান হওয়াতে,

উচু বাহু চুচ বাহুর সমান । [১ম, ৬ ।

পুনর্বার, প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, থ কোণ, অর্দ্ধ সম কোণ, এবং চঘথ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্তী উগথ কোণের সমান বলিয়া এক সম কোণ ; [১ম, ২৯ ।

অতএব অবশিষ্ট থচঘ কোণ অর্দ্ধ সম কোণ ;

সুতরাং থ কোণ থচঘ কোণের সমান হওয়াতে,

ঘচ বাহু থথ বাহুর সমান । [১ম, ৬ ।

* আবার কগ, গঙুর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।

কগএর উপর সমচতুর্ভুজ গঙুর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

এই হেতু কগ ও গঙুর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;

আর কগঙ, সম কোণ হওয়াতে, কঙর উপর সমচতুর্ভুজ, কগ ও গঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ; [১ম, ৪৭।
অতএব কঙর উপর সমচতুর্ভুজ, বগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

পুনর্বার, ওছ রেখা ছচএর সমান বলিয়া,
ওছএর উপর সমচতুর্ভুজ, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

এই হেতু ওছ ও ছচএর উপর দুই সমচতুর্ভুজ, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;

আর ওছচ কোণ, এক সম কোণ বলিয়া, ওচএর উপর আঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, ওছ ও ছচএর উপর আঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, দ্বয়ের সমান ; [১ম, ৪৭।

অতএব ওচএর উপর সমচতুর্ভুজ, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;

এবং ছচ, গঘএর সমান ; [১ম, ৩৪।

এই হেতু ওচএর উপর সমচতুর্ভুজ, গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;

আর কঙর উপর সমচতুর্ভুজ, বগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ সপ্রমাণ হইয়াছে ;

সুতরাং কঙ ও ওচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগ ও গঘএর উপর আঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

ইহাদের মধ্যে কঙ ও ওচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; কেননা, কঙচ কোণ সম কোণ। [১ম, ৪৭।

অতএব কচএর উপর সমচতুর্ভুজ, কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;

আর কঘচ সম কোণ হওয়াতে কঘ ও ঘচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [১ম, ৪৭।

এই হেতু কঘ ও ঘচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;

আর ঘচ, ঘখএর সমান বলিয়া, কঘ ও ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ।

অতএব কোন সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । সমস্ত কখ রেখার পরিমাণ যেন $২ক$; গঘ = $ম$;
 \therefore কঘ = $ক + ম$; ঘখ = $ক - ম$; $(ক + ম)^২ = ক^২ + ২কম + ম^২$;
 এবং $(ক - ম)^২ = ক^২ - ২কম + ম^২$; এই দুই সমীকরণ যোগ
 করিলে, $(ক + ম)^২ + (ক - ম)^২ = ২ক^২ + ২ম^২$ ।

অঃ প্রঃ—২ । কোন সরল রেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত
 করিতে হইবে যেন, তাহাদের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়,
 অন্য রূপে বিভক্ত অংশ দ্বয়ের উপর দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা
 ক্ষুদ্রতর হয় ।

১০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

• এক সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড করিয়া কোন বিন্দু পর্য্যন্ত
 বর্দ্ধিত করিলে, সমস্ত বর্দ্ধিত রেখার উপর এবং
 বর্দ্ধিত অংশের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ
 একত্র যোগে, দ্বিখণ্ডিত রেখার অর্দ্ধেকের উপর এবং

আর কগঙ কোণ, এক সম কোণ ; [অঙ্কন ।

এই হেতু গঙক ও ঙকগ এই দুই কোণের প্রত্যেকে অর্দ্ধ সম কোণ । [১ম, ৩২ ।

এই কারণে, গঙখ ও ঙখগ কোণ, প্রত্যেকে অর্দ্ধ সম কোণ ; অতএব কঙখ, এক সম কোণ ।

আবার ঙখগ অর্দ্ধ সম কোণ বলিয়া, ইহার প্রতীপ যথচ্ছ কোণও অর্দ্ধ সম কোণ ; [১ম, ১৫ ।

আর যথচ্ছ কোণ, ইহার একান্তর যগঙ কোণের সমান বলিয়া এক সম কোণ ; [১ম, ২৯ ।

এই হেতু অবশিষ্ট যচ্ছখ কোণ অর্দ্ধ সম কোণ , [১ম, ৩২ ।

সুতরাং ইহা যথচ্ছ কোণের সমান ;

অতএব খয বাহু যচ্ছএর সমান । [১ম, ৬ ।

পুনর্বার, ঙ্গচ্ছ কোণ, অর্দ্ধ সম কোণ,

এবং চ কোণ ইহার সম্মুখীন গ কোণের সমান বলিয়া, এক সম কোণ ; [১ম, ৩৪ ।

এই হেতু অবশিষ্ট চ্ছঢ্চ কোণ অর্দ্ধ সম কোণ, [১ম, ৩২ ।

সুতরাং ইহা ঙ্গচ্ছ কোণের সমান ;

অতএব ছচ বাহু, চঙ্র সমান । [১ম, ৬ ।

আবার ঙ্গ, গকএর সমান বলিয়া, ঙ্গএর উপর সম-চতুর্ভুজ গকএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

এই হেতু ঙ্গ ও গকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে গকএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ; আর ঙ্গ ও গকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, কঙ্র উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [১ম, ৪৭ ।

অতএব কণ্ডর উপর সমচতুর্ভুজ, কগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ।

পুনর্বার, ছচ বাহু, চণ্ডর সমান হওয়াতে, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ চণ্ডর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

এই হেতু ছচ ও চণ্ডর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে চণ্ডর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;

আর ছচ ও চণ্ডর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে ওচ্চএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান : [১ম, ৪৭।

অতএব ওচ্চএর উপর সমচতুর্ভুজ ওচএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;

এবং ওচ, গঘএর সমান হওয়াতে, [১ম, ৩৪।

ওচ্চএর উপর সমচতুর্ভুজ গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ;

আর প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, কণ্ডর উপর সমচতুর্ভুজ কগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ।

এই হেতু কণ্ড ও ওচ্চএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ।

ইহাদের মধ্যে কণ্ড ও ওচ্চএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কচ্চএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [১ম, ৪৭।

অতএব কচ্চএর উপর সমচতুর্ভুজ কগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ।

আবার কচ্চএর উপর সমচতুর্ভুজ কঘ ও ঘচ্চএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান ; [১ম, ৪৭।

সুতরাং কঘ ও ঘচ্চএর উপর দুই সমচতুর্ভুজ, কগ ও

গাঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের দ্বিগুণ ;

এবং ঘাছ, ঘাথএর সমান বলিয়া,

কঘ ও ঘাথএর উপর দুই সমচতুর্ভুজ, কগ ও গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের দ্বিগুণ ।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । কখএর পরিমাণ যেন ১ক এবং খঘ = গ ;
 \therefore কগ = ১ক + গ, গঘ = ক + ঘ ; $(১ক + গ)^২ = ১ক^২ + ২কগ + গ^২$;
 সমীকরণের দুই দিকে ঘ^২ যোগ করিলে,
 $(১ক + গ) + ঘ^২ = ১ক^২ + ২কগ + ২ঘ^২ = ১ক^২ + ২ক^২ + ২কগ + ২ঘ^২$
 $= ১ক^২ + ২(ক^২ + কগ + ঘ^২) = ২ক^২ + ২(ক + গ)^২$ ।

তাঃ প্রঃ—১০ । কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে একপে বর্দ্ধিত
 কর, যেন সমস্ত বর্দ্ধিত রেখার ও বর্দ্ধিত অংশের উপর অঙ্কিত
 দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, নির্দিষ্ট রেখার অর্ধেকের উপর
 অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের ছয়গুণ হয় ।

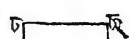

১১ । কোন ত্রিভুজের বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সম-
 চতুর্ভুজ একত্র যোগে, অর্ধ ভূমির এবং ভূমির মধ্য বিন্দু
 ও শৃঙ্গ সংযোজক রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের
 দ্বিগুণ ।

১২ । সমান্তরিকের দুই কর্ণের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ
 বন একত্র যোগে, চারি বাহুর উপর অঙ্কিত চারিটি সমচতুর্ভু-
 জের সমান ।

১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই অংশে
 বিভক্ত করিতে হইবে যেন সমস্ত রেখা ও এক অংশের
 অন্তর্গত আয়ত, অন্য অংশের উপর অঙ্কিত সম-
 চতুর্ভুজের সমান হয় ।

কথ যেন নির্দিষ্ট সরল রেখা ; কথকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে, যেন সমস্ত রেখার ও এক অংশের অন্তর্গত আয়ত, অন্য অংশের উপর অঙ্কিত সম-চতুর্ভুজের সমান হয় ।

কথএর উপর কথঘগ সমচতুর্ভুজ  অঙ্কিত করিয়া, কগকে ও বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর ; [১ম, ৪৬ ও ১০ । 

খও সংযুক্ত কর ; এবং ওক সরল রেখাকে চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত করিয়া ওচকে ও উথএর সমান কর । [১ম, ৩ ।

কচএর উপর কচছজ সমচতুর্ভুজ গ আঁক ;

তাহা হইলে কথ সরল রেখা জ বিন্দুতে এক্ষেপে বিভক্ত হইবে যে, কথ ও খজএর আয়ত, কজএর উপর সম-চতুর্ভুজের সমান ।

ছজকে ট পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর ।

পরে, কগ সরল রেখা ও বিন্দুতে দুই সমান অংশে বিভক্ত হইয়া চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে বলিয়া, গচ ও চকএর আয়ত এবং কঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ওচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান , [২য়, ৬ । আর ওচ, ওখএর সমান হওয়াতে,

গচ, চকএর আয়ত এবং কঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ওখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ।

ইহাদের মধ্যে ওখএর উপর সমচতুর্ভুজ, ওক ও কথএর

উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান ; কেননা ঙ্গকথ' কোণ সম কোণ , [১ম, ৪৬ ।

অতএব গচ, চকএর আয়ত এবং কঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কঙ ও কথএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ।

এই দুই সমান বস্তু হইতে কঙর উপর সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট গচ ও চকএর আয়ত, কথএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান । [স্বতঃ ৩ ।

আবার চট ক্ষেত্র, গচ ও চকএর আয়ত ; কেননা চছ, চকএর সমান ;

এবং কঘ ক্ষেত্র, কথএর উপর সমচতুর্ভুজ ;

এই হেতু কঘ ক্ষেত্র, চটএর সমান ;

প্রত্যেক হইতে সামান্য কট অংশ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট চজ অবশিষ্ট জঘএর সমান হইবে । [স্বতঃ ৩ ।

ইহাদের মধ্যে জঘ ক্ষেত্র, কথ ও খজএর অন্তর্গত আয়ত , কেননা কথ, খঘএর সমান ;

এবং চজ ক্ষেত্র, কজএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ,

সুতরাং কথ, খজএর আয়ত, কজএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ।

অতএব কথ রেখা জ বিন্দুতে এরূপ দুই অংশে বিভক্ত হইল যে, কথ ও খজএর আয়ত, কজএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

বীজঃ উপঃ। মনে কর কখ = ক এবং কজ = অ ;

∴ খজ = ক - অ। ∴ ক (ক - অ) = অ^২ ; অথবা ক^২ - কঅ = অ^২ ; ∴ অ^২ + কঅ = ক^২, অথবা অ^২ + কঅ + $\frac{ক^২}{৪}$ = $\frac{৫ক^২}{৪}$;

∴ অ + $\frac{ক}{২}$ = $\frac{±\sqrt{৫.ক}}{২}$; ∴ অ = $\frac{±ক. \sqrt{৫} - ক}{২}$ ।

অএর দুইটী পরিমাণের মধ্যে প্রথমটী দ্বারা জ বিন্দু স্থির হইতেছে কজ = $\frac{ক\sqrt{৫} - ক}{২}$ হইলে, খজ = $\frac{৩ - \sqrt{৫}}{২} \cdot ক$ হইবে ।

এখানে স্পষ্টই দেখা যাইতেছে যে কজ ও খজএর পরিমাণ, রূপ রাশিতে প্রকাশিত হইতে পারে না; $\sqrt{৫}$ একটা করণী বা অমেয় রাশি ; কোন সসীম রাশি দ্বারা ইহার মান প্রকাশ করা যায় না কিন্তু ইহার আসন্ন মান স্থির হইতে পারে ।

অএর দ্বিতীয় পরিমাণ নইলে, তাহার অর্থ কি সহজেই বোধ হইতে পারে ; প্রথম সমীকরণে অএর পরিবর্তে — অ' লিখিলে, সমীকরণটী ক (ক + অ) = অ^২ হইবে । ইহা ভাষাতে লিখিলে এই প্রতিজ্ঞা হইবে ;—

কোন সরল রেখাকে এক্রূপে বৃদ্ধি করিতে হইবে যেন সমস্ত বর্দ্ধিত রেখাও বর্দ্ধিত অংশের অন্তর্গত আয়ত, বর্দ্ধিত অংশের উপর সমচতুর্ভুজের সমান হয়।

অঃ প্রঃ—১৩। ইউক্লিডের ২য় অপ্যায়ের একাদশ প্রতিজ্ঞার চিত্রে প্রমাণ কর যে কখ^২ + খজ^২ = ৩ কজ^২ ।

১৪। উক্ত চিত্রে প্রমাণ কর যে,

$$(কজ + খজ) (কজ - খজ) = কজ \cdot খজ ।$$

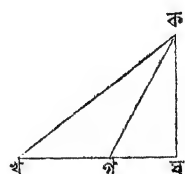
১২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

স্থূলকোণী ত্রিভুজের একটী স্থূল কোণ হইতে সম্মুখীন বর্দ্ধিত বাহুর উপর লম্ব টানিলে, স্থূল কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, ইহার পার্শ্বস্থ

দুই বাহুর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা, যে বর্দ্ধিত বাহুর উপর লম্ব পতিত হইয়াছে সেই বাহু এবং স্থূল কোণ ও লম্বের মধ্যবর্তী ত্রিভুজের বহিস্ত্র সরল রেখা, এই দুইএর অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে বৃহত্তর হইবে ।

কথগ স্থূল কোণী ত্রিভুজের কগথ যেন স্থূল কোণ, ক বিন্দু হইতে বর্দ্ধিত খগএর উপর কঘ লম্ব টান ; কথএর উপর সমচতুর্ভুজ, কগ ও গথএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা, খগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে বৃহত্তর হইবে ।

খঘ সরল রেখা গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হওয়াতে, খঘ এর উপর, সমচতুর্ভুজ খগ ও গঘ এর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং খগ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ;



[২য়, ৪ ।

প্রত্যেকে যকএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, খঘ ও যকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে খগ, গঘ ও যকএর উপর তিন সমচতুর্ভুজ এবং খগ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইবে । [স্বতঃ ২ ।

ইহাদের মধ্যে খঘও যকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় খকএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; কেননা, খঘক কোণ এক সম কোণ,

[১ম, ৪৭ ।

এবং গঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, গকএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ।

সুতরাং খকএর উপর সমচতুর্ভুজ, খগ ও গকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়েয় এবং খগ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ; অর্থাৎ, খকএর উপর সমচতুর্ভুজ, খগ ও গকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা, খগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে বৃহত্তর ।

অতএব স্থূল কোণী ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । যদি খগ, গক ও কখএর পরিমাণ ক্রমে ক, খ ও গ হয় এবং গঘ=ম ও কঘ=ন হয়, তবে $গ^2 = (ক+ম)^2 + ন^2$; এবং $খ^2 = ম^2 + ন^2$; $\therefore গ^2 - খ^2 = (ক+ম)^2 - ম^2 = ক^2 + ২কম + ম^2 - ম^2 = ক^2 + ২কম$;

$\therefore গ^2 = ক^2 + খ^2 + ২কম$ ।

অঃ প্রঃ—১৫ । যদি কখগ ত্রিভুজের খ ও গ কোণ প্রত্যেকে ক কোণের দ্বিগুণ হয়, তবে কখএর উপর সমচতুর্ভুজ, খগএর উপর সমচতুর্ভুজ ও কখ, খগএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইবে ।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

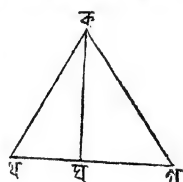
প্রত্যেক ত্রিভুজের কোন সূক্ষ্ম কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, ঐ কোণের পার্শ্বস্থ বাহু দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা, এই দুই বাহুর একটি এবং সম্মুখীন কোণ হইতে তাহার উপর পাতিত লম্ব ও সূক্ষ্ম কোণের মধ্যবর্তী সরল

রেখা, এই দুইএর অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

কথগ ত্রিভুজের যেন খ একটি সূক্ষ্ম কোণ, এই কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর মধ্যে খগএর উপর সম্মুখীন ক কোণ হইতে কঘ লম্ব টান, তাহা হইলে কগএর উপর সমচতুর্ভুজ, কখ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা, গখ ও খঘএর দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

প্রথমত, কখ লম্ব ত্রিভুজের অভ্যন্তরে পড়িলে, গখ রেখা ঘ বিন্দুতে

দুই অংশে বিভক্ত হওয়াতে, গখ ও খঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, গখ ও খঘএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং



গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ; [২য়, ৭ ।

এতোকৈ ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে,

গখ, খঘ ও ঘকএর উপর তিনটি সমচতুর্ভুজ, গখ ও খঘএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং গঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান হইবে । [স্বতঃ ২ ।

ইহাদের মধ্যে, খঘ ও ঘকএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয় খকএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; কেননা, খঘক কোণ এক সম কোণ ; [১ম, ৪৭ ।

এবং গঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, গকএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [১ম, ৪৭ ।

সুতরাং গখ ও খকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগএর

উপর সমচতুর্ভুজের এবং গখ, খঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ;

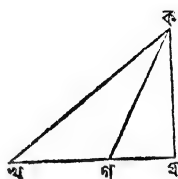
অর্থাৎ শুদ্ধ কগএর উপর সমচতুর্ভুজ, গখ ও থকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা, গখ ও খঘএর দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে ক্ষুদ্রতর ।

দ্বিতীয়ত, কঘ লম্ব ত্রিভুজের বাহিরে পড়িলে, য কোণ সম কোণ হওয়াতে,

[অঙ্কন ।

কগখ কোণ সম কোণ অপেক্ষ রহস্তর ;

[১ম, ১৬ ।



এই হেতু কখএর উপর সমচতুর্ভুজ, কগ ও গখএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় এবং থগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ;

[২য়, ১২ ।

প্রত্যেকে থগএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, কখ ও থগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, কগএর উপর সমচতুর্ভুজ, থগএর উপর দ্বিগুণিত সমচতুর্ভুজ এবং থগ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ;

[স্বতঃ ২ ।

আর থঘ রেখা গ বিন্দুতে দুই অংশে বিভক্ত হওয়াতে, যখ ও থগএর আয়ত, থগ ও গঘএর আয়ত এবং থগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

[২য়, ৩ ।

এবং ইহাদিগকে দ্বিগুণ করিলে,

যখ, থগএর দ্বিগুণিত আয়ত, থগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং থগএর উপর দ্বিগুণিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ;

সুতরাং কথ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগএর উপর সমচতুর্ভুজ এবং যথ, খগএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ; অর্থাৎ শুদ্ধ কগএর উপর সমচতুর্ভুজ, কথ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় অপেক্ষা যথ, খগএর দ্বিগুণিত আয়ত পরিমাণে ক্ষুদ্রতর ।

তৃতীয়ত, যদি কগ বাহু খগএর লম্ব হয়, তবে খগই লম্ব ও সূক্ষ্ম কোণের মধ্যবর্তী রেখা ; তাহা হইলে অনায়াসেই বোধ হইবে যে কথ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কগএর উপর সমচতুর্ভুজ এবং খগএর উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণের সমান । [: ম, ৪৭ ও স্বতঃ : ২ । অতএব প্রত্যেক ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।



বীজঃ উপঃ । যদি খগ, কগ ও কথএর পরিমাণ ক্রমে ক, খ ও গ হয় এবং খগ = ম ও কগ = ন হয়, তবে (১ম প্রকরণ) যগ = ক - ম ; \therefore গ^২ = ন^২ + ম^২ এবং খ^২ = ন^২ + (ক - ম)^২ ; \therefore গ^২ - খ^২ = ন^২ - (ক - ম)^২ = ন^২ - ক^২ + ২কম - ম^২ = - ক^২ + ২কম ; \therefore খ^২ + ২কম = ক^২ + গ^২ ।

(২য় প্রকরণ) যগ = ম - ক ; \therefore গ^২ = ম^২ + ন^২ ; এর খ^২ = (ম - ক)^২ + ন^২ ; \therefore গ^২ - খ^২ = ম^২ - (ম - ক)^২ = ম^২ - ম^২ + ২কম - ক^২ = ২কম - ক^২ ; \therefore ক^২ + গ^২ = খ^২ + ২কম অথবা খ^২ + ২কম = ক^২ + গ^২ ।

(৩য় প্রকরণ) এখানে ম = ক ; এবং খ^২ + ক^২ = গ^২ ; সমীকরণের দুই দিকে ক^২ যোগ করিলে, খ^২ + ২ক^২ = গ^২ + ক^২

অঃ প্রঃ—১৬। কথগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের খগ ভূমির খ প্রাপ্ত হইতে সম্মুখীন কগ বাহুর উপর খয লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে কগ.গয = $\frac{১}{২}$ খ^২ ।

১৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

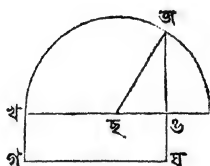
কোন নির্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

ক যেন নির্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্র ; কএর সমান এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

ক ক্ষেত্রের সমান খগঘঙ সমকোণী সমান্তরিক অঙ্কিত কর ।

এক্ষণে যদি ইহার খঙ ও ঙঘ বাহু দ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে ইহা সমচতুর্ভুজ হইবে এবং তাহা হইলে সম্পাদ্য ক্ষেত্র অঙ্কিত হইল ।

যদি সমান না হয়,
তবে উহাদের মধ্যে
একটি অর্থাৎ খঙকে
চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া,
ঙচকে ঙঘএর সমান



এবং খচকে ছ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর ; [১ম, ৩ ও ১০।

ছ কেন্দ্র হইতে ছচ বা ছখএর প্রান্ত দিয়া খজচ অর্ধ বৃত্ত আঁক এবং ঘঙকে জ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি কর ।

ঙজএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ক ক্ষেত্রের সমান হইবে ।
ছজ সংযুক্ত কর ।

পরে, খচ সরল রেখা ছ বিন্দুতে দুই সমান এবং ঙ বিন্দুতে দুই অসমান অংশে বিভক্ত হওয়াতে,
খঙ, ঙচএর আয়ত এবং ছঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র

যোগে, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান। [২য়, ৫।

আর ছচ, ছজএর সমান বলিয়া,

খঙ, উচএর আয়ত এবং ছঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ছজএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান।

ইহাদের মধ্যে ছজএর উপর সমচতুর্ভুজ, ছঙ ও উজএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান ; [১ম, ৪৭।

এই হেতু খঙ, উচএর আয়ত এবং ছঙর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ছঙ ও উজএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ;

এই সমান সমান বস্তু হইতে ছঙর উপর সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে, খঙ ও উচএর আয়ত, উজএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ; [স্বতঃ ৩।

আর খঘ সমান্তরিক, খঙ ও উচএর অন্তর্গত আয়ত ;

কেননা উচ, উঘএর সমান।

অতএব খঘ ক্ষেত্র, উজএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

আর খঘ, ক সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সমান। [অঙ্কন।

সুতরাং উজএর উপর সমচতুর্ভুজ ক ক্ষেত্রের সমান।

অতএব ক সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সমান একটী সমচতুর্ভুজ উজ রেখার উপর অঙ্কিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য। *

• • এই ১৪টি প্রতিজ্ঞা ইউক্লিডের লিখিত। এতদ্ব্যতীত কোন কোন পুস্তকে আর তিনটি ও অন্যান্য পুস্তকে পাঁচটি প্রতিজ্ঞা সন্নিবেশিত হইয়াছে। এই সকল প্রতিজ্ঞার উপপত্তি সহজেই সম্পন্ন হইতে পারে ; এজন্য আমরা ইহাদিগকে, অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা স্বরূপ, এ পুস্তকে গ্রহণ করিয়াছি।

অঃ প্রঃ—১৭। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যেন তাহাদের অন্তর্গত আয়ত কোন নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান হয়।

১৮। সমকোণী ত্রিভুজের কোন একটি সূক্ষ্ম কোণ হইতে সম্মুখীন বাহুর মধ্য বিন্দু পর্যন্ত এক সরল রেখা টানিলে, সেই রেখার উপর সমচতুর্ভুজ এবং দ্বিখণ্ডিত রেখার অর্ধেকের উপর ত্রিখণ্ডিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, সমকোণী ত্রিভুজের কর্ণের উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

১৯। সমকোণী ত্রিভুজের কোন ভূজের মধ্য বিন্দু হইতে কর্ণের উপর লম্ব টানিলে, কর্ণের দুই অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের অন্তর, অন্য ভূজের উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

২০। কক্ষ কোণ বৃত্ত পাদের ম বিন্দু কেন্দ্র; কক্ষ পরিধি খণ্ডে গ বিন্দু কল্পনা করিয়া মক বা মখএর উপর গঘ লম্বটান; গঘ যেন কক্ষ কোণ দ্বিখণ্ড কারক রেখাকে ও বিন্দুতে ছেদ করিল; প্রমাণ কর যে গঘ ও ঘঙের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ, মকএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান।

২১। অর্ধ বৃত্তের ব্যাসের কোন বিন্দু হইতে ব্যাসের সহিত সম কোণ করিয়া একটি ও পরিধির মধ্য বিন্দু পর্যন্ত আর একটি সরল রেখা টানিলে, এই দুই রেখার উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

২২। কোন সরল রেখিক ক্ষেত্রের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে যাবতীয় বাহুর উপর লম্ব টানিলে, বাহুর একান্তর খণ্ড সমূহের উপর সমচতুর্ভুজ গুলির সমষ্টি দ্বয়, পরস্পর সমান হইবে।

২৩। এমন একটি সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে যাহা দুই সমচতুর্ভুজের অন্তরের সমান হয়।

২৪। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে এমন দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে যাহাদের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়

কোন নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান হয়। এই প্রতিজ্ঞাটি কখন অসাধ্য হইবে?

২৫। কখন সমবাহু ত্রিভুজের কণ বাহুর মধ্য বিন্দু ঘ হইতে খগএর উপর যও লম্ব টানিয়া প্রতিপন্ন কর যে, খঘএর উপর সমচতুর্ভুজ খগএর উপর সমচতুর্ভুজের তিন চতুর্থাংশ এবং খও রেখা খগএর তিন চতুর্থাংশ।

২৬। কোন নির্দিষ্ট রেখাকে একরূপে বর্ধিত করিতে হইবে, যেন সমস্ত বর্ধিত রেখা এবং নির্দিষ্ট রেখার অন্তর্গত আয়ত কোন নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান হয়।

২৭। কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধের উপর একটা অর্ধ বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া দুই বৃত্তের সাধারণ ব্যাসের উপর একটা লম্ব টানিলে, সেই ব্যাসের প্রান্ত হইতে লম্ব দ্বারা বৃহৎ বৃত্তের পরিধির ছেদ বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত জ্যা, ক্ষুদ্র বৃত্তের ছেদ বিন্দু পর্যন্ত অঙ্কিত জ্যার দ্বিগুণ হইবে।

২৮। কোন সরল রেখার দুই প্রান্ত হইতে সমদূরবর্তী এমন দুই বিন্দু ঐ রেখাতে স্থির কর, যেন নির্দিষ্ট রেখার মধ্য খণ্ডের উপর সমচতুর্ভুজ, অন্য দুই খণ্ডের উপর দুইটা সমচতুর্ভুজের সমষ্টির সমান হয়; আর প্রতিপন্ন কর যে, রেখাটি এই রূপে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, পার্শ্বস্থ দুই অংশের উপর দুই সমচতুর্ভুজ এবং সমস্ত রেখা ও মধ্য অংশের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইবে।

২৯। কোন সরল রেখাকে একরূপ দুই অংশে বিভক্ত কর, যেন সমস্ত রেখার উপর ও এক অংশের উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, অন্য অংশের উপর সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হয়, আর প্রতিপন্ন কর যে, রেখাটি এই রূপে বিভক্ত হইলে, বৃহত্তর অংশের উপর সমচতুর্ভুজ, সমস্ত রেখার ও ক্ষুদ্রতর অংশের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইবে।

৩০। প্রতিপন্ন কর যে, দুই রেখার উপর অঙ্কিত দুইটা সমচতুর্ভুজ, ইহাদের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতে পারে না এবং ঐ দুই সমচতুর্ভুজের অন্তর নির্দিষ্ট দুইটা রেখার সমষ্টির ও অন্তরের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

৩১। $(ক+অ)(ক-অ) + অ^2 = ক^2$; $(ক+অ)^2 + (ক-অ)^2 = ২ক^2 + ২অ^2$ । প্রতিপন্ন কর যে, এই দুইটি বৈজিক সমীকরণের মধ্যে প্রথমটি দ্বারা ইউক্লিডের দ্বিতীয় অধ্যায়ের ৫ম বা ৬ষ্ঠ, এবং দ্বিতীয়টি দ্বারা ৯ম বা ১০ম প্রতিজ্ঞা প্রকাশিত হইতেছে।

৩২। কথগঘ একটি আয়ত; খগতে ও বিন্দু এবং গঘতে চ বিন্দু কাম্পনা করিয়া প্রতিপন্ন কর যে, কথগঘ আয়ত, দ্বিগুণিত কঙচ ত্রিভুজের এবং খঙ ও ঘচএর অন্তর্গত আয়তের সমান।

৩৩। যদি কোন সরল রেখা দুই সমান ও দুই অসমান অংশে ছেদিত হয়, তবে দুই অসমান অংশের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, এই দুই অংশের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত এবং ছেদ বিন্দু দ্বয়ের মধ্যবর্তী অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৩৪। কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর পরিমাণ ২, ৪, ৫ অথবা এই তিন সংখ্যার কোন সমগুণিত হইলে, ত্রিভুজটি স্থূল কোণী না সূক্ষ্ম কোণী হইবে?

৩৫। কোন ত্রিভুজের একটি কোণ ঠিক সম কোণ হইলে, এই কোণের সম্মুখীন বাহুর উপর সমচতুর্ভুজ, ইহার পার্শ্বস্থ বাহু দ্বয়ের উপর দুই সমচতুর্ভুজ এবং ঐ দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

৩৬। কথগ ত্রিভুজের কগ ও কথ বাহুর অথবা বর্জিত কগ ও কথ বাহুর উপর যদি খত ও গথ লম্ব টান। যায়, তবে খও গ উভয়ে সূক্ষ্ম কোণ হইলে, খগএর উপর সমচতুর্ভুজ কথ ও খথএর আয়ত এবং কগ ও গতএর আয়ত, সমষ্টির সমান হইবে; আর ঐ দুইটির মধ্যে একটি সূক্ষ্ম কোণ হইলে, সমচতুর্ভুজটি দুইটি আয়তের অন্তরের সমান হইবে।

৩৭। সমকোণী ত্রিভুজের কণের বহির্দিকে সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিয়া সম কোণ হইতে সমচতুর্ভুজের দূরবর্তী দুই কোণ পর্যন্ত দুইটি রেখা টানিলে, উহাদের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের অন্তর, ত্রিভুজের দুই বাহুর উপর দুই সমচতুর্ভুজের অন্তরের সমান হইবে।

৩৮। কোন আয়তের পরস্পর সম্মিহিত দুই বাহুর উপর দুই সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিলে, ইহাদের কর্ণ দুইটির অন্তর্গত আয়ত, নির্দিষ্ট আয়তের দ্বিগুণ হইবে।

৩৯। আয়তের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে চারি কোণ পর্যন্ত চারিটি রেখা টানিলে, সম্মুখীন দুইটি দুইটি কোণ পর্যন্ত অঙ্কিত রেখাগুলির উপর দুইটি দুইটি সমচতুর্ভুজের সমষ্টি পরস্পর সমান হইবে।

৪০। কোন চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, চারি ভুজের উপর অঙ্কিত চারি সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা, কর্ণ দ্বয়ের দুইটি মধ্য বিন্দু যোজক রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ পরিমাণে ক্ষুদ্রতর হইবে।

৪১। কোন চতুর্ভুজের কর্ণ দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে পরস্পর সম্মুখীন বাহুগুলির মধ্য বিন্দু সংযোজক রেখা দ্বয়ের দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

৪২। কোন ত্রিভুজের তিন কোণ হইতে সম্মুখীন বাহুগুলির মধ্য বিন্দু পর্যন্ত তিনটি রেখা টানিলে, সাধারণ ছেদ বিন্দু হইতে কোণগুলি পর্যন্ত ইহাদের তিন খণ্ডের উপর অঙ্কিত তিনটি সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ত্রিভুজের বাহু ত্রয়ের উপর তিনটি সমচতুর্ভুজের তৃতীয়াংশ হইবে।

৪৩। কোন সমচতুর্ভুজের দুই সম্মুখীন বাহু দ্বিখণ্ড করিলে, অন্য দুই বাহুর উপর দুই সমচতুর্ভুজ এবং কর্ণ দ্বয়ের উপর দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, দ্বিখণ্ডিত বাহু দ্বয়ের উপর দুই সমচতুর্ভুজ এবং ছেদ বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখার উপর চতুর্গুণিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে।

৪৪। যদি কথং সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির সমান্তর ঘণ্ড রেখা টানা যায়, তবে $খঙ^২ = খগ. ঘঙ + গঙ^২$ ।

৪৫। দুই সমান্তর বাহু বিশিষ্ট কোন বিষম চতুর্ভুজের দুই কর্ণের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, দুই সমান্তর বাহুর উপর দুই সমচতুর্ভুজের এবং অন্য দুই বাহুর অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমান হইবে।

৪৬। কোন ত্রিভুজের কথ ও কগ বাহুর উপর খঘ ও গঙ

দুই সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিয়া প্রতিপন্ন কর যে, খগ এবং ঘঙের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কখ ও কগএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের চতুর্ভুজ ।

৪৭। কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর তিনটি সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিয়া, ইহাদের কোণিক বিন্দুগুলি সংযুক্ত করিয়া দিলে যে মড়ভুজ ক্ষেত্র হইবে, তাহার বাহু সকলের উপর অঙ্কিত ছয়টি সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর অঙ্কিত তিনটি সমচতুর্ভুজের চতুর্ভুজ হইবে ।

৪৮। কোন বৃত্তের ব্যাসে, কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী দুই বিন্দু কল্পনা করিলে, পরিধিস্থ কোন বিন্দু হইতে ইহাদের যোজক রেখা দ্বয়ের উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমষ্টি, অপরিবর্তনীয় রাশি হইবে ।

৪৯। কখগ সমকোণী ত্রিভুজের কখ কর্ণ গও বিন্দুতে তিন সমান ভাগে বিভক্ত হইয়াছে ; যদি গস ও গঙ সংযুক্ত করা যায়, তবে গসও ত্রিভুজের বাহু গুলির উপর অঙ্কিত তিনটি সমচতুর্ভুজ, কখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের দুই তৃতীয়াংশ হইবে ।

৫০। কখগঘ চতুর্ভুজের দুই কর্ণের মধ্য বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখা যদি ও বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয় এবং ওকে কেন্দ্র করিয়া যে কোন বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তবে এই বৃত্ত পরিধিতে ব বিন্দু কল্পনা করিলে, $(বক^2 + বখ^2 + বগ^2 + বঘ^2)$ অপরিবর্তনীয় রাশি এবং $(ওক^2 + ওখ^2 + ওগ^2 + ওঘ^2 + ৪ ওব^2)$ এর সমান হইবে ।

দ্বিতীয় অধ্যায় ।

বাখা ও পরিশিষ্ট ।

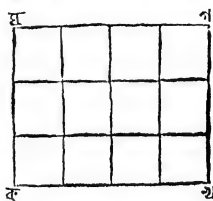
জ্যামিতিক ক্ষেত্রগুলির মধ্যে ত্রিভুজের ব্যবহার সর্বাপেক্ষা অধিক চওসাতে ইহা বিশেষ ফলোপসাদক হইয়াছে ; আয়ত ক্ষেত্রও প্রায় তদ্রূপ । ইউক্লিড ২য় অধ্যায়ে আয়ত ক্ষেত্রের বিষয় পর্যালোচনা করিয়াছেন এবং স্থূল ও সূক্ষ্ম কোণী ত্রিভুজের বাহু সকলের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজগুলির মধ্যে কিরূপ সম্বন্ধ থাকে, তাহা নিরূপণ করিয়াছেন । তিনি আয়ত সকলের বিশেষ পরিমাণ কি, তাহা দ্বিধা কিছই উল্লেখ না করিয়া, ইহারা ভিন্ন ভিন্ন অংশে বিভক্ত হইলে, খণ্ডগুলির পরস্পর কিরূপ সম্বন্ধ হইবে, তাহাই স্থির করিয়াছেন । ২য় অধ্যায়ে আয়ত শব্দের ব্যাপক ভাব গ্রহণ করিতে হইবে ; যথা ;—যে সমান্তরিকের একটি কোণ সমকোণ, তাহার নাম আয়ত, আর যে আয়তের ভূজ গুলি পরস্পর সমান, তাহার নাম সমচতুর্ভুজ ।

প্রতিজ্ঞাগুলির উপপত্তিতে যে সকল সমচতুর্ভুজের উল্লেখ করা হইয়াছে, তাহারা কোন না কোন সরল রেখার উপর বাস্তবিক অঙ্কিত হইয়াছে অথবা অঙ্কিত হইয়াছে এরূপ অনুমান করিয়া লইতে হইবে । এজন্য “কথএর সমচতুর্ভুজ” এরূপ বাক্য প্রয়োগ না করিয়া “কথএর উপর সমচতুর্ভুজ” অর্থাৎ কথএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, এইরূপ লিখিত হইয়াছে ; “কথএর বর্গ” এরূপ বাক্য পাটীগণিতে না নীজগণিতে ব্যবহৃত হইতে পারে ; তাহা হইলে এই মাত্র বুঝিতে হইবে যে, ইহা দ্বারা কথএর পরিমাণ সূচক সংখ্যার বর্গ অর্থাৎ ঐ সংখ্যাকে ইহা দ্বারাই গুণ করিলে যে ফল লব্ধ হইবে, তাহাই প্রকাশিত

হইতেছে ; কিন্তু কোন রেখা সেই রেখা দ্বারা গুণিত হইয়াছে
এরূপ বাক্য প্রয়োগ করা অসঙ্গত ; তাহা করিলে কোমল মতি
বিদ্যার্থী দিগকে ভ্রম জালে পাতিত করা হয় ।

এই রূপে কথ ও খগ এর অন্তর্গত ক্ষেত্রকে প্রকাশ করিতে
হইলে, কেহ কেহ কথ গুণিত খগ অথবা বৈজিক চিহ্ন দ্বারা
কথ.খগ এইরূপ লিখিয়া থাকেন । পূর্বেই উল্লিখিত হইয়াছে
যে ইহা দ্বারা ভ্রম জন্মিবার বিলক্ষণ সম্ভাবনা। পার্শ্ববর্তী চিত্রে কথ

যেন ৪ অঙ্গুল ও খগ ৩ অঙ্গুল ;
তাহা হইলে কথখগ আয়ত ক্ষেত্র
১ অঙ্গুল দৈর্ঘ্য ও ১ অঙ্গুল
প্রস্থ বিশিষ্ট ১২ টি ক্ষেত্রে
বিভক্ত হইবে অর্থাৎ এক
অঙ্গুল দৈর্ঘ্য প্রস্থ বিশিষ্ট ১২ টি
সমচতুর্ভুজ যেগুলি ব্যাপিয়া



থাকে এই আয়তও ঠিক সেই পরিমিত স্থান ব্যাপিয়া থাকিবে ।
আবার আয়তের দৈর্ঘ্য পরিমাণ সূচক অঙ্ক অর্থাৎ ৪কে, প্রস্থ
পরিমাণ সূচক অঙ্ক অর্থাৎ ৩ দিয়া গুণ করিলেও গুণফল ১২
হয় ; এই অঙ্ক দ্বারা পাটিক সংখ্যা মাত্র পাওয়া যায় ; কিন্তু
কথ ও খগএর অন্তর্গত আয়ত বলিলে, কথখগ ক্ষেত্র দ্বারা
যে স্থান পরিপূরণ হইতেছে, তাহাই বোধ হইবে । ক্ষেত্রের,
অর্থাৎ পরিবন্ধ স্থানের সম্বন্ধ নিরূপণ করা জ্যামিতির উদ্দেশ্য ;
অতএব জ্যামিতিতে শেবোক্ত, অর্থাৎ, কথ, ও খগএর অন্তর্গত
আয়ত, এইরূপ বাক্য প্রয়োগ করা বিধেয় ।

যাহা উল্লিখিত হইল, তদ্বারা পাটিক বৃন্দের বোধ
হইয়া থাকিবে যে, জ্যামিতি সংক্রান্ত আয়ত এবং পাটী ও বীজ
গণিত সংক্রান্ত গুণফল এই উভয়ই সদৃশ অর্থ বোধক ; এই
জন্য জ্যামিতির প্রণালী অবলম্বন করিলে যেরূপ ফল লব্ধ হয়,
পাটীক বা বৈজিক প্রণালী দ্বারাও তদনুরূপ ফল লাভ হইবে
এবং ইহা দেখাইবার জন্যই প্রতিজ্ঞা গুলির শেষ ভাগে
বৈজিক উপপত্তি লিখিত হইয়াছে ।

প্রথম অধ্যায়ের ৩৫শ প্রতিজ্ঞা দ্বারা প্রতীত হইয়া থাকিবে

যে, একই ভূমি ও সমান সমান ক্ষেত্রফল বিশিষ্ট অসংখ্য সমান্তরিক অঙ্কিত করা যায় ও ইহাদের মধ্যে একটি আয়ত ক্ষেত্র হইতে পারে । অতএব প্রত্যেক সমান্তরিক ঐ আয়তের সমান, অর্থাৎ আয়তের সম্বিহিত দুই বাহুর অন্তর্গত বলিতে হইবে ; প্রকারান্তরে বলা যাইতে পারে যে, প্রত্যেক সমান্তরিক ইহার উন্নতি ও ভূমির অন্তর্গত । যদি কোন সমান্তরিকের উন্নতি = ক এবং ভূমি = খ হয়, তবে বৈজিক প্রণালী অবলম্বন করিলে সমান্তরিকের ক্ষেত্রফল = কখ এবং এই উন্নতি ও ভূমি বিশিষ্ট ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{1}{2}$ কখ হইবে ; কেননা ত্রিভুজটি সমান্তরিকের অর্ধেক (১ম, ৪১) ।

২য়, ১—৩ । দ্বিতীয় অধ্যায়ের ২য় ও ৩য় প্রতিজ্ঞা ১ম প্রতিজ্ঞার বিশেষ বিশেষ প্রকরণ মাত্র ; এই দুইটি প্রথমেই অনুমান স্বরূপ লিখিলেও হইত ; কেননা, প্রথমেই নির্দিষ্ট দুই রেখা পরস্পর সমান হইলেই দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞা এবং অবিভাজিত রেখাটি বিভাজিত রেখার এক অংশের সমান হইলেই তৃতীয় প্রতিজ্ঞা হইবে । আবার ২য় ও ৩য় প্রতিজ্ঞা নিম্ন প্রকারে লিখিলে দুইটিতে, একটি মাত্র প্রতিজ্ঞা হইবে, যথা ;—
দুই রেখার অন্তর্গত আয়ত ও একটির উপর সমচতুর্ভুজ এই দুইএর অন্তর, শেষোক্ত রেখার এবং দুই রেখার অন্তরের অন্তর্গত আয়তের সমান । ২য় রেখাটি ১ম অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে এইটি দ্বিতীয় এবং ক্ষুদ্রতর হইলে তৃতীয় প্রতিজ্ঞা হইবে ।

২য়, ৪ । চিত্র অঙ্কিত না করিয়া এই প্রতিজ্ঞাটি ২য় ও ৩য় দ্বারা সম্পন্ন করা যাইতে পারে । ইউক্লিড তাহা না করিয়া ক্ষেত্রগুলির সমানত্ব দেখাইয়া প্রতিজ্ঞাটি সিদ্ধ করিয়াছেন । দ্বিতীয় অধ্যায়ের মধ্যে এই প্রতিজ্ঞাটি অত্যন্ত প্রয়োজনীয় । যদি নির্দিষ্ট সরল রেখার দুই অংশ পরস্পর সমান হয়, তবে সহজেই বোধ হইবে যে, কোন রেখার উপর সমচতুর্ভুজ তাহার অর্ধেকের উপর সমচতুর্ভুজের চতুর্গুণ ; ১ম অধ্যায়ের ৪৬শ প্রতিজ্ঞা দ্বারাও ইহা প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে ।

২য়, ৫—৬ । পঞ্চম ও ষষ্ঠ প্রতিজ্ঞার সাধারণ সূত্র একই প্রতিজ্ঞাতে প্রকাশ করিতে পারা যায়, যথা ;—দুই রেখার

সমষ্টি ও অন্তরের অন্তর্গত আয়ত, এই দুই রেখার উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান ।

২য়, ৮। এই প্রতিজ্ঞাটি দ্বিতীয় অধ্যায়ের ৪র্থ ও ৭ম দ্বারা অনায়াসে প্রমাণ করা যায়, যথা;—কঘএর উপর সমচতুর্ভুজ কখ ও খগ এর উপর দুই সমচতুর্ভুজ এবং কখ, খগএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান (২য়, ৪) ; অথবা কখ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দঘ এবং কখ, খগএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান; আর কখ ও খগএর উপর সমচতুর্ভুজ দঘ, কখ ও খগএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং কগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান : (২য়, ৭) এই হেতু কঘএর উপর সমচতুর্ভুজ, কখ ও খগএর চতুর্গুণিত আয়ত এবং কগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ।

“একটি সম্পূর্ণ রাশি ইহার অংশ সমষ্টির সমান” এই সত্যঃ সিদ্ধটির প্রয়োগ দ্বারা যে ইউক্লিড দ্বিতীয় অধ্যায়ের প্রথম আটটি প্রতিজ্ঞার উপপাদন করিয়াছেন ইহা পাঠক বর্গের অনায়াসেই বোধ হইবে ।

২য়, ৯—১০। নবম প্রতিজ্ঞাটিও ৪র্থ ও ৭ম দ্বারা প্রমাণ করা যায়, যথা;—

কঘএর উপর সমচতুর্ভুজ, কগ ও গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দঘ এবং কখ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান বলিয়া (২য়, ৪), প্রত্যেকে যখএর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, কখ ও যখএর উপর সমচতুর্ভুজ দঘ একত্র যোগে, কগ ও গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দঘ এবং কখ, গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত ও যখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান অথবা খগ ও গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ দঘ, খগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং যখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; কেননা, খগ, কগএর সমান আর খগ ও গঘএর দ্বিগুণিত আয়ত এবং যখএর সমচতুর্ভুজ খগ ও গঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান; সুতরাং কঘ ও যখএর উপর সমচতুর্ভুজ দঘ একত্র যোগে, খগ ও গঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ।

১১ম প্রতিজ্ঞা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, কগ ও গঘ এই দুই রেখার সমষ্টি ও অন্তরের উপর অঙ্কিত দুইটি সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, এই দুই রেখার উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ।

দ্বিতীয় অধ্যায়ের দশম প্রতিজ্ঞারও উপপত্তি উক্তরূপে ৭ম প্রতিজ্ঞা দ্বারা সিদ্ধ হইতে পারে। ৫ম ও ৩ষ্ঠ প্রতিজ্ঞার ন্যায় ৯ম ও ১০মের সাধারণ সূত্র একই প্রতিজ্ঞাতে প্রকাশ করা যায়, যথা ;—দুই রেখার সমষ্টির উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ এবং তাহাদের অন্তরের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঐ দুই রেখার উপর অঙ্কিত দুইটি সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ।

২য়। ১১। এই প্রতিজ্ঞার বৈজ্ঞিক উপপত্তি দ্বারা শিক্ষার্থীদিগের প্রতীতি হইয়া থাকিলে যে, ইউক্লিডের উপপত্তি অনুসারে কোন একটি বিশেষ বর্গীয় সমীকরণের ফল জ্যামিতি দ্বারা লব্ধ হইয়াছে।

২য়। ১২—১৩। প্রথম অধ্যায়ের ৪৭শ প্রতিজ্ঞার সহিত ২য় অধ্যায়ের ১২শ ও ১৩শের সম্বন্ধ থাকাতে এই দুইটি প্রতিজ্ঞা অন্যান্যপেক্ষা ছাত্রদিগের হৃদয় গ্রাহী হইয়া থাকে ; আর ত্রিকোণমিতি শাস্ত্রেও ইহাদের বিশেষ উপযোগিতা দৃষ্ট হয় ; কিন্তু ইউক্লিডের যে যে অংশ সচরাচর বিদ্যালয়ে পঠিত হইয়া থাকে, তাহাতে ইহাদিগের ব্যবহার স্থল দৃষ্ট হয় না। পূর্বে লিখিত হইয়াছে যে, ইউক্লিডের ৪৭শ ও ৪৮শ প্রতিজ্ঞার সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত ; যে যে প্রতিজ্ঞার সহিত ২য় অধ্যায়ের ১১শ ও ১২শের বিপরীত সম্বন্ধ সেইগুলির উপপত্তি সহজেই সম্পন্ন করা যাইতে পারে ; যথা—

যদি কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথম বাহুর সম্মুখীন কোণ স্থূল কোণ হইবে ; কেননা, যদি সেই কোণ সম কোণ হয়, তবে প্রথম বাহুর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ, অন্য দুই বাহুর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ; (১ম, ৪৭) আর সূক্ষ্ম কোণ হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ; (২য়, ১৩) অতএব উহা সম কোণ বা সূক্ষ্ম কোণ হইতে পারে না ; সুতরাং উহা স্থূল কোণ।

এইরূপে সপ্রমাণ হইবে যে, কোন ত্রিভুজের এক বাহুর উপর সমচতুর্ভুজ অন্য দুই বাহুর উপর দুই সমচতুর্ভুজ

অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, প্রথম বাহুর সম্মুখীন কোণ সূক্ষ্ম কোণ হইবে ।

২য়, ১৩। ইউক্লিড তাঁহার স্থূল গ্রন্থে এই প্রতিজ্ঞার কেবল প্রথম প্রকরণটি প্রমাণ করিয়াছেন। সিয়মন সাহেব লিখিয়াছেন যে, ত্রিভুজটি যে প্রকার ইউক না কেন তাহাই অবলম্বন করিয়া এ প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ করা যায় ; এজন্য ২য় ও ৩য় প্রকরণে স্থূল ও সমকোণী ত্রিভুজ লইয়া প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ করিয়াছেন। প্রথম দুইটি প্রকরণ এক রূপেই সপ্রমাণ হইতে পারে ; যথা—

গখ ও খঘএর উপর অঙ্কিত দুই সম চতুর্ভুজ একত্র যোগে, (২য় ১৩শের ১ম ও ২য় চিত্র দেখ) গখ ও খঘএর অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত এবং গঘএর উপর সমচতুর্ভুজ সমান ; [২য়, ৭] প্রত্যেকে ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে, গখ, খঘ ও ঘক এই তিন রেখার উপর তিনটি সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, গখ ও খঘএর অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়ত এবং গঘ ও ঘকএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ; এইগুলির মধ্যে খঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান এবং গঘ ও ঘকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় কগএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [১ম, ৪৭।

সুতরাং গখ ও খকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, কগ এর উপর সমচতুর্ভুজ এবং গখ, খঘএর দ্বিগুণিত আয়তের সমান ;

অর্থাৎ শুদ্ধ কগএর উপর সমচতুর্ভুজ, গখ ও খকএর উপর দুই সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা, গখ ও খঘএর আয়ত পরিমাণে ক্ষুদ্রতর ।

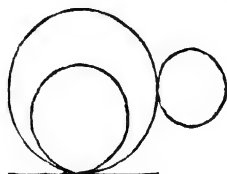
তৃতীয় অধ্যায় ।

সংজ্ঞা ।

১। যে সকল বৃত্তের ব্যাস সমান অথবা তাহাদের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা গুলি সমান তাহাদিগকে সমান বৃত্ত বলা যায় ।

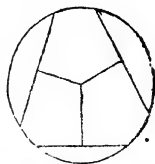
“এইটিকে সংজ্ঞা স্বরূপ জ্ঞান না করিয়া, উপপাদ্য বলিয়া গ্রহণ করিতে হইবে ; কেননা, বৃত্ত গুলিকে পরস্পর উপযু্যপরি স্থাপন করিলে, যদি কেন্দ্র গুলি মিলিয়া যায় তবে বৃত্ত সকলও মিলিয়া যাইবে ; কারণ, তাহাদের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত সরল রেখা গুলি সমান ।”

২। এক সরল রেখা কোন বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, সরল রেখাটি বৃত্তে সংলগ্ন হইয়াছে এবং উহা বর্দ্ধিত হইলে বৃত্তকে ছেদ করে না ।



৩। বৃত্ত সকল পরস্পর স্পর্শ করিয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, তাহারা সংলগ্ন হইয়াছে কিন্তু পরস্পরকে ছেদ করে নাই ।

৪ কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী সরল রেখা সকল বলিলে বুঝিতে হইবে যে, কেন্দ্র হইতেই সকল রেখার উপর অঙ্কিত লম্ব গুলি পরস্পর সমান ।



৫। যে সরল রেখার উপর সর্বাংগে বৃত্তের লম্ব টানা যায়, সেইটাকে কেন্দ্র হইতে সর্বাংগে অধিক দূরবর্তী বলা যায় ।

৬। একটী সরল রেখা ও তদ্বারা ছেদিত পরিধিখণ্ড দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রের নাম বৃত্তখণ্ড ।

৭। এই সরল রেখার ও পরিধিখণ্ডের অন্তর্গত কোণকে বৃত্তখণ্ডের কোণ বলা যায় ।

৮। পরিধির কোন বিন্দু হইতে বৃত্তখণ্ডের ভূমির দুই প্রান্ত পর্যন্ত দুই সরল রেখা টানিলে, ইহাদের অন্তর্গত কোণকে বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ বলা যায় ।



৯। এই কোণের পার্শ্বস্থ দুই রেখার মধ্যবর্তী পরিধিখণ্ডের উপর ইহা দণ্ডায়মান আছে, এরূপ বলা যায় ।

১০। কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত দুই সরল রেখা ও তন্মধ্যস্থিত পরিধিখণ্ড দ্বারা পরিবদ্ধ ক্ষেত্রকে বৃত্তলোম্বক বলা যায় ।



১১। যে সকল বৃত্ত-

খণ্ডস্থ কোণ পরস্পর সমান,



তাহাদিগকে সদৃশ বৃত্তখণ্ড বলা যায় ।

অতিরিক্ত সংজ্ঞা ।

১। পরিধি খণ্ডের নাম চাপ ।

২। চাপের দুই প্রান্ত সংযোজক সরল রেখার নাম জ্যা ।

৩। বৃত্তের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে কোন সরল রেখা টানিলে, যদি তাহা বৃত্ত পরিধিকে দুই বিন্দুতে ছেদ করে। তবে তাহাকে খণ্ডিণী বলা যায় । ইহা বৃত্তকে দুই সমান বা অসমান খণ্ডে বিভক্ত করিতে পারে । খণ্ডিণী বর্দ্ধিত জ্যা মাত্র ।

৪। যে সরল রেখা কোন বৃত্ত স্পর্শ করে, তাহাকে স্পর্শিণী বা স্পর্শক রেখা বলা যায় ।

৫। যে সকল বৃত্তের কেন্দ্র একই বিন্দু তাহাদিগকে ঐক-কেন্দ্রিক বৃত্ত বলা যায় ।

১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে ।

কথগ নির্দিষ্ট বৃত্ত ; ইহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে ।

বৃত্তের অভ্যন্তরে কথ সরল রেখা টান ; এবং কথকে

ঘ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর ; [১ম, ১০।

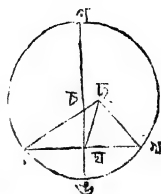
য বিন্দু হইতে কথের সহিত সম কোণ করিয়া ঘগ সরল রেখা টান ; [১ম, ১১।

এবং গযকে ঙ পর্যন্ত বর্দ্ধিত করিয়া গঙকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর । [১ম, ১০।

চ বিন্দু কথগ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে ।

যদি চ কেন্দ্র না হয়, তবে ছ যেন কেন্দ্র হইল ;
ছক, ছঘ ও ছথ সংযুক্ত কর ।

পরে ঘক, ঘথএর সমান হওয়াতে,
এবং ঘছ, কঘছ ও খঘছ ত্রিভুজ
দ্বয়ের সাধারণ বাহু বলিয়া,
কঘ ও ঘছ দুই বাহু ক্রমে খঘ ও
ঘছ দুই বাহুর সমান ;



এবং ছক ভূমি ছথ ভূমির সমান ;

কেননা, এই দুই সরল রেখা কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত
টানা হইয়াছে ;*

[১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।

অতএব কঘছ কোণ খঘছ কোণের সমান ; [১ম, ৮ ।

আর এক সরল রেখা অন্য একটি সরল রেখার উপর
দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দ্বয় পরস্পর সমান
হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে সম কোণ বলা
যায় ;

[১ম, সংজ্ঞা ১০ ।

এই হেতু ছঘথ কোণ সম কোণ,

আর চঘথ কোণও সম কোণ,

[অঙ্কন ।

সুতরাং ছঘথ কোণ চঘথ কোণের সমান, [স্বতঃ ১১ ।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর রহত্তরের সমান ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

অতএব ছ বিন্দু কথগ রত্তের কেন্দ্র নহে ।

* এই প্রতিজ্ঞা শ্রুতিতে “কেন্দ্র হইতে সরল রেখা” এইরূপ
লিখিত উঠিলে, বুঝিতে হইবে যে, রেখাটি কেন্দ্র হইতে পরিধি
পর্য্যন্ত টানা হইয়াছে ।

এই রূপে প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে যে, গুণ্ড রেখার বহিস্থ কোন বিন্দু কেন্দ্র হইতে পারে না ; আর গুণ্ড, চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হওয়াতে, গুণ্ড রেখাস্থ অন্য কোন বিন্দু ইহাকে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত করিবে ; এজন্য তাহা কেন্দ্র হইতে পারে না ।

সুতরাং চ বাতীত অন্য কোন বিন্দু কেন্দ্র হইতে পারে না, অর্থাৎ চ, কথগ বৃত্তের কেন্দ্র । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অনুমান । ইহা দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, বৃত্তের অভ্যন্তরীণ কোন সরল রেখা, অন্তরস্থ অন্য এক সরল রেখার সহিত সম কোণ করিয়া তাহাকে দ্বিখণ্ড করিলে, বৃত্তের কেন্দ্র দ্বিখণ্ডকারক রেখাতে অবস্থিত হয় ।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১। কোন বৃত্তের চাপ নির্দিষ্ট আছে ; এই চাপের অর্থাৎ ইহা যে বৃত্তের চাপ তাহার কেন্দ্র নির্ণয় করিতে হইবে ।

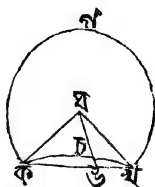
১। যখন একটা বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার পরিধি, তিনটা নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যার ; কিন্তু ঐ তিন বিন্দু এক সরল রেখাতে অবস্থিত নহে ।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

বৃত্ত পরিধিতে দুই বিন্দু কম্পনা করিলে, তাহাদের যোজক সরল রেখা বৃত্তের ভিতরে পড়িবে ।

কথগ বৃত্তের পরিধিতে ক ও খ যেন দুই কম্পিত বিন্দু ; ক হইতে খ পর্য্যন্ত সরল রেখা টানিলে তাহা বৃত্তের ভিতরে পড়িবে ।

যদি এরূপ না হয়, তবে সরল
রেখাটি যেন রূত্তের বাহিরে
পড়িল; যথা—কঙথ;
কথগ রূত্তের য কেন্দ্র নির্ণয়
করিয়া, [৩য়, ১।



যক ও যথ সংযুক্ত কর; এবং কথ পরিধিখণ্ডে চ বিন্দু
কম্পনা করিয়া, যচ সংযুক্ত ও ইহাকে ঙ পর্য্যন্ত বর্দ্ধি
কর।

পরে যক, যথএর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
যকথ কোণ যথক কোণের সমান। [১ম, ৫।
আবার যকঙ ত্রিভুজের কঙ বাহু থ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে
বলিয়া, বহিস্থ যঙথ কোণ, অন্তরস্থিত যকঙ কোণ
অপেক্ষা রূহত্তর; [১ম, ১৬।

ইহাদের মধ্যে যকঙ, যথঙ কোণের সমান প্রমাণ হইয়াছে;
এই হেতু যঙথ কোণ, যথঙ কোণ অপেক্ষা রূহত্তর;
আর রূহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু রূহত্তর হয়; [১ম, ১৯।
অতএব যথ, যঙ অপেক্ষা রূহত্তর;

কিন্তু যথ, যচএর সমান; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
সুতরাং যচ, যঙ অপেক্ষা রূহত্তর, অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর
রূহত্তর অপেক্ষা বড়;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব।

অতএব ক হইতে থ পর্য্যন্ত সরল রেখা টানিলে, তাহা
রূত্তের বাহিরে পড়িবে না।

এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, ইহা পরিধিখণ্ডের সহিত

সংলগ্ন হইবে না ।

সুতরাং ইহা রূত্তের মধ্যে পড়িবে ।

অতএব রূত্ত পরিধিতে ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩। এক সরল রেখা কোন বৃত্ত পরিধিকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারি না ।

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

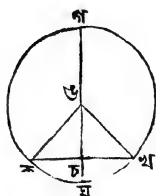
বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া কোন সরল রেখা টানিলে, যদি তাহা বৃত্তের অভ্যন্তরীণ ও কেন্দ্রের বহির্গত অন্য কোন সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড করে, তবে তাহার সহিত সম কোণ করিবে, আর সম কোণ করিলে তাহাকে দ্বিখণ্ড করিবে ।

কথগ বৃত্তের কেন্দ্র হইতে গয সরল রেখা টানিলে, যদি ইহা বৃত্তের অভ্যন্তরীণ ও কেন্দ্রের বহির্গত কথ সরল রেখাকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করে, তবে গয, কথএর সহিত সম কোণ করিবে ।

ওকে বৃত্তের কেন্দ্র
নির্ণয় করিয়া, [৩য়, ১।

ওক ও ওখ সংযুক্ত কর ।

পরে কচ, চখএর সমান
বলিয়া, [কম্পনা ।



এবং চও, কচও ও খচও ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ বাহু বলিয়া,
কচ ও চও বাহু দ্বয় ক্রমে খচ ও চও বাহু দ্বয়ের সমান ;
এবং ওক ভূমি ওখ ভূমির সমান ; [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।

অতএব কচঙ কোণ খচঙ কোণের সমান ; [১ম, ৮।

আর এক সরল রেখা অন্য একটী সরল রেখার উপর দণ্ডায়মান হইলে, যদি সন্নিহিত কোণ দ্বয় পরস্পর সমান হয়, তবে তাহাদের প্রত্যেক কোণকে সম কোণ বলা যায় ; [১ম, সংজ্ঞা ১০।

সুতরাং কচঙ ও খচঙ এই দুইএর প্রত্যেকে সম কোণ।

অতএব কেন্দ্র গত গঘ সরল রেখা, কেন্দ্রের বহির্গত কখ সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড করিয়া ইহার সহিত সম কোণ করিতেছে।

অনন্তর গঘ যেন কখএর সহিত সম কোণ করিতেছে ; গঘ, কখকে দ্বিখণ্ড করিবে, অর্থাৎ কচ, চখএর সমান হইবে।

পূর্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত কর।

এক্ষণে, কেন্দ্র হইতে ঙক ও ঙখ দুই রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া ইহারা পরস্পর সমান, [১ম, সংজ্ঞা ১৫। এই হেতু ঙকচ কোণ, ঙখচ কোণের সমান ; [১ম, ৫।

অতএব কচঙ ও খচঙ ত্রিভুজ দ্বয়ের একের দুইটী কোণ, ক্রমে অন্যের দুইটী কোণের সমান ; এবং প্রত্যেক ত্রিভুজের এক একটী সমান কোণের সম্মুখীন চঙ রেখা দুই ত্রিভুজের সাধারণ বাহু ;

এই হেতু অন্যান্য বাহু গুলি সমান ; [১ম, ২৬।

সুতরাং কচ, চখএর সমান।

অতএব রূত্তের কেন্দ্র দিয়া ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৪। যদি কোন সরল রেখা দুই এককেন্দ্রিক বৃত্তের পরিধি ছেদ করে, তবে পরিধি দ্বয়ের মধ্যস্থিত তাহার দুই খণ্ড পরস্পর সমান হইবে।

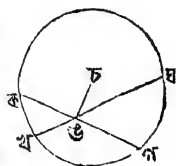
৫। কথগ বৃত্তের কথ জ্যার মধ্য বিন্দু চ এবং ও ঐ বৃত্তের কেন্দ্র ; যদি কথ, ওচএর দ্বিগুণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, কঙচ একটি সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন বৃত্তের অন্তরস্থ দুই সরল রেখা যদি পরস্পরকে ছেদ করে, আর উহাদের মধ্যে একটি বা উভয়েই কেন্দ্র গত না হয়, তবে তাহারা পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করিবে না।

কথগঘ বৃত্তের অন্তরস্থ কগ ও থঘ রেখা যেন পরস্পরকে ছেদ করিতেছে, কিন্তু উভয়ে কেন্দ্র গত নহে ; কগ ও থঘ পরস্পর দ্বিখণ্ড করিবে না।

এই দুইটি সরল রেখার মধ্যে একটি কেন্দ্র গত হইলে, সহজেই বোধ যাইবে যে, অন্যটির অর্থাৎ যেটি কেন্দ্র গত নহে, তাহা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইতে পারে না ;



আর ইহাদের মধ্যে কোনটাই কেন্দ্র গত না হইলে, যদি সম্ভব হয়, তবে যেন কঙ, ওগএর এবং গঙ, ওঘএর সমান হইল।

বৃত্তের কেন্দ্র স্বরূপ চ বিন্দু কল্পনা করিয়া, [৩য়, ১। চঙ সংযুক্ত কর।

পরে কেন্দ্র গত চওঁ সরল রেখা, কেন্দ্রের বহির্গত অন্য
একটা কণ রেখাকে দ্বিখণ্ড করিয়াছে বলিয়া, [কম্পনা ।
চওঁ, কণএর সহিত সম কোণ করিতেছে ; [৩য়, ৩ ।
এই হেতু চওঁক, সম কোণ ।

আবার চওঁ, কেন্দ্রের বহির্গত খণ সরল রেখাকে দ্বিখণ্ড
করিতেছে বলিয়া, [কম্পনা ।

চওঁ, খণএর সহিত সম কোণ করিতেছে ; [৩য়, ৩ ।
এই হেতু চওঁখ সম কোণ ;

আর চওঁক কোণ যে সম কোণ, তাহা প্রমাণ হইয়াছে ;
অতএব চওঁক কোন চওঁখএর সমান, [স্বতঃ ১১ ।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃত্তের সমান ; কিন্তু একপ হওয়া
অসম্ভব ।

সুতরাং কণ ও খণ পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করিতে পারে না ।
অতএব কোন বৃত্তের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

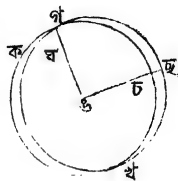
অঃ প্রঃ—৬ । বৃত্তের অন্তর্গত সমান্তরিক মাত্রেই সমকোণী
হইবে ।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে, উভয়ের এক কেন্দ্র
হইবে না ।

কখনও গণ ও ঘণ দুই বৃত্ত যেন পরস্পরকে গ ও খ বিন্দুতে
ছেদ করিয়াছে ; এই দুই বৃত্তের এক কেন্দ্র হইবে না ।

যদি সম্ভব হয়, তবে ও যেন উভয়ের কেন্দ্র হইল ;
 উগ্গ সংযুক্ত কর এবং উচছ সরল রেখা টান ;
 উচছ যেন পরিধি দ্বয়ের সহিত চ
 ও ছ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল ।



পরে, ও বিন্দু কথগ বৃত্তের
 কেন্দ্র বলিয়া, উগ্গ সরল রেখা
 উচএর সমান । [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

আবার ও বিন্দু গঘছ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া, উগ্গ, উচএর
 সমান ; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

আর প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, উগ্গ, উচএর সমান ;
 এই হেতু উচ, উচএর সমান ।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃত্তের সমান ; কিন্তু এরূপ হওয়া
 অসম্ভব ;

সুতরাং ও, কথগ এবং গঘছ এই উভয় বৃত্তের কেন্দ্র
 হইতে পারে না ।

অতএব দুই বৃত্ত ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৭ । দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে তাহাদের
 কেন্দ্র সংযোজক রেখা, সাধারণ জ্যাকে দ্বিখণ্ড করিয়া তাহার
 সহিত সম কোণ করিবে ।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক বৃত্ত অন্য বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করিলে, তাহা-
 দের উভয়েরই কেন্দ্র এক হইবে না ।

গ ১

গঘঙ রত্ন যেন কথগ রত্নকে অন্তরে গ বিন্দুতে
স্পর্শ করিল ;

ইহাদের উভয়েরই কেন্দ্র এক হইবে না ।

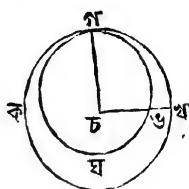
যদি সম্ভব হয়, তবে চ যেন

দুই রত্নের কেন্দ্র হইল ;

চগ সংযুক্ত কর এবং চঙখ সরল
রেখা টান ;

এই রেখা যেন পরিধি দ্বয়ের

সহিত ঙ ও খ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল ।



পরে, চ বিন্দু কথগ রত্নের কেন্দ্র বলিয়া, চগ, চখএর
সমান । [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।

আবার, চ বিন্দু গঘঙ রত্নের কেন্দ্র বলিয়া চগ, চঙর
সমান । [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।

আর প্রমাণ হইয়াছে যে, চগ, চখএর সমান ;

অতএব চঙ, চখএর সমান, [স্বতঃ ১ ।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর রহত্তরের সমান ; কিন্তু এরূপ হওয়া
অসম্ভব ;

সুতরাং চ বিন্দু কথগ ও গঘঙ এই উভয় রত্নেরই কেন্দ্র
নহে ।

অতএব এক রত্ন ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৮ । দুই ঐককেন্দ্রিক বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ বা
ছেদ করিতে পারে না । (এই অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞার সহিত
তৃতীয় অধ্যায়ের ৫ম ও ৬ষ্ঠের বিপরীত সম্বন্ধ ।)

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

বৃত্তের ব্যাসে কেন্দ্র ভিন্ন অন্য কোন বিন্দু কম্পনা করিলে, সেই বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত যত গুলি সরল রেখা অঙ্কিত করিতে পারা যায়, তন্মধ্যে যেটীতে কেন্দ্র অবস্থিত হইবে, সেইটী বৃহত্তম ও ব্যাসের অবশিষ্ট অংশ ক্ষুদ্রতম ; আর অন্যান্য রেখা গুলির মধ্যে যেটী কেন্দ্র গত সরল রেখার নিকটবর্তী সেইটী অধিকতর দূরবর্তী রেখা অপেক্ষা বৃহত্তর, এবং ক্ষুদ্রতম রেখার দুই দিকে এক একটী করিয়া দুইটী মাত্র সমান সরল রেখা, ঐ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত টানা যাইতে পারে ।

কথগঘ বৃত্তের কঘ ব্যাসে, কেন্দ্র হইতে ভিন্ন চ বিন্দু কম্পিত হইয়াছে ; ও যেন বৃত্তের কেন্দ্র ; চ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত চখ, চগ, চছ প্রভৃতি বাবতীয় সরল রেখার মধ্যে, কেন্দ্র গত চক রেখা বৃহত্তম এবং ব্যাসের অপরাংশ অর্থাৎ চঘ ক্ষুদ্রতম ; আর অন্যান্য রেখা গুলির মধ্যে চখ, চগ অপেক্ষা এবং চগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

• খঙ, গঙ ও ছঙ সংযুক্ত কর ।

পরে, ত্রিভুজের দুই বাহুর সমষ্টি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হয় বলিয়া,

[১ম, ২০ ।

খঙ ও গুচ একত্র যোগে, খচ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

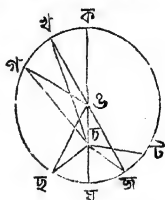
ইহাদের মধ্যে খঙ, কঙর সমান; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

অতএব কঙ ও উচ একত্র যোগে খচ অপেক্ষা বৃহত্তর;

অর্থাৎ কচ রেখা খচ অপেক্ষা
বৃহত্তর।

আবার খঙ, গঙর সমান
বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

এবং খঙচ ও গঙচ দুই



ত্রিভুজের উচ সাধারণ ভূজ বলিয়া, খঙ ও উচ দুই ভূজ
ক্রমে গঙ ও উচ দুই ভূজের সমান;

কিন্তু খঙচ কোণ, গঙচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর;

এই হেতু চখ ভূমি চগ ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর।

এই রূপে প্রমাণ হইবে যে, চগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর।

পুনর্বার ছচ ও চঙ একত্র যোগে, উছ অপেক্ষা বৃহত্তর
বলিয়া, [১ম, ২০।

এবং উছ, উঘএর সমান হওয়াতে, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

ছচ ও চঙ একত্র যোগে, উঘ অপেক্ষা বৃহত্তর।

এই দুই সমান বস্তু হইতে সাধারণ অংশ, অর্থাৎ চঙ
বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট ছচ, অবশিষ্ট চঘ অপেক্ষা বৃহত্তর;

সুতরাং চ বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত অঙ্কিত সরল
রেখা গুলির মধ্যে চক বৃহত্তম ও চঘ ক্ষুদ্রতম;

আর চখ, চগ অপেক্ষা এবং চগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার চ বিন্দু হইতে চঘ রেখার দুই দিকে দুইটি
মাত্র সমান সরল রেখা টানা যাইতে পারে।

ঔচ রেখার ঔ বিন্দুতে চঙ্চ কোণের সমান চঙ্জ কোণ অঙ্কিত করিয়া চজ সংযুক্ত কর । [১ম, ২৩ ।

পরে ঔছ, ঔজএর সমান হওয়াতে, [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।
এবং ছঙ্চ ও জঙ্চ এই দুই ত্রিভুজের চঙ্চ সাধারণ বাহু বলিয়া,

ঔছ ও ঔচ দুই বাহু ক্রমে ঔজ ও ঔচ দুই বাহুর সমান ;
এবং ছঙ্চ কোণ, জঙ্চ কোণের সমান ; [অঙ্কন ।

এই হেতু চছ ভূমি চজ ভূমির সমান । [১ম, ৪ ।

আর চ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত চজ বাতীত অন্য কোন সরল রেখা চছএর সমান করিয়া টানা যায় না ;

যদি সম্ভব হয়, তবে চট রেখাও যেন চছএর সমান হইল ।
পরে চট, চছএর সমান বলিয়া, [কল্পনা ।

এবং চজ, চছএর সমান হওয়াতে,
চজ, চটএর সমান ; [স্বতঃ ১ ।

অর্থাৎ কেন্দ্র গত রেখার নিকটবর্ত্তী একটি সরল রেখা তদপেক্ষা দূরবর্ত্তী রেখার সমান ;

কিন্তু পূর্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

অতএব বৃত্তের ব্যাসে ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১ । ব্যাসের কোন বিন্দু হইতে তাহার সহিত সমান সমান কোণ করিয়া যদি দুইটি জ্যা টানা যায়, তবে ঐ দুইটি জ্যা পরস্পর সমান ও কেন্দ্র হইতে সম দূরবর্ত্তী হইবে ।

৮ প্রতিজ্ঞা — উপপাদ্য ।

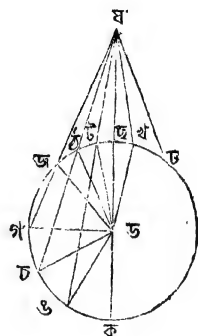
কোন বৃত্তের বাহিরে একটা বিন্দু কল্পনা করিয়া তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত যদি কতিপয় সরল রেখা টানা যায় ও তন্মধ্যে একটা কেন্দ্র গত হয়, তবে যে রেখা গুলি পরিধির ন্যূন পৃষ্ঠে পতিত হয়, তাহাদের মধ্যে কেন্দ্র গত রেখাটী বৃহত্তম এবং অবশিষ্ট গুলির মধ্যে যেটী কেন্দ্রগত রেখার নিকটবর্তী, সেইটী অধিকতর দূরবর্তী রেখা অপেক্ষা বৃহত্তর ; কিন্তু যে রেখা গুলি কুজ পৃষ্ঠে পতিত হয়, তন্মধ্যে যেটী বৃত্তের বহিস্থ কল্পিত বিন্দু ও ব্যাসের মধ্যস্থিত, সেইটী ক্ষুদ্রতম এবং অবশিষ্ট গুলির মধ্যে যেটী, ক্ষুদ্রতমের নিকটবর্তী, সেইটী অধিকতর দূরবর্তী রেখা হইতে ক্ষুদ্রতর ; আর ঐ বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত ক্ষুদ্রতম রেখার দুই দিকে এক একটা করিয়া দুইটী মাত্র সমান সরল রেখা টানা যাইতে পারে ।*

কথগ বৃত্তের বাহিরে য বিন্দু কল্পনা করিয়া যক, যঙ, যচ ও যগ কতিপয় সরল রেখা টান এবং ইহাদের মধ্যে যক যেন কেন্দ্র গত হইয়াছে ; যে রেখা গুলি কঙচগ ন্যূন পৃষ্ঠে পতিত হইয়াছে, তন্মধ্যে যক রেখা বৃহত্তম এবং যেটী ইহার নিকটবর্তী, সেইটী অধিকতর দূরবর্তী রেখা অপেক্ষা

* বৃত্ত পরিধির বহির্দিকের নাম কুজ ও অন্তর দিকের নাম ন্যূন পৃষ্ঠ ।

রহত্তর ; অর্থাৎ ঘঙ, ঘচ অপেক্ষা ও ঘচ, ঘগ অপেক্ষা
রহত্তর ; কিন্তু যে রেখা গুলি ছটঠজ কুজ পৃষ্ঠে পতিত
হইয়াছে, তন্মধ্যে ঘ বিন্দু ও কছ বাসের মধ্য স্থিত ঘছ
রেখা ক্ষুদ্রতম এবং যেটী ইহার নিকটবর্তী সেইটী অধিক-
তর দূরবর্তী রেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, অর্থাৎ ঘট, ঘঠ
অপেক্ষা ও ঘঠ, ঘজ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

উ বিন্দুকে কথগ রত্তের
কেন্দ্র কল্পনা কর । [৩য়, ১ ।
এবং ডট, ডঠ, ডজ, ডগ,
ডচ ও ডঙ সংযুক্ত করিয়া
দাও ।



পরে, ত্রিভুজের দুই বাহু
একত্র যোগে তৃতীয় অপেক্ষা
রহত্তর হয় বলিয়া, [১ম ২০ ।
ঙড ও ডঘ একত্র যোগে ঙঘ
অপেক্ষা রহত্তর ;

ইহাদের মধ্যে ঙড, কঙএর সমান ; [১ম, সং ১৫ ।
অতএব কড ও ডঘ একত্র যোগে ঙঘ অপেক্ষা রহত্তর ;
অর্থাৎ কঘ, ঙঘ অপেক্ষা রহত্তর ।

আবার ঙড, চঙর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।
এবং ঙডঘ ও চডঘ দুই ত্রিভুজের ডঘ সাধারণ বাহু
হওয়াতে,

ঙড ও ডঘ দুই বাহু ক্রমে চড ও ডঘ দুই বাহুর সমান ;
কিন্তু ঙডঘ কোণ চডঘ কোণ অপেক্ষা রহত্তর ;

এই হেতু ঙয ভূমি, চয ভূমি অপেক্ষা বৃহত্তর । [১ম, ২৪ ।
 এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, চয, গয অপেক্ষা বৃহত্তর ;
 সুতরাং যক বৃহত্তম এবং যঙ, যচ অপেক্ষা ও যচ, যগ
 অপেক্ষা বৃহত্তর ।

পুনর্বার, ডট ও টয একত্র যোগে ডয অপেক্ষা
 বৃহত্তর বলিয়া, [১ম, ২০ ।

এবং ডট, ডছএর সমান হওয়াতে, [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।
 অবশিষ্ট টয, অবশিষ্ট ছয অপেক্ষা বৃহত্তর,
 অর্থাৎ ছয, টয অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

আবার, ডঠয ত্রিভুজের ডয ভূমির ড ও য দুই প্রান্ত
 হইতে অভ্যন্তরীণ ট বিন্দু পর্যন্ত ডট ও যট দুই সরল
 রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া,

ডট ও যট রেখা দ্বয় একত্র যোগে ডঠ ও যঠ অপেক্ষা
 ক্ষুদ্রতর ; [১ম, ২১ ।

ইহাদের মধ্যে ডট, ডঠএর সমান ; [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।
 অতএব অবশিষ্ট টয, অবশিষ্ট ঠয অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, ঠয, জয অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;
 সুতরাং যছ ক্ষুদ্রতম এবং যট, যঠ অপেক্ষা ও যঠ, যজ
 অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

অনন্তর, য বিন্দু হইতে পরিধি পর্যন্ত ক্ষুদ্রতম রেখার
 দুই দিকে এক একটা করিয়া দুইটি মাত্র সমান সরল রেখা
 টানিতে পারা যায় ।

ডয রেখার ড বিন্দুতে যডট কোণের সমান যডথ
 কোণ কর, [১ম, ২৩ ।

এবং ঘথ সংযুক্ত করিয়া দাও ।

পরে ডট, ডথএর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।

টড ও ডঘ দুই বাহু ক্রমে খড ও ডঘএর সমান ;

আর ঘডট কোণ, ঘডথ কোণের সমান ; [অঙ্কন ।

স্বতরাং ঘট ভূমি ঘথ ভূমির সমান । [১ম, ৪ ।

আর য বিন্দু হইতে পরিধি পর্য্যন্ত ঘথ বাতীত অন্য কোন সরল রেখা ঘটএর সমান করিয়া টানা যাইতে পারে না ;

যদি এরূপ সম্ভব হয়, তবে ঘট যেন ঘটএর সমান হইল ।

পরে ঘট, ঘটএর সমান বলিয়া,

এবং ঘথ, ঘটএর সমান হওয়াতে,

ঘথ, ঘটএর সমান ; [স্বতঃ ১ ।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর রেখার নিকটবর্তী রেখা অধিকতর দূরবর্তী রেখার সমান ;

কিন্তু পূর্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

অতএব কোন বৃত্তের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১০ । যদি কোন বৃত্তের দুই বর্জিত জ্যা বর্জিত ব্যাসের কোন এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়া তাহার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে, তবে ঐ দুইটী জ্যা পরস্পর সমান ও কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী হইবে ।

• ৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

বৃত্তের ভিত্তান্তরে একটি বিন্দু কল্পনা করিলে, যদি তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত দুইএর অধিক কতিপয়

সমান সরল রেখা টানিতে পারা যায়, তবে সেই বিন্দুই
বৃত্তের কেন্দ্র হইবে ।

কথং বৃত্তের অভ্যন্তরে য বিন্দু কল্পনা করিলে, যদি
তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত দুইএর অধিক যক, যথ, যগ
কতিপয় সমান সরল রেখা টানিতে পারা যায়, তবে য
বিন্দুই ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে ।

যদি না হয়, তবে যেন ও

বিন্দু কেন্দ্র হইল ;

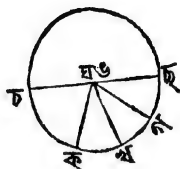
যও সংযুক্ত কর এবং ইহাকে

উভয় পাশ্বে বর্দ্ধিত করিয়া

পরিধির সহিত চ ও ছ

বিন্দুতে মিলাইয়া দাও ;

তাহা হইলে চছ রেখা কথং বৃত্তের একটী ব্যাস হইবে ।



পরে, কথং বৃত্তের চছ ব্যাসে কেন্দ্র হইতে ভিন্ন য বিন্দু
কল্পিত হইয়াছে বলিয়া, য হইতে পরিধি পর্য্যন্ত
অঙ্কিত সরল রেখা গুলির মধ্যে যছ বৃহত্তম এবং যগ, যথ
অপেক্ষা ও যথ, যক অপেক্ষা বৃহত্তর ; [৩য়, ৭।
কিন্তু ইহারা পরস্পর সমান কল্পিত হইয়াছে ;

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব ;

এই হেতু ও বিন্দু কথং বৃত্তের কেন্দ্র নহে ।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, য ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু
কথং বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পারে না ;

সুতরাং য বিন্দুই কথং বৃত্তের কেন্দ্র ।

অতএব বৃত্তের অভ্যন্তর ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাত্ত ।

অঃ প্রঃ—১১। যদি কোন বৃত্তের পরিধিতে সমকোণী ত্রিভুজের তিনটি কোণিক বিন্দু অবস্থিত হয়, তবে কর্ণের মধ্য বিন্দু ঐ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

১০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন বৃত্ত পরিধি অন্য এক বৃত্ত পরিধিকে দুইএর অধিক বিন্দুতে ছেদ করিতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে কথগ বৃত্ত পরিধি যেন ঘঙচ বৃত্ত পরিধিকে দুইএর অধিক থ, ছ, চ বিন্দুতে ছেদ করিল।

ট বিন্দুকে কথগ বৃত্তের কেন্দ্র কল্পনা কর, [৩য়, ১।
এবং টখ, টছ ও টচ সংযুক্ত
করিয়া দাঁও।



পরে, ট বিন্দু কথগ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া,

টখ, টছ ও টচ ইহারা পরস্পর সমান। [১ম, সংজ্ঞা ১৫।
আবার, ঘঙচ বৃত্তের অভ্যন্তরে ট বিন্দু কল্পিত হইয়াছে
এবং তথা হইতে পরিধি পর্য্যন্ত দুইএর অধিক টখ, টছ
ও টচ সমান সরল রেখা গুলি অঙ্কিত হইয়াছে; অতএব
ট বিন্দু ঘঙচ বৃত্তের কেন্দ্র ; [৩য়, ৯।

আর ট বিন্দু কথগ বৃত্তেরও কেন্দ্র। [অঙ্কন।

সুতরাং এক বিন্দু পরস্পর ছেদিত দুই বৃত্তেরই কেন্দ্র
হইল; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [৩য়, ৫।

অতএব কোন বৃত্ত পরিধি ইত্যাদি। এখানে ইহাই
উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১২। দুই বৃত্ত পারস্পরিক পরস্পরকে ছেদ করিলে, যদি একটি ছেদ বিন্দু হইতে দুই বৃত্তের দুইটি ব্যাস টানা যায়, তবে ঐ দুই ব্যাসের অপর প্রান্ত দ্বয় এবং বৃত্ত দুইটির অন্য ছেদ বিন্দু, একই সরল রেখাতে থাকিবে।

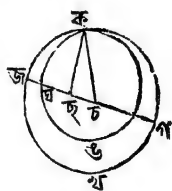
১১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করে, তবে তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক সরল রেখা বর্দ্ধিত হইলে বৃত্ত দ্বয়ের সংযোগ বিন্দু দিয়া যাইবে।

কহণ্ড বৃত্ত কখগ বৃত্তকে যেন ক বিন্দুতে অন্তরে স্পর্শ করিয়াছে; এবং চ যেন কখগ বৃত্তের ও ছ যেন কহণ্ড বৃত্তের কেন্দ্র; চ ও ছ কেন্দ্র দ্বয়ের সংযোজক রেখা বর্দ্ধিত হইলে ক বিন্দু দিয়া যাইবে।

যদি ক বিন্দু দিয়া না যায়, তবে চছযজএর ন্যায় অন্য রূপে যাইবে; কচ ও কছ সংযুক্ত কর।

পরে, চছ ও ছক একত্র যোগে চক অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া, [১ম, ২০।
এবং চক, চজএর সমান হওয়াতে, ১ম, সংজ্ঞা ১৫।



চছ ও ছক, একত্র যোগে, চজ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
এই দুই সমান বস্তু হইতে সাধারণ চছ অংশ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট ছক অবশিষ্ট চজ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; [স্বতঃ ৫।

ইহাদের মধ্যে ছক, চছএর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

ছঘ, ছজ অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তর অপেক্ষা বড় ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ;

সুতরাং চ ও ছএর সংযোজক রেখা ক ব্যতীত অন্য কোন বিন্দু দিয়া যাইতে পারে না ; অর্থাৎ ইহা ক বিন্দু দিয়াই যাইবে ।

অতএব যদি এক বৃত্ত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

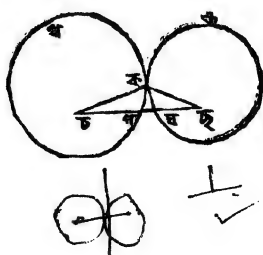
অঃ প্রঃ—১৩। এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করিলে, তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক রেখা দুই বৃত্তের ব্যাসার্ধের অন্তরের সমান হইবে ।

১২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই বৃত্ত পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করিলে তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক রেখা, বৃত্ত দ্বয়ের সংযোগ বিন্দু দিয়া যাইবে ।

কখগ ও কঘঙ দুই বৃত্ত যেন ক বিন্দুতে পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করিতেছে ; এবং চ যেন কখগ বৃত্তের ও ছ যেন কঘঙ বৃত্তের কেন্দ্র ; চ ও ছ কেন্দ্র দ্বয় সংযোজক রেখা, ক বিন্দু দিয়া যাইবে ।

যদি ক বিন্দু দিয়া না যায়, তবে সম্ভব হইলে অন্য রূপে চগঘছএর ন্যায় যাইবে। কচ ও কছ সংযুক্ত কর ।



পরে, চ বিন্দু কখগ র্ত্তের কেন্দ্র হওয়াতে, চক,
চগএর সমান ; [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।

আর ছ বিন্দু কঘঙ র্ত্তের কেন্দ্র হওয়াতে, ছক, ছঘএর
সমান ;

এই হেতু চক ও কছএর সমষ্টি চগ ও ঘছএর সমষ্টির
সমান ; [স্বতঃ ২ ।

এজনা সমস্ত চছ রেখা, চক ও কছ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

আবার চছ রেখা, চক ও কছ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; [১ম, ২০ ।

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব ;

সুতরাং চ ও ছ কেন্দ্র সংযোজক রেখা ক বাতীত অন্য
কোন বিন্দু দিয়া যাইতে পারে না, অর্থাৎ ইহা ক বিন্দু
দিয়াই যাইবে ।

অতএব দুই বৃত্ত ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১৪ । এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে বাহিরে বা অন্তরে
স্পর্শ করিলে যদি দুইটি বৃত্তের পরস্পর সমান্তর দুইটি ব্যাস
টানা যায়, তবে বৃত্তদ্বয়ের সংযোগ বিন্দু ও প্রত্যেক ব্যাসের
এক একটি প্রান্ত একই সরল রেখাতে থাকিবে ।

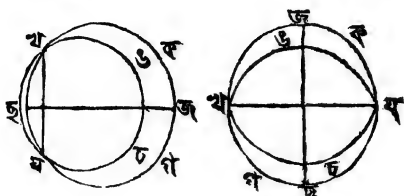
১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন বৃত্ত আর একটিকে একাধিক বিন্দুতে অন্তরে
বা বাহিরে স্পর্শ করিতে পারে না ।

যদি সম্ভব হয়, তবে প্রথমত যেন ওখচ বৃত্ত,
বৃত্তকে অন্তরে, একাধিক খ ও ঘ বিন্দুতে, স্পর্শ করিল ।

ঋষ সংযুক্ত ও তাহাতে দ্বিখণ্ড কর ;

ঋষএর সহিত সম কোণ করিয়া তাহার মধ্য বিন্দু হইতে
ছজ সরল রেখা টান । [১ম, ১০ ও ১১ ।



পরে, খ ও য এই দুই বিন্দু প্রত্যেক রক্ত পরিধিতে
অবস্থিত হওয়াতে, ঋষ সরল রেখা প্রত্যেকের অন্তরে
থাকিবে ; [৩য়, ২ ।

এই হেতু ঋষএর সহিত সম কোণ করিয়া তাহার মধ্য
বিন্দু হইতে যে ছজ সরল রেখা টানা হইয়াছে, তাহাতেই
দুই রক্তের কেন্দ্র অবস্থিত হইবে ; [৩য়, ১, অনু ।

অতএব ছজ সরল রেখা দুই রক্তের সংযোগ বিন্দু দিয়া
যাইবে ; [৩য়, ১১ ।

কিন্তু ছজ, সংযোগ বিন্দু দিয়া যাইতেছে না ; কেননা,
খ ও য বিন্দু, ছজ রেখা হু না হইয়া তাহার বাহিরে
আছে ;

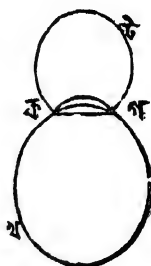
সুতরাং এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

অতএব এক রক্ত অন্য এক রক্তকে অন্তরে একাধিক বিন্দুতে
স্পর্শ করিতে পারে না ।

এক রক্ত অন্য এক রক্তকে বাহিরেও একাধিক বিন্দুতে
স্পর্শ করিতে পারে না ।

যদি সম্ভব হয়, তবে কগটি বৃত্ত
যেন কখগ বৃত্তকে ক ও গ বিন্দুতে
স্পর্শ করিল। কগ সংযুক্ত কর।

পরে, ক ও গ বিন্দু দ্বয় কটগ বৃত্ত
পরিধিস্থ হওয়াতে, ইহাদের সংযো-
জক কগ সরল রেখা, কটগ বৃত্তের



অন্তরস্থ হইবে ; [৩য়, ২।

আর কগটি বৃত্ত, কখগ বৃত্তের বহিস্থ বলিয়া, [কম্পনা।

কগ সরল রেখা কখগ বৃত্তের বাহিরে থাকিবে।

আবার ক ও গ বিন্দু কখগ বৃত্ত পরিধিস্থ হওয়াতে,
কগ সরল রেখা কখগ বৃত্তের অন্তরস্থ হইবে ; [৩য়, ২।

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব ;

সুতরাং এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে বাহিরে একাধিক
বিন্দুতে স্পর্শ করিতে পারে না ;

আর প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে
অন্তরে একাধিক বিন্দুতে স্পর্শ করিতে পারে না।

অতএব কোন বৃত্ত ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৫। এক বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ
করিলে, যদি আর একটা বৃত্ত এরূপে অঙ্কিত করা যায়, যে
তাহা পূর্বোক্ত দুই বৃত্তের একটিকে অন্তরে ও অন্যটিকে বাহিরে
স্পর্শ করে, তবে প্রথম দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইতে তৃতীয় বৃত্তের
কেন্দ্রের দূরত্বের সমষ্টি, অপরিবর্তনীয় রাশি হইবে।

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

রত্নস্থ সমান সমান সরল রেখা কেন্দ্র হইতে সমদূর-
বর্তী আর যে সকল সরল রেখা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী,
তাহারা পরস্পর সমান ।

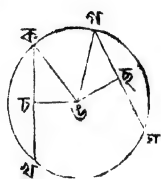
কথঘণ রত্নস্থ কথ ও গঘ দুই সরল রেখা যেন পর-
স্পর সমান ;

ইহারা কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী হইবে ।

ও বিন্দুকে কথঘণ রত্নের কেন্দ্র
কল্পনা করিয়া, [৩য়, ১।

কথ ও গঘ রেখা দুয়ের উপর, ও হইতে
ওচ ও ওছ লম্ব টান ; [১ম, ১২।

এবং ওক ও ওগ সংযুক্ত কর ।



পরে, কেন্দ্র গত ওচ রেখা কেন্দ্রের বহির্গত কথ
রেখার সহিত সম কোণ করিতেছে বলিয়া, উহা কথকে
দ্বিগুণ করিবে ; [৩য়, ৩।

অতএব কচ, চখএর সমান এবং কথ, কচএর দ্বিগুণ ।

এই কারণে গঘ, গছএর দ্বিগুণ ;

আর কথ, গঘএর সমান ; [কল্পনা ।

এই হেতু কচ, গছএর সমান । [স্বতঃ ৭।

• আবার কঙ, গঙের সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

কঙের উপর সমচতুর্ভুজ, গঙের উপর সমচতুর্ভুজের সমান ।

ইহাদের মধ্যে কঙের উপর সমচতুর্ভুজ, কচ ও চঙের উপর
সমচতুর্ভুজ দুয়ের সমান ; কেননা কচও সম কোণ ; [১ম, ৪৭।

এই কারণে ঔগ্‌এর উপর সমচতুর্ভুজ, গছ ও ছগ্‌র উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ;

অতএব কচ ও চগ্‌র উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, গছ ও ছগ্‌র উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ; [স্বতঃ ১।

আর কচ, গছএর সমান হওয়াতে, কচএর উপর সমচতুর্ভুজ গছএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

অতএব অবশিষ্ট চগ্‌র উপর সমচতুর্ভুজ, অবশিষ্ট ছগ্‌র উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [স্বতঃ ৩।

এই হেতু ঔচ সরল রেখা ঔছএর সমান ।

আবার যে সকল সরল রেখার উপর কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত লম্ব গুলি সমান হয়, তাহাদিগকে কেন্দ্র হইতে সমদূর-বর্তী বলা যায় ; [৩য়, সংজ্ঞা ৪ ।

সুতরাং কথ ও গঘ সরল রেখা দ্বয় কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী ।

অনন্তর যদি কথ ও গঘ কেন্দ্র হইতে সমদূরবর্তী হয়, অর্থাৎ ঔচ, ঔছএর সমান হয়, তাহা হইলে কথ, গঘএর সমান হইবে ।

পূর্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত করিলে, ১ম প্রকরণের ন্যায়প্রতিপন্ন হইবে যে, কথ সরল রেখা কচএর দ্বিগুণ এবং গঘ, গছএর দ্বিগুণ ; আর ঔচ ও চকএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, ঔছ ও ছগ্‌এর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ; ইহাদের মধ্যে ঔচএর উপর সমচতুর্ভুজ, ঔছএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

কেননা ঔচ, ঔছএর সমান ; [কম্পনা ।

অতএব অবশিষ্ট চক্ৰের উপর সমচতুর্ভুজ, অবশিষ্ট
ছগ্ৰের উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [স্বতঃ ৩ ।

এজন্য কচ সরল রেখা, গচ্ছ সরল রেখার সমান ;

আর কথ, কচের এবং গঘ, গচ্ছের দ্বিগুণ প্রতিপন্ন
হইয়াছে ;

সুতরাং কথ, গঘের সমান । [স্বতঃ ৬ ।

অতএব বৃত্তস্থ সমান ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১৬ । এক নির্দিষ্ট রেখার সমান্তর ও কোন
বৃত্তস্থ একটি জ্যার সমান, আর একটি জ্যা ঐ বৃত্তে অঙ্কিত
করিতে হইবে ।

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন বৃত্তের অন্তরস্থ যাবতীয় সরল রেখার
মধ্যে ব্যাস বৃহত্তম ও অন্যান্য গুলির মধ্যে যেটী
কেন্দ্রের নিকটবর্তী সেইটী দূরবর্তী রেখা অপেক্ষা
বৃহত্তর ; আর বৃহত্তর রেখা ক্ষুদ্রতর অপেক্ষা কেন্দ্রের
নিকটবর্তী ।

কহ যেন কথগঘ বৃত্তের ব্যাস ও ঐ ইহার কেন্দ্র ;
আর খগ, চচ্ছ অপেক্ষা যেন কেন্দ্রের নিকটবর্তী সরল
রেখা ; কহ রেখা, ব্যাস নহে এরূপ খগ সরল রেখা
অপেক্ষা বৃহত্তর এবং খগ, চচ্ছ অপেক্ষা বৃহত্তর
হইবে ।

অর্থাৎ পূর্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত করিলে, ওজ রেখা, ওট অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ।

খগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, খজ রেখা, চট অপেক্ষা বৃহত্তর ;

আর খজ ও জঙের উপর দুই সমচতুর্ভুজ, চট ও টঙের উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান ;

এবং ইহাদের মধ্যে খজএর উপর সমচতুর্ভুজ, চটএর উপর সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

কেননা, খজ রেখা, চট অপেক্ষা বৃহত্তর ;

এই হেতু জঙের উপর সমচতুর্ভুজ, টঙের উপর সমচতুর্ভুজ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

অর্থাৎ ওজ সরল রেখা ওট সরল রেখা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

সুতরাং খগ রেখা, চছ অপেক্ষা কেন্দ্রের নিকটবর্তী ;

অতএব বৃত্তের অন্তরস্থ ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ;

অঃ প্রঃ—১৭ । বৃত্তের অন্তরস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া ক্ষুদ্রতম জ্যা টানিতে হইবে ।

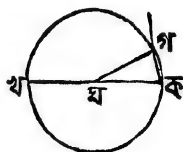
১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন বৃত্তের ব্যাসের এক প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ করিয়া একটী সরল রেখা টানিলে, তাহা বৃত্তের বাহিরে পড়িবে ; আর ঐ রেখার ও

পরিধির মধ্যে বৃত্তকে ছেদ না করে এমন কোন সরল রেখা ব্যাসের প্রান্ত হইতে টানা যাইতে পারে না ।

কথগ বৃত্তের ঘ যেন কেন্দ্র এবং কথ একটি ব্যাস ; ক প্রান্ত হইতে কথএর সহিত সম কোণ করিয়া একটি সরল রেখা টানিলে, তাহা বৃত্তের বাহিরে পড়িবে ।

যদি তাহা বাহিরে না পড়ে,
তবে যেন ভিতরে কগএর ন্যায়
পড়িল ; য হইতে পরিধির
ও কগএর ছেদ বিন্দু গ পর্য্যন্ত
ঘগ রেখা টান ।



পরে ঘক, ঘগএর সমান বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।

ঘকগ কোণ, ঘগক কোণের সমান । [১ম, ৫ ।

ইহাদের মধ্যে ঘকগ সম কোণ ; [কল্পনা ।

এই হেতু ঘগক কোণও সম কোণ ;

অতএব ঘকগ ও ঘগক কোণ, একত্র যোগে দুই সম কোণের
সমান ; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব । [১ম, ১৭ ।

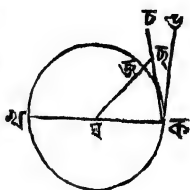
অতএব ক হইতে কথএর সহিত সম কোণ করিয়া সরল
রেখা টানিলে, তাহা বৃত্তের ভিতরে পড়িতে পারে না ।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, ইহা পরিধির উপর
পড়িয়া তাহার সহিত মিলিয়া যাইতেও পারে না ;
সুতরাং ইহা অবশ্যই বৃত্তের বাহিরে কণ্ডের ন্যায়
পড়িবে ।

আবার কণ্ড ও পরিধির মধ্যে বৃত্তকে ছেদ না করে

এমন কোন সরল রেখা ক বিন্দু হইতে টানা যাইতে পারে না।

যদি সম্ভব হয়, তবে উহাদের
মধ্যে যেন কচ রেখা অবস্থিত
হইল ;



য কেন্দ্র হইতে কচ এর উপর
ঘট লম্ব টান ;

ঘটু যেন পরিপিকে জ বিন্দুতে ছেদ করিল ।

পরে, ঘড়ক, সম কোণ হওয়াতে, [অঙ্কন।

যকছু কোণ সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; [১ম, ১৭।

এই হেতু যক বাহু, যাছু অপেক্ষা বহুত্র । [১ম, ১২।

ইহাদের মধ্যে যক, যজ্ঞের সমান ; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

অতএব যজ্ঞ রেখা যছ অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তর অপেক্ষা বড় ; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব । সুতরাং কণ্ড ও পরিধির মধ্যে বৃত্তকে ছেদ না করে এমন কোন সরল রেখা ক বিন্দু হইতে টানা যাইতে পারে না । অতএব কোন বস্তুর ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অনুমান। ইহা দ্বারা স্পষ্টই বোধ হইবে যে, কোন
বৃত্তের ব্যাসের সহিত সম কোণ করিয়া তাহার এক প্রান্ত
হইতে একটি সরল রেখা টানিলে, তাহা বৃত্তকে স্পর্শ
করিবে ;

এবং ইহা বৃত্তকে কেবল এক বিন্দুতে স্পর্শ করিবে ; কেননা
বৃত্তের সহিত দুই বিন্দুতে সংলগ্ন হইলে, ইহা বৃত্তের
অন্তরে পড়িবে ; [ওয়. ২।

আর ইহাও বোধ হইবে যে, কেবল একটি সরল রেখা কোন বৃত্তকে একই বিন্দুতে স্পর্শ করিতে পারে ।

অঃ প্রঃ—১৮। কোন বৃত্তের বর্জিত ব্যাসে এরূপ এক বিন্দু স্থির কর, যেন তথা হইতে একটি স্পর্শিনী টানিলে তাহা ব্যাসের সমান হয় ।

১৭ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে, এরূপ এক সরল রেখা পরিধির বহিস্থ বা পরিধিস্থ এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে টানিতে হইবে ।

প্রথমত, নির্দিষ্ট ক বিন্দু যেন নির্দিষ্ট খগঘ বৃত্তের বাহিরে আছে; ক বিন্দু হইতে নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে, এরূপ এক সরল রেখা টানিতে হইবে ।

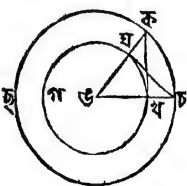
ঙ বিন্দুকেই বৃত্তের কেন্দ্র কল্পনা করিয়া, [৩য়, ১।

কঙ সংযুক্ত কর; কঙ যেন নির্দিষ্ট বৃত্ত পরিধিকে ঘ বিন্দুতে ছেদ করিল; ঙ কেন্দ্র হইতে ঙকএর প্রান্ত দিয়া কচছ বৃত্ত অঙ্কিত কর;

ঘ বিন্দু হইতে ঙকএর সহিত সম কোণ করিয়া ঘচ সরল রেখা টান;

এবং ঙচ সংযুক্ত কর; ঙচ যেন নির্দিষ্ট বৃত্তের পরিধিকে খ বিন্দুতে ছেদ করিল। কখ সংযুক্ত কর; কখ সরল রেখা খগঘ বৃত্তকে স্পর্শ করিবে ।

এক্ষণে, ঙ বিন্দু কচছ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে, ঙক রেখা, ঙচএর সমাংশ ।



[১ম, ১১।

[১ম, সংজ্ঞা ১৫।

আবার ঙ্গ বিন্দু ঋগঘ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে ঙ্গুথ রেখা,
ঙ্গুঘএর সমান । [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।

অতএব কঙ ও ঙ্গুথ দুই বাহু ক্রমে চঙ ও ঙ্গুঘ দুই বাহুর
সমান ;

এবং ঙ্গ বিন্দুস্থ কোণ, কঙুথ ও চঙঘ দুই ত্রিভুজের সাধা-
রণ কোণ ;

এই হেতু কঙুথ ত্রিভুজ চঙঘ ত্রিভুজের সমান এবং সমান
সমান বাহুর সম্মুখীন অন্যান্য কোণ গুলি যথাক্রমে
সমান ; [১ম, ৪ ।

অতএব ঙ্গুথক কোণ, ঙ্গুঘচ কোণের সমান ।

ইহাদের মধ্যে ঙ্গুঘচ, এক সম কোণ ; [অঙ্কন ।

সুতরাং ঙ্গুথক কোণও এক সম কোণ, [স্মৃতঃ ১ ।

এবং ঙ্গুথ সরল রেখা কেন্দ্র হইতে টানা হইয়াছে ;

আবার ব্যাসের প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ
করিয়া একটী সরল রেখা টানিলে তাহা বৃত্তকে স্পর্শ
করে বলিয়া, [৩য়, ১ অনু ।

কথ নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে ;

এবং ইহা নির্দিষ্ট ক বিন্দু হইতে টানা হইল ।

দ্বিতীয়ত, যদি নির্দিষ্ট বিন্দু, য বিন্দুর ন্যায় নির্দিষ্ট
বৃত্ত পরিধিস্থ হয়, তবে যঙ সংযুক্ত কর এবং যঙর
সহিত সম কোণ করিয়া ঘচ সরল রেখা টান ; ঘচ বৃত্তকে
স্পর্শ করিবে । [৩য়, ১৬ অনু ।

এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

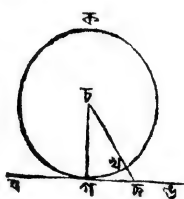
অঃ প্রঃ—১১। দুই নির্দিষ্ট বৃত্তের একটি সাধারণ স্পর্শিনী টানিতে হইবে ।

১৮ প্রতিজ্ঞা — উপপাদ্য ।

যদি এক সরল রেখা কোন বৃত্তকে স্পর্শ করে, তবে কেন্দ্র হইতে সংযোগ বিন্দু পর্যন্ত আর একটী রেখা টানিলে, সেইটী যে রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে, তাহার লম্ব হইবে ।

যদি সরল রেখা যেন কথগ বৃত্তকে গ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে ; কথগ বৃত্তের চ কেন্দ্র কল্পনা কর এবং চগ সরল রেখা টান ; চগ, যড়ির লম্ব হইবে ।

যদি না হয়, তবে চ বিন্দু হইতে যড়ির উপর চছ লম্ব টান ; চছ যেন পরিধিকে খ বিন্দুতে ছেদ করিল ।



পরে, চছগ কোণ সম

কোণ বলিয়া, [কল্পনা ।

চগছ, সূক্ষ্ম কোণ ; [১ম, ১৭ ।

এবং ত্রিভুজের বৃহত্তর কোণের সম্মুখীন বাহু বৃহত্তর হয় বলিয়া, [১ম, ১৯ ।

চগ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

ইহাদের মধ্যে চগ, চখএর সমান ; [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।

অতএব চখ, চছ অপেক্ষা বৃহত্তর, অর্থাৎ, বৃহত্তর ক্ষুদ্রতর

অপেক্ষা বড় ; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

এই হেতু চছ, ঘঙুর লম্ব হইতে পারে না ।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, চগ বাতীত অন্য কোন রেখা ঘঙুর লম্ব হইতে পারে না ;

সুতরাং চখ, ঘঙুর লম্ব ।

অতএব যদি এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

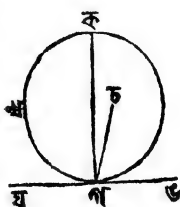
অঃ প্রঃ—২০। কোন বৃত্তের কেন্দ্র ম ; ব্যাসে বা বর্জিত ব্যাসে অবস্থিত একটি বিন্দু ক ; এবং মখ ব্যাসার্দ্ধ মকএর লম্ব ; যদি কখ, পরিম্বিকে ত বিন্দুতে ছেদ করে এবং ত বিন্দু হইতে স্পর্শিনী টানিলে তাহা মককে গ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কগ, গতএর সমান হইবে ।

১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যদি এক সরল রেখা কোন বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং যে রেখা স্পর্শ করিবে, যদি তাহার সহিত সম কোণ করিয়া সংযোগ বিন্দু হইতে আর একটী রেখা টানা যায়, তবে সেই রেখাতে বৃত্তের কেন্দ্র থাকিবে ।

ঘঙুর সরল রেখা যেন কখগ বৃত্তকে গ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে ;

গ বিন্দু হইতে ঘঙুর সহিত সম কোণ করিয়া গক সরল রেখা টান ;



গক রেখাতে নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র থাকিবে ।

যদি না থাকে, তবে চ যেন কেন্দ্র হইল; গচ সংযুক্ত কর ।

পরে, ঘঙ, কখগ বৃত্তকে স্পর্শ করাতে,
এবং কেন্দ্র হইতে সংযোগ বিন্দু পর্য্যন্ত চগ সরল রেখা
অঙ্কিত হওয়াতে, ইহা ঘঙর লম্ব হইবে; [৩য়, ১৮ ।
অতএব চগঙ কোণ সম কোণ;
আর কগঙ কোণও সম কোণ; [অঙ্কন ।
এই হেতু কগঙ কোণ, চগঙ কোণের সমান, [স্বতঃ ১১ ।
অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃত্তের সমান; কিন্তু একরূপ হওয়া
অসম্ভব ।

অতএব চ বিন্দু কখগ বৃত্তের কেন্দ্র হইতে পারে না ।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, গক রেখার বহিস্থ
কোন বিন্দুই কেন্দ্র হইতে পারে না;
সুতরাং গক রেখাতেই বৃত্তের কেন্দ্র থাকিবে ।
অতএব যদি এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২১ । কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের বহিস্থ এক বিন্দু
হইতে কোন নির্দিষ্ট জ্যার সমান আর একটা জ্যা টানিতে
হইবে ।

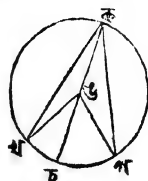
২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

একই ভূমির উপর, অর্থাৎ একই পরিধিস্থের
উপর, বৃত্তের কেন্দ্রস্থ কোণ পরিধিস্থ কোণের দ্বিগুণ
হইবে ।

কখগ বৃত্তের কেন্দ্রস্থ খঙগ কোণ ও পরিধিস্থ খকগ কোণ উভয়ে যেন একই ভূমির উপর অর্থাৎ একই খগ পরিধিখঙের উপর অবস্থিত হইয়াছে ; খঙগ কোণ খকগ কোণের দ্বিগুণ হইবে ।

কঙ সংযুক্ত করিয়া চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর ।

প্রথমত, বৃত্তের কেন্দ্র যেন খকগ কোণের মধ্যে পড়িল ।



এক্ষণে, ঔক, ঔখএর সমান বলিয়া,

ঔকখ কোণ, ঔখক কোণের সমান ;

[১ম, ৫ ।

অতএব ঔকখ ও ঔখক কোণ দ্বয়, একত্র যোগে ঔকখ কোণের দ্বিগুণ ;

আর খঙচ কোণ, ঔকখ ও ঔখক এই দুই কোণের সমান ;

[১ম, ৩২ ।

এই হেতু খঙচ কোণ, ঔকখ কোণের দ্বিগুণ ।

এই কারণে, চঙগ কোণও ঔকগ কোণের দ্বিগুণ ;

সুতরাং সমস্ত খঙগ কোণ, সমস্ত খকগ কোণের দ্বিগুণ ।

অনন্তর, বৃত্তের কেন্দ্র খকগ কোণের বাহিরে থাকিলে, প্রথম প্রকরণের ন্যায় সপ্রমাণ

হইবে যে, চঙগ কোণ চকগ কোণের দ্বিগুণ, এবং চঙগ কোণের এক অংশ চঙখ কোণ, চকগ কোণের এক অংশ চকখ কোণের দ্বিগুণ ;



সুতরাং অবশিষ্ট খণ্ডগ কোণ, অবশিষ্ট খকগ কোণের
দ্বিগুণ ।

অতএব একই ভূমির উপর, ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২২। কখ ও গঘ দুইটি জ্যা পরস্পরকে ও বিন্দুতে
বৃত্তের অন্তরে ছেদ করিয়াছে ; যদি বৃত্তের কেন্দ্র ম হয়, তবে
কমগ কোণ + খমঘ কোণ = ২ কঙগ কোণ ।

২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

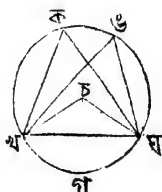
একই বৃত্তখণ্ডস্থ যাবতীয় কোণ পরস্পর সমান ।

কখগঘ বৃত্তের খকঘ ও খঙঘ দুই কোণ যেন একই
খকঙঘ বৃত্তখণ্ডস্থ হইয়াছে ; খকঘ ও খঙঘ কোণ
দ্বয় পরস্পর সমান হইবে ।

কখগঘ বৃত্তের চ কেন্দ্র
নির্ণয় কর ; [৩য়, ১।

প্রথমত, খকঙঘ বৃত্তখণ্ড যেন
অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর হইল ;

চখ ও চঘ সংযুক্ত কর ।



পরে, খচঘ কোণ কেন্দ্রস্থ ও খকঘ কোণ পরিধিস্থ
হওয়াতে,

এবং খগঘ পরিধিখণ্ড উভয়েরই ভূমি বলিয়া,

খচঘ কোণ, খকঘ কোণের দ্বিগুণ । [৩য়, ২০।

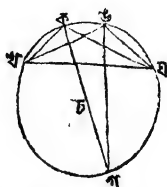
এই কারণে, খচঘ কোণ, খঙঘ কোণেরও দ্বিগুণ ;

সুতরাং খকঘ কোণ, খঙঘ কোণের সমান । [স্বতঃ ৭।

অনন্তর, খকঙঘ বৃত্তখণ্ড যেন, অর্ধ বৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর
মহে ।

কেন্দ্র পর্য্যন্ত কচ রেখা টান এবং ইহাকে গ পর্য্যন্ত
বৃদ্ধি করিয়া, গঙ সংযুক্ত কর ।

এক্ষণে, খকঙগ বৃত্তখণ্ড অর্ধ বৃত্ত
অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,
প্রথম প্রকরণ দ্বারা খকগ কোণ,
খঙগ কোণের সমান ;



এই কারণে গকঙঘ বৃত্তখণ্ড অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর
হওয়াতে,

কঘ কোণ গঙঘ কোণের সমান ;

সুতরাং সমস্ত খকঘ কোণ, সমস্ত খঙঘ কোণের সমান
হইবে । [স্বতঃ ২।

অতএব একই বৃত্তখণ্ডস্থ ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২৩। কোন বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের
শৃঙ্গ হইতে পরিধিস্থ কোন বিন্দু পর্য্যন্ত একটা রেখা টানিলে,
যদি তাহা ভূমিকে ছেদ করে, তবে রেখাটি ভূমির দুই প্রান্ত
হইতে পরিধিস্থ বিন্দু পর্য্যন্ত অঙ্কিত দুই রেখার সমষ্টির সমান
হইবে ; আর ভূমিকে ছেদ না করিলে, তাহাদের অন্তরের সমান
হইবে ।

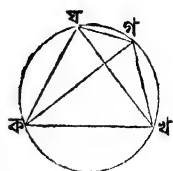
২২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

বৃত্তের অন্তর্গত চতুর্ভুজের সম্মুখীন কোণ দ্বয়
একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে ।

কথগঘ চতুর্ভুজ যেন কথগঘ বৃত্তের অন্তর্গত হই-
রাছে ; ইহার সম্মুখীন কোণ দুই কোণের সমষ্টি দুই সম
কোণের সমান হইবে ।

কগ ও থঘ সংযুক্ত কর ।

পরে, প্রত্যেক ত্রিভুজের তিন
কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের
সমান হয় বলিয়া, [১ম, ৩২ ।



গকথ ত্রিভুজের তিন কোণ, অর্থাৎ

গকথ, কথগ ও কগথ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ।

ইহাদের মধ্যে, গকথ কোণ, গঘথ কোণের সমান ; কেননা

তাহারা একই গঘকথ বৃত্তখণ্ডস্থ হইয়াছে ; [৩য়, ২১ ।

এবং কগথ কোণ, কঘথ কোণের সমান ; কেননা, ইহার

একই কঘগথ বৃত্তখণ্ডস্থ হইয়াছে ;

অতএব গকথ ও কগথ কোণ দ্বয়, একত্র যোগে, সমস্ত

কঘগ কোণের সমান ।

[স্বতঃ ২ ।

এই দুই সমান বস্তুতে কথগ কোণ যোগ করিলে,

গকথ, কথগ ও কগথ এই তিন কোণ একত্র যোগে, কথগ

ও কঘগ কোণের সমান ।

ইহাদের মধ্যে গকথ, কথগ ও কগথ এই তিন কোণ একত্র

যোগে, দুই সম কোণের সমান ;

[১ম, ৩২ ।

সুতরাং কথগ ও কঘগ এই দুই কোণও একত্র যোগে দুই

সম কোণের সমান ।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, থকঘ ও থগঘ কোণ দ্বয়

একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ।

দ্ব্যতএব বৃত্তের অন্তর্গত ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

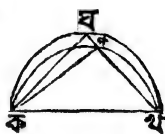
অঃ প্রঃ—২৫। যদি কোন চতুর্ভুজের সম্মুখীন কোণ হয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয়, তবে প্রতিপন্ন কর যে, সেই চতুর্ভুজের উপর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায় । এই রূপ অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্র ও ব্যাসার্ধ স্থির কর ।

২৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

একই সরল রেখার উপর এক দিকে দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড পরস্পরোক্তভাবে মিলিত না হইয়া থাকিতে পারে না ।

যদি সম্ভব হয়, তবে কগখ ও কঘখ দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড পরস্পরোক্তভাবে মিলিত না হইয়া, যেন কখ সরল রেখার উপর এক দিকে অবস্থিত হইল ।

এক্ষণে, কগখ বৃত্তকঘখ বৃত্তকে ক ও খ এই দুই বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে বলিয়া, ইহারা অন্য কোন বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিতে পারে না ; [৩য়, ১০ ।



বৃত্তরাং একটি বৃত্তখণ্ড অবশ্যই অন্যটির অন্তরস্থ হইবে ; গিগখ যেন কঘখএর অন্তরস্থ হইল ; খগঘ সরল রেখা গান এবং কগ ও কঘ সংযুক্ত কর ।

পরে, কগখ ও কঘখ দুইটি সদৃশ বৃত্তখণ্ড কল্পিত হওয়াতে এবং সদৃশ বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ গুলি পরস্পর সমান হয় বলিয়া, [৩য়, সংজ্ঞা ১১ ।

গিগখ কোণ কঘখ কোণের সমান ;

অর্থাৎ কর্ণঘ ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ অন্তরস্থ দূরবর্তী কোণের সমান ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

[১ম, ১৬ ।

সুতরাং দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড সর্বতোভাবে মিলিত না হইয়া একই সরল রেখার উপর এক দিকে থাকিতে পারে না ।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২৫। সমান ভূমি বিশিষ্ট দুইটি সদৃশ বৃত্তখণ্ড একই সরল রেখার দুই দিকে স্থাপিত হইয়াছে ; একটি বৃত্তসকে পরিধি দ্বয় দ্বারা পরিবন্ধ ক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

২৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সমান সমান সরল রেখার উপর স্থাপিত সদৃশ বৃত্তখণ্ড গুলি পরস্পর সমান ।

কণ্ঠ ও গচয যেন দুই সদৃশ বৃত্তখণ্ড সমান সমান কণ্ঠ ও গচয রেখা দ্বয়ের উপর স্থাপিত হইরাছে ; কণ্ঠ বৃত্তখণ্ড গচয বৃত্তখণ্ডের সমান হইবে ।

যদি কণ্ঠ বৃত্তখণ্ড গচয বৃত্তখণ্ডের উপর এরূপে স্থাপন



করা যায় যে, ক বিন্দু গ বিন্দুর উপর এবং কণ্ঠ সরল রেখা গচযের উপর পড়ে, তবে খ বিন্দু ঘ বিন্দুর উপর পড়িবে ; কেননা, কণ্ঠ রেখা, গচযের সমান । [কম্পমা ।

অতএব, কণ্ঠ রেখা গচযের সহিত মিলিলে কণ্ঠ বৃত্তখণ্ড

অবশ্যই গচয রক্তখণ্ডের সহিত মিলিয়া যাইবে; [এয়, ২৩।

সুতরাং কণ্ঠ, গচযএর সমান হইবে।

অতএব সমান সমান সরল রেখার ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—২৬। যে সকল বৃত্তক্ষেত্রের ব্যাসার্ধ ও কেন্দ্র হ কোণ সমান, তাহারা পরস্পর সমান।

২৫ প্রতিজ্ঞা - সম্পাদ্য।

কোন বৃত্তখণ্ড নির্দিষ্ট আছে; ইহা যে বৃত্তের খণ্ড, তাহা অঙ্কিত করিতে হইবে।

কথগ যেন নির্দিষ্ট বৃত্তখণ্ড; ইহা যে বৃত্তের খণ্ড তাহা অঙ্কিত করিতে হইবে।

কগকে য বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর; [১ম, ১০।

য বিন্দু হইতে কগএর সহিত সম কোণ করিয়া যখ রেখা টান; [১ম, ১১।

এবং কথ সংযুক্ত কর।

প্রথমত, কথয ও থকয কোণ দ্বয় যেন পরস্পর সমান;

তাহা হইলে যখ, যকএর সমান হইবে; [১ম, ৬।

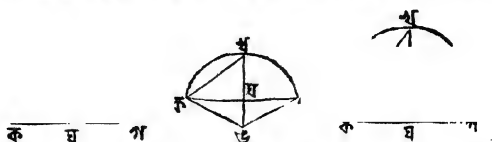
ইহাদের মধ্যে যক, যগএর সমান; [অঙ্কন।

এই হেতু যগ, যখএর সমান। [স্বতঃ ১।

সুতরাং যক, যখ ও যগ এই তিন রেখা পরস্পর সমান;

অতএব য বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইবে। [এয়, ৯।

য কেন্দ্র হইতে যক, যখ ও যগ এই তিন রেখার



কোন একটীর প্রান্ত দিয়া রূত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহা অন্য দুইটীর প্রান্ত দিয়া যাইবে; তাহা হইলে, কখগ যে রূত্তের খণ্ড, সেই রূত্তটি অঙ্কিত হইবে।

আবার য কেন্দ্র কগ রেখাতে অবস্থিত হইয়াছে বলিয়া কখগ অঙ্কিত ।

অনন্তর, কখয ও খকয যেন পরস্পর অসমান ; তাহা হইলে কখ রেখার ক বিন্দুতে কখয কোণের সমান খকঙ কোণ কর ; [১ম, ২৩।

প্রয়োজন হইলে, খযকে ঙ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া, কঙর সহিত মিলাইয়া দাও এবং ঙগ সংযুক্ত কর ।

পরে, খকঙ কোণ কখঙ কোণের সমান বলিয়া, [অঙ্কন । ঙক, ঙখএর সমান । [১ম, ৬।

আবার কয, গযএর সমান হওয়াতে, এবং কযঙ ও গযঙ ত্রিভুজ দ্বয়ের যঙ সাধারণ বাহু বলিয়া,

কয ও যঙ দুই বাহু, ক্রমে গয ও যঙ দুই বাহুর সমান ; আর কযঙ কোণ, গযঙ কোণের সমান ; কেননা, প্রত্যেকই সম কোণ ; [অঙ্কন ।

এই হেতু ঙক ভূমি, ঙগ ভূমির সমান । [১ম, ৪ ।

ইহাদের মধ্যে ঙক, ঙখএর সমান সপ্রমাণ হইয়াছে ;

এই হেতু ঙ্গ, ঙ্খ এর সমান । [স্বতঃ ১ ।

সুতরাং ঙ্গ, ঙ্খ ও ঙ্গ এই তিন সরল রেখা পরস্পর সমান ;

অতএব ঙ্গ বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইবে । [৩য়, ৯ ।

ঙকে কেন্দ্র করিয়া ঙ্গ, ঙ্খ ও ঙ্গ এই তিন রেখার কোন একটির প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহা অন্য দুইটিরও প্রান্ত দিয়া যাইবে ; তাহা হইলে কথং যে বৃত্তের খণ্ড, সেই বৃত্তটি অঙ্কিত হইবে ।

আর স্পষ্টই বোধ হইতেছে যে, কথং কোণ, খকং কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, ঙ্গ কেন্দ্র কথং বৃত্তখণ্ডের বাহিরে থাকিবে ; অতএব নির্দিষ্ট বৃত্তখণ্ড অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ;

কিন্তু কথং কোণ খকং কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, ঙ্গ কেন্দ্র কথং বৃত্তখণ্ডের ভিতরে থাকিবে ;

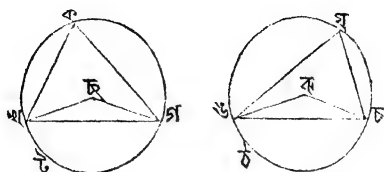
এই হেতু নির্দিষ্ট বৃত্তখণ্ড অর্দ্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে । অতএব নির্দিষ্ট বৃত্তখণ্ড যে বৃত্তের খণ্ড, তাহা অঙ্কিত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২৭ । কোন বৃত্তখণ্ডের ভূমির সমান আর একটা জ্যা ঐ বৃত্তখণ্ডে বা উহা যে বৃত্তের খণ্ড, তাহাতে অঙ্কিত করিতে হইবে ।

২৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সমান সমান বৃত্তের কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ সমান সমান কোণ, সমান সমান পরিধিখণ্ডের উপর থাকে ।

কখগ ও ঘঙচ যেন সমান সমান রত্ন ; খছগ ও
 ঙজচ কেন্দ্রস্থ সমান সমান কোণ আর খকগ ও ঙঘচ
 পরিধিস্থ সমান সমান কোণ ; খটগ পরিধিখণ্ড ঙটচ
 পরিধিখণ্ডের সমান হইবে ।



খগ ও ঙচ সংযুক্ত কর ।

পরে, কখগ ও ঘঙচ রত্ন দ্বয় সমান বলিয়া, [কম্পনা ।
 ইহাদের কেন্দ্র হইতে অঙ্কিত সরল রেখা গুলি পরস্পর
 সমান ।

[৩য়, সংজ্ঞা ১ ।

এই হেতু খছ ও ছগ দুই বাহু, ক্রমে ঙজ ও জচ বাহুর
 সমান ;

এবং ছ কোণ, জ কোণের সমান ; [কম্পনা ।

অতএব খগ ভূমি, ঙচ ভূমির সমান । [১ম, ৪ ।

আবার ক কোণ ঘ কোণের সমান বলিয়া, [কম্পনা ।
 খকগ রত্নখণ্ড, ঙঘচ রত্নখণ্ডের সদৃশ ; [৩য়, সংজ্ঞা ১১ ।
 আর ইহারা সমান সমান খগ ও ঙচ রেখার উপর
 স্থাপিত হইয়াছে ;

এবং সমান সমান সরল রেখার উপর স্থাপিত সদৃশ
 রত্নখণ্ড গুলি পরস্পর সমান হইয়া থাকে, [৩য়, ২৪ ।

এই হেতু খকর্ণ রত্নখণ্ড, ঙ্ঘচ রত্নখণ্ডের সমান ;
আর সমস্ত কথর্ণ রত্ন, সমস্ত ঘঙচ রত্নের সমান ; [কং ।
অতএব অবশিষ্ট খটর্ণ রত্নখণ্ড, অবশিষ্ট ঙ্ঠচ রত্নখণ্ডের
সমান ; [স্বতঃ ৩ ।

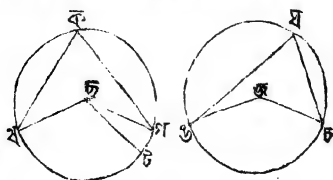
সুতরাং খটর্ণ পরিধিখণ্ড, ঙ্ঠচ পরিধিখণ্ডের সমান ।
অতএব সমান সমান ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২৮ । কোন বৃত্তের অন্তর্গত কথগঘ চতুর্ভুজের
যদি খ কোণ ঘ কোণের সমান হয়, তবে কগ কণ বৃত্তের
ব্যাস হইবে ।

২৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

• সমান সমান বৃত্তের কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ কোণ সমান
সমান পরিধিখণ্ডের উপর থাকিলে, পরস্পর সমান
হইবে ।

কথর্ণ ও ঘঙচ যেন সমান সমান রত্ন ; খছর্ণ ও ঙ্জচ
ইহাদের কেন্দ্রস্থ কোণ এবং খকর্ণ ও ঙ্ঘচ পরিধিস্থ
কোণ যেন সমান সমান খর্ণ ও ঙ্চ পরিধিখণ্ডের উপর
অবস্থিত হইয়াছে ; খছর্ণ কোণ ঙ্জচ কোণের এবং
খকর্ণ কোণ ঙ্ঘচ কোণের সমান হইবে ।



যদি খছর্ণ কোণ ঙ্জচ কোণের সমান হয়, তবে

সহজেই বোধ হইবে যে, খক্গ কোণও ঔজ্জ কোণের সমান । [৩য়, ২০ ; স্বতঃ ৭ ।

যদি সমান না হয়, তবে একটী অন্যের অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে । খছ্গ যেন বৃহত্তর হইল ; খছ্ রেখার ছ বিন্দুতে ঔজ্জ কোণের সমান খছ্টি কোণ কর । [১ম, ২৩ ।

পরে খছ্টি কোণ, ঔজ্জ কোণের সমান হওয়াতে, এবং সমান সমান রূত্তে সমান সমান কেন্দ্রস্থ কোণ, সমান সমান পরিধিখণ্ডের উপর থাকে বলিয়া, [৩য়, ২৬ । খটি পরিধিখণ্ড, ঔচ পরিধি খণ্ডের সমান ;

আর ঔচ পরিধিখণ্ড, খ্গ পরিধিখণ্ডের সমান ; [কং । অতএব খটি পরিধিখণ্ড, খ্গ পরিধিখণ্ডের সমান ;

[স্বতঃ ১ ।

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর বৃহত্তরের সমান ; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ;

সুতরাং খছ্গ কোণ, ঔজ্জ কোণের অসমান নহে, অর্থাৎ ইহার সমান ।

আবার ক কোণ, খছ্গ কোণের অর্ধ এবং ঘ কোণ ঔজ্জ কোণের অর্ধ ; [৩য়, ২০ ।

সুতরাং ক কোণ, ঘ কোণের সমান । [স্বতঃ ৭ ।

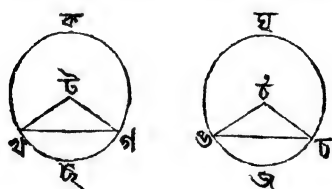
অতএব সমান সমান রূত্তের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২৯ । যে দুই জ্যার মধ্যস্থিত দুইটি চাপ পরস্পর সমান, তাহারা সমান্তর এবং সমান্তর দুই জ্যার মধ্যস্থিত দুই চাপ পরস্পর সমান ।

২৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সমান সমান বৃত্তের অভ্যন্তরীণ সমান সমান সরল রেখা সমান সমান পরিধিখণ্ড ছেদ করে, তাহাতে বৃহত্তর পরিধিখণ্ড বৃহত্তরের ও ক্ষুদ্রতর ক্ষুদ্রতরের সমান হয় ।

কথগ ও ঘঙচ যেন সমান সমান বৃত্ত এবং খগ ও ঙ্গচ ঐ দুই বৃত্তস্থ দুই সমান সরল রেখা, যেন খকগ ও ঙ্গচ দুই বৃহত্তর পরিধিখণ্ডকে আর খছগ ও ঙ্গজচ দুই ক্ষুদ্রতর পরিধিখণ্ডকে ছেদ করিয়াছে ; খকগ বৃহত্তর পরিধিখণ্ড, ঙ্গচ বৃহত্তর পরিধিখণ্ডের এবং খছগ ক্ষুদ্রতর পরিধিখণ্ড, ঙ্গজচ ক্ষুদ্রতর পরিধিখণ্ডের সমান হইবে ।



বৃত্ত দুইটির ট ও ঠ কেন্দ্র নির্ণয় করিয়া, [৩য়, ১।
খট, টগ, ঙ্গঠ ও ঠচ সংযুক্ত কর ।

পরে, বৃত্ত দুইটি সমান হওয়াতে, [কল্পনা ।
ইহাদের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা
গুলি পরস্পর সমান ; [৩য়, সংজ্ঞা ১।
অতএব খট ও টগ দুই বাহু ক্রমে ঙ্গঠ ও ঠচ দুই বাহুর
সমান ;

এবং খগ ভূমি ঙ্চ ভূমির সমান ; [কল্পনা ।

অতএব খটগ কোণ ঙ্চ কোণের সমান ; [১ম, ৮ ।

আর সমান সমান বৃত্তের সমান সমান কেন্দ্রস্থ কোণ, সমান সমান পরিধিখণ্ডের উপর থাকে বলিয়া, [৩য়, ২৬ ।

খছগ পরিধিখণ্ড, ঙ্জচ পরিধিখণ্ডের সমান ।

আবার সমস্ত কখগ পরিধি, সমস্ত ঘঙচ পরিধির সমান হওয়াতে, [কল্পনা ।

অবশিষ্ট খকগ পরিধিখণ্ড অবশিষ্ট ঙ্ঘচ পরিধিখণ্ডের সমান । [স্বতঃ ৩ ।

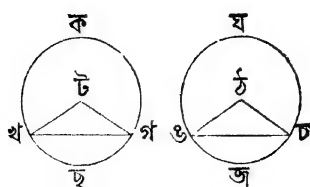
অতএব সমান সমান বৃত্তের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩০। কোন বৃত্তস্থ কখ ও ঘগ দুই সমান জ্যা কে বর্জিত করিলে যদি তাহারা বহিস্থ ও বিন্দুতে সংলগ্ন হয়, তবে ঙখগ ও ঙকঘ এই দুইটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ হইবে ।

২৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সমান সমান বৃত্তের সমান সমান পরিধিখণ্ডের সম্মুখীন সরল রেখাগুলি পরস্পর সমান হইবে ।

কখগ ও ঘঙচ যেন সমান সমান বৃত্ত এবং খছগ ও ঙ্জচ সমান সমান পরিধিখণ্ড ; খগ ও ঙ্চ সংযুক্ত কর ; খগ সরল রেখা ঙ্চ সরল রেখার সমান হইবে ।



এই দুই বৃত্তের ট ও ঠ কেন্দ্র নির্ণয় করিয়া [৩য়, ১।
খট, টগ, ঙঠ ও ঠচ সংযুক্ত কর ।

পরে, খঙগ পরিধিখণ্ড, ঙজচ পরিধিখণ্ডের সমান
বলিয়া, [কল্পনা।

খটগ কোণ, ঙঠচ কোণের সমান । [৩য়, ২৭।

আবার কখগ বৃত্ত, ঘঙচ বৃত্তের সমান বলিয়া, [কল্পনা।

ইহাদের কেন্দ্র হইতে পরিধি পর্য্যন্ত অঙ্কিত সরল রেখা
গুলি সমান ; [৩য়, সংজ্ঞা ১।

অর্থাৎ খট ও টগ বাহু দ্বয় ক্রমে ঙঠ ও ঠচ বাহু দ্বয়ের
সমান ;

এবং ইহাদের অন্তর্গত কোণ দ্বয়ও সমান ;

সুতরাং খগ ভূমি ঙচ ভূমির সমান । [১ম, ৪।

অতএব সমান সমান বৃত্তের ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩১। কখগ ও কখঘ দুই সমান বৃত্ত পরস্পরকে
কু ও খ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; খ কেন্দ্র বিশিষ্ট আর একটি
বৃত্ত যদি উহাদিগকে গ ও ঘ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে ক, ঘ ও
গ বিন্দু ত্রয় একই সরল রেখাতে থাকিবে ।

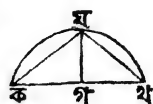
৩০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট পরিধিখণ্ডকে দ্বিখণ্ড, অর্থাৎ দুই সমান অংশে বিভক্ত, করিতে হইবে ।

কথ যেন নির্দিষ্ট পরিধিখণ্ড; ইহাকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে ।

কথ সংযুক্ত করিয়া, গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর ;

[১ম, ১০ ।



গ বিন্দু হইতে কথএর সহিত সম

কোণ করিয়া গয সরল রেখা টান ;

[১ম, ১১।

কথখ পরিধিখণ্ড য বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইবে ।

কথ ও যথ সংযুক্ত কর ।

পরে, কগ রেখা গথএর সমান বলিয়া,

[অঙ্কন ।

এবং কগয ও থগয ত্রিভুজ দ্বয়ের গয সাধারণ বাহু হওয়াতে,

কগ ও গয দুই বাহু ক্রমে থগ ও গয দুই বাহুর সমান ;

এবং কগয কোণ, থগয কোণের সমান ; কেননা, প্রত্যেকই সম কোণ ;

[অঙ্কন ।

এই হেতু কথ ভূমি, থয ভূমির সমান ;

[১ম, ৪ ।

আবার সমান সমান সরল রেখা সমান সমান পরিধিখণ্ড ছেদ করে, তাহাতে বৃহত্তর পরিধিখণ্ড, বৃহত্তরের ও ক্ষুদ্রতর ক্ষুদ্রতরের সমান হয় ;

[৩য়, ২৮ ।

এবং কথ ও যথ এই দুই পরিধিখণ্ডের প্রত্যেকে অর্ধবৃত্ত

অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর; কেননা, যগকে বর্দ্ধিত করিলে ইহা
বৃত্তের একটী ব্যাস হইবে; [৩য়, :অনু ।

সুতরাং কয পরিধিখণ্ড, যথ্য পরিধিখণ্ডের সমান ।

অতএব নির্দিষ্ট পরিধিখণ্ড য বিন্দুতে দুই সমান অংশে
বিভক্ত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩২ । একই ভূমির এক দিকে সমান সমান শীর্ষ
কোণ বিশিষ্ট কতিপয় ত্রিভুজ আঙ্কিত করিলে, শৃঙ্গস্থ কোণ
গুলির দ্বিখণ্ড কারক যাবতীয় রেখা, একই নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া
যাইবে ।

৩১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

বৃত্তের অন্তর্গত কোণ গুলির মধ্যে অর্ধবৃত্তস্থ কোণ
সমকোণ । অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা বৃহত্তর খণ্ডস্থ কোণ, সম
কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর এবং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর
খণ্ডস্থ কোণ, সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ।

কথংয বৃত্তের খণ্ড যেন একটী ব্যাস এবং ঐ বিন্দু
কেন্দ্র; গক সরল রেখা টানিয়া বৃত্তকে কথং ও কযগ
খণ্ডে বিভক্ত কর এবং থক, কয ও যগ সংযুক্ত করিয়া
দ্বাও; থকগ অর্ধবৃত্তস্থ কোণ সম কোণ; অর্ধবৃত্ত
অপেক্ষা বৃহত্তর কথং খণ্ডস্থ কোণ সম কোণ অপেক্ষা
ক্ষুদ্রতর এবং অর্ধবৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কযগ খণ্ডস্থ
কোণ সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

কঙ সংযুক্ত কর এবং খককে চ
পর্যাস্ত বর্দ্ধিত কর ।

পরে, ঙক রেখা ঙখএর সমান
বলিয়া, [১ম, সংজ্ঞা ১৫ ।

ঙকখ কোণ ঙখক কোণের সমান
হইবে ; [১ম, ৫ ।

এবং ঙক, ঙগএর সমান বলিয়া,

ঙকগ কোণ ঙগক কোণের সমান ;

অতএব সমস্ত খকগ কোণ কখগ ও কগখ এই দুই কোণের
সমষ্টির সমান ; [স্বতঃ ২ ।

আর কখগ ত্রিভুজের বহিস্থ চকগ কোণ কখগ ও কগখ
এই দুই কোণের সমষ্টির সমান ; [১ম, ৩২ ।

এই হেতু খকগ কোণ চকগ কোণের সমান, [স্বতঃ ১ ।

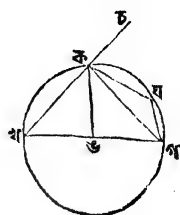
অতএব ইহাদের প্রত্যেকেই সম কোণ ; [১ম, সংজ্ঞা ১০ ।

সুতরাং খকগ অর্দ্ধরত্ন কোণ সম কোণ ।

আবার কখগ ত্রিভুজের কখগ ও খকগ এই দুই
কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর
বলিয়া, [১ম, ১৭ ।

এবং ইহাদের মধ্যে খকগ কোণ যে এক সম কোণ, তাহা
সপ্রমাণ হওয়াতে, কখগ কোণ সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।
সুতরাং অর্দ্ধরত্ন অপেক্ষা রহত্তর কখগ খণ্ডস্থ কোণ
সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

অনন্তর, কখগয চতুর্ভুজ একটি রত্নের অন্তর্গত হওয়াতে,
ইহার কোন দুইটি সম্মুখীন কোণ একত্র যোগে দুই সম



কোণের সমান ; [৩য়, ২২ ।

অতএব কথগ ও কঘগ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ;
ইহাদের মধ্যে কথগ কোণ সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর
প্রমাণ হইয়াছে ;

এই হেতু কঘগ কোণ সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
সুতরাং অর্ধ বৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর খণ্ডস্থ কোণ, সম কোণ
অপেক্ষা বৃহত্তর ।

অতএব বৃত্তের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অনুমান । এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তি হইতে সহজেই বোধ
হইবে যে, কোন ত্রিভুজের একটী কোণ অন্য দুই কোণের
সমান হইলে, সেইটী সম কোণ হইবে ; কেননা, তাহার
সন্নিহিত কোণও ঐ দুই কোণের সমান ; [১ম, ৩২ ।
এবং সন্নিহিত কোণ দ্বয় সমান হইলে, প্রত্যেকে সম কোণ
হইয়া থাকে । [১ম, সংজ্ঞা ১০ ।

অঃ প্রঃ—৩১। কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধকে ব্যাস স্বরূপ লইয়া
আর একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, প্রথম বৃত্তের যে সকল জ্যা
দুই বৃত্তের সংযোগ বিন্দু দিয়া যাইবে, তাহারা দ্বিতীয় বৃত্তের
পরিধি দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে ।

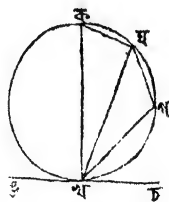
৩২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যদি এক সরল রেখা কোন বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং
সংযোগ বিন্দু হইতে আর একটী সরল রেখা টানিলে,
যদি তাহা বৃত্তকে ছেদ করে, তবে সেই রেখা, যে রেখা
বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে, তাহার সহিত যে যে কোণ

উৎপন্ন করিবে, তাহারা একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণগুলির সমান হইবে ।

ওচ সরল রেখা যেন কথগঘ বৃত্তকে থ বিন্দুতে স্পর্শ করিয়াছে এবং থ বিন্দু হইতে থঘ সরল রেখা এক্রূপে টানা হইয়াছে যে তাহা বৃত্তকে ছেদ করিতেছে ; ওচ স্পর্শক রেখার সহিত থঘ রেখা যে যে কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহারা একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণগুলির সমান হইবে ; অর্থাৎ ঘখচ কোণ, থকঘ বৃত্তখণ্ডস্থ কোণের এবং ঘখঙ কোণ, থগঘ বৃত্তখণ্ডস্থ কোণের সমান হইবে ।

থ বিন্দু হইতে ওচএর সহিত সম কোণ করিয়া থক রেখা টান, [১ম, ১১ । এবং থঘ পরিপিক্ষণে গ বিন্দু কল্পনা করিয়া, কঘ, ঘগ ও গথ সংযুক্ত কর ।



পরে, ওচ সরল রেখা কথগঘ বৃত্তকে থ বিন্দুতে স্পর্শ করাতে, [কল্পনা ।
 এবং থ বিন্দু হইতে, স্পর্শক রেখার সহিত সম কোণ করিয়া, থক রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন ।
 বৃত্তের কেন্দ্র থক রেখাতে থাকিবে । [৩য়, ১৯ ।
 সুতরাং অর্ধবৃত্তস্থ কঘথ কোণ, সম কোণ ; [৩য়, ৩১ ।
 এই হেতু থকঘ ও কথঘ অন্য দুইটি কোণ একত্র যোগে, এক সম কোণের সমান ; [১ম, ৩২ ।
 আর কথচ কোণও সম কোণ ; [অঙ্কন ।

অতএব কথচ কোণ, থকঘ ও কথঘ কোণ দ্বয়ের সমষ্টির সমান ।

এই দুই সমান বস্তু হইতে সাধারণ কথঘ কোণ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট যথচ কোণ, অবশিষ্ট থকঘ কোণের সমান । [স্বতঃ ৩ ।

এখানে থকঘ কোণই একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ ।

আবার, কথগঘ চতুর্ভুজ একটি বৃত্তের অন্তর্গত হওয়াতে, থকঘ ও থগঘ সম্মুখীন কোণ দ্বয় একত্র যোগে, দুই সম কোণের সমান ; [৩য়, ২২ ।

আর যথচ ও যথঙ এই দুই কোণও একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ১৩ ।

অতএব যথচ ও যথঙ কোণ দ্বয় একত্র যোগে, থকঘ ও থগঘ কোণ দ্বয়ের সমান ;

ইহাদের মধ্যে যথচ কোণ থকঘ কোণের সমান প্রমাণ হইয়াছে ;

সুতরাং অবশিষ্ট যথঙ কোণ, অবশিষ্ট থগঘ কোণের সমান । [স্বতঃ ৩ ।

এখানে থগঘ কোণই একান্তর বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ ।

অতএব যদি এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাত্ত ।

অঃ প্রঃ—১৪ । কথ ও কগ কোন বৃত্তের দুই সমান চাপ ; প্রমাণ কর যে, ক বিন্দু দিয়া বৃত্তের স্পর্শিনী টানিলে, তাহা থগ জ্যার সমান্তর হইবে ।

সরল রেখা টান :

[१५, ११ ।]

এবং ছথ সংযুক্ত কর ।

পরে, কচ, চখএর সমান বলিয়া,

ଅଙ୍କନ ।

এবং কচছ ও খচছ দুই ত্রিভুজের, চছ সাধারণ বাহু
হওয়াতে, কচ ও চছ দুই বাহু ক্রমে, খচ ও চছ দুই
বাহুর সমান ;

আর কচছ কোণ খচছ

কোণের সমান ; [১ম, সং ১০।

এই হেতু ছক ভূমি, ছখ

ଭୂମିର ମୟାନ ; [୧ମ, ୫ ।

•সুতরাং ছ কেন্দ্র হইতে

ছকএর প্রাপ্ত দিয়া রত্ত

অস্থিত করিলে, তাহা থা বিন্দু দিয়া যাইবে।

কজখ যেন এই রক্ত হইল ; কজখ রক্তখণ্ডের অন্তর্গত
কোণ, গা কোণের সমান হইবে ।

কণ্ড বাসের সহিত সম কোন করিয়া, ক প্রাপ্ত হইতে
কয সরল রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।

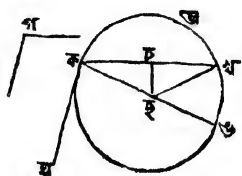
কর, এই বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে; [৩য়, ১৬ অনু।

আর সংযোগ বিন্দু ক হইতে কথ রেখা টানা হইয়াছে
বলিয়া, যকথ কোণ, একান্তর কজথ রূতথণের অন্তর্গত
কোণের সমান ; [৩য়. ৩২।

ইহাদের মধ্যে যকথ কোণ, গা কোণের সমান। [অঙ্কন।

স্বতরাং কজখ রত্নখণ্ডের অন্তর্গত কোণ, গএর সমান।

[স্বতঃ ১।



অতএব কথ নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর, নির্দিষ্ট গ কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট কজখ রত্নখণ্ড অঙ্কিত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

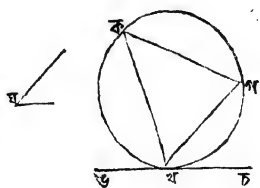
অঃ প্রঃ—৩৫ । কোন ত্রিভুজের ভূমি, শীর্ষ কোণ এবং শীর্ষ কোণ হইতে অঙ্কিত লম্ব ভূমিকে যে বিন্দুতে ছেদ করিবে, সেই বিন্দু নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর ।

৩৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট বৃত্ত হইতে এক নির্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এক খণ্ড ছেদ করিতে হইবে ।

কথগ যেন নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং ঘ নির্দিষ্ট সরল রৈখিক কোণ ; কথগ বৃত্ত হইতে, নির্দিষ্ট ঘ কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এক খণ্ড ছেদ করিতে হইবে ।

কথগ বৃত্তকে থ বিন্দুতে স্পর্শ করে এরূপ ঔখচ সরল রেখা টান ; [৩য়, ১৭ । এবং থচ সরল রেখার থ বিন্দুতে ঘ কোণের সমান চথগ কোণ কর ;



[১ম, ২৩ ।

খকগ বৃত্তখণ্ডস্থ কোণ, ঘ কোণের সমান হইবে ।

ঔচ সরল রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং সংযোগ বিন্দু হইতে থগ সরল রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া, [অং । চথগ কোণ, একান্তর খকগ বৃত্তখণ্ডের অন্তর্গত কোণের

সমান ; [৩য়, ৩২।

আর চখগ কোণ, য কোণের সমান। [অঙ্কন।

সুতরাং খকগ রত্নখণ্ডের অন্তর্গত কোণ, য কোণের সমান। [স্বতঃ ১।

অতএব কখগ রত্ন হইতে, য কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট খকগ রত্নখণ্ড ছেদিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৬। কোন বৃত্তের বহিস্থ এক বিন্দু হইতে এক সরল রেখা টানিয়া বৃত্তের একরূপ এক অংশ ছেদ করিতে হইবে যেন, তাহার অন্তর্গত কোণ এক নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

৩৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি কোন বৃত্তের অন্তরস্থ দুই সরল রেখা পরস্পরকে ছেদ করে, তবে একটীর দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়ত, অন্যটীর দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

কগ ও খঘ দুই সরল রেখা যেন কখগঘ বৃত্তের অন্তরে থাকিয়া ঐ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে ; কঙ ও ঙগএর অন্তর্গত আয়ত, খঙ ও ঙঘএর অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে।

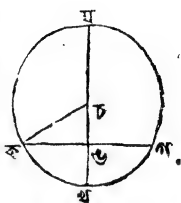
যদি কগ ও খঘ উভয়ই কেন্দ্র দিয়া যায়, অর্থাৎ ঐ বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তবে ঙক, ঙখ, ঙগ ও ঙঘ পরস্পর সমান হওয়াতে, স্পষ্টই বোধ হইবে যে,



কঙ ও ঙগএর অন্তর্গত আয়ত, [খঙ ও ঙঘএর অন্তর্গত আয়তের সমান ।

কিন্তু যদি দুই রেখার মধ্যে একটি, অর্থাৎ খঘ, কেন্দ্র দিয়া যায় এবং অন্যটি, অর্থাৎ কগ, কেন্দ্র দিয়া না যায় আর যদি খঘ, কগকে ঙ বিন্দুতে লম্ব ভাবে ছেদ করে, তবে খঘকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করিলে, চ বিন্দু কখগঘ বৃত্তের কেন্দ্র হইবে ; কচ সংযুক্ত কর ।

পরে, কেন্দ্রগত খঘ সরল রেখা কেন্দ্রের বহির্গত কগ রেখাকে লম্ব ভাবে ছেদ করিয়াছে বলিয়া, [কম্পনা ।
কঙ, ঙগএর সমান । [৩য়, ৩ ।



আবার খঘ সরল রেখা চ বিন্দুতে দুই সমান এবং ঙ বিন্দুতে দুই অসমান ভাগে বিভক্ত হইয়াছে বলিয়া,

খঙ, ঙঘএর আয়ত ও ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, চখএর উপর সম চতুর্ভুজের সমান, [২য়, ৫ ।

অর্থাৎ কচএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

আর কচএর উপর সমচতুর্ভুজ, কঙ ও ঙচএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান । [১ম, ৪৭ ।

এই হেতু খঙ, ঙঘএর আয়ত ও ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কঙ ও ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান । [স্বতঃ ১ ।

এই দুই সমান বস্তু হইতে ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট খঙ, ঙঘএর আয়ত, কঙর উপর সমচতুর্ভুজের, অর্থাৎ কঙ, ঙগএর আয়তের সমান হইবে ।

অনন্তর, যদি কেন্দ্রগত খঘ রেখা কেন্দ্রের বহির্গত কর্ণ রেখাকে ছেদ করিয়া সম কোণ উৎপন্ন না করে, তবে খঘকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড করিলে, চ বিন্দু কর্ণখঘ রত্তের কেন্দ্র হইবে ;

কচ সংযুক্ত কর এবং কর্ণএর উপর চ হইতে চছ লম্ব টান ।

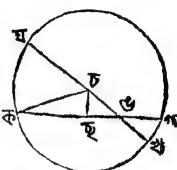
[১ম, ১২ ।

এক্ষণে, কছ, ছগএর সমান ; [৩য়, ৩ ।

অতএব কঙ, ঙগএর আয়ত ও ঙছএর

উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, কছএর ক

উপর সমচতুর্ভুজের সমান । [২য়, ৫ ।



প্রত্যেকে, ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে,

কঙ, ঙগএর আয়ত এবং ঙছ ও ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ

দ্বয় একত্র যোগে, কছ ও ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের

সমান ;

ইহাদের মধ্যে, ঙছ ও ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, ঙচএর

উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

এবং কছ ও ছচএর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়, কচএর উপর

সমচতুর্ভুজের সমান ।

[১ম, ৪৭ ।

অতএব কঙ, ঙগএর আয়ত ও ঙচএর উপর সমচতুর্ভুজ

একত্র যোগে, কচএর উপর অর্থাৎ খচএর উপর সমচতু-

র্ভুজের সমান ।

আবার, খচএর উপর সমচতুর্ভুজ, খঙ ও ঙঘএর আয়ত

এবং \widehat{BC} এর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [২য়, ৫।

\widehat{BC} এর উপর সাধারণ সমচতুর্ভুজ, প্রত্যেক হইতে বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট \widehat{AC} ও \widehat{AB} এর আয়ত, অবশিষ্ট \widehat{AD} ও \widehat{AE} এর আয়তের সমান । [স্বতঃ ৩।

পরিশেষে, যদি BC ও AD উভয় সরল রেখাই কেন্দ্র গত না হয়, তবে C বিন্দুকে কেন্দ্র কল্পনা কর, [৩য়, ১।

এবং BC ও AD সরল রেখা দ্বয়ের

ছেদ বিন্দু দিয়া CH ও CH' বাস টান ।

তাহা হইলে, পূর্ব প্রকরণের ন্যায়

সপ্রমাণ হইবে যে, \widehat{CH} ও $\widehat{CH'}$ এর

আয়ত, \widehat{AC} ও \widehat{AB} এর আয়তের

সমান ;

আর \widehat{CH} ও $\widehat{CH'}$ এর আয়ত, \widehat{AD} ও \widehat{AE} এর আয়তের সমান ;

সুতরাং \widehat{AC} ও \widehat{AB} এর আয়ত, \widehat{AD} ও \widehat{AE} এর আয়তের

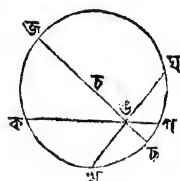
সমান । [স্বতঃ ১।

অতএব যদি কোন বৃত্তের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩৭। ঐককেন্দ্রিক দুইটি বৃত্তের মধ্যে বৃহত্তরটির যদি BC ও AD কোন দুই জ্যা টানা যায় ও ইহার। যদি ক্ষুদ্রতর বৃত্তকে D ও C বিন্দুতে ছেদ করে, তবে \widehat{BC} ও \widehat{AD} এর আয়ত, \widehat{DC} ও \widehat{CB} এর আয়তের সমান হইবে।

৩৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

বৃত্তের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে যদি দুইটি সরল রেখা টানা যায় ও তন্মধ্যে একটি বৃত্তকে ছেদ



ও অন্যটি তাহাকে স্পর্শ করে, তবে ছেদক রেখার সমস্তের ও বৃত্তের বহিস্থিত অংশের অন্তর্গত আয়ত, যে রেখাটি বৃত্তকে স্পর্শ করিয়াছে, তাহার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

কথগ বৃত্তের বহিস্থ য বিন্দু হইতে যেন যগক ও যখ, দুই সরল রেখা টানা হইয়াছে ও ইহাদের মধ্য যগক রেখা বৃত্তকে ছেদ ও যখ রেখা বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে ; কয, যগএর অন্তর্গত আয়ত, যখএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

প্রথমত, যগক রেখা যেন ও কেন্দ্র দিয়া যাইতেছে, ওখ সংযুক্ত কর ;

তাহা হইলে ওখয কোণ সম কোণ হইবে । [৩য়, ১৮ ।

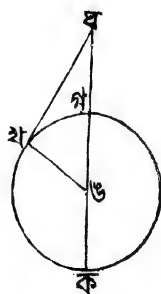
আবার, কগ রেখা ও বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়া য পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত হইয়াছে বলিয়া, কয ও

যগএর আয়ত এবং ওগএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ওযএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [২য়, ৬ ।

আর ওগ রেখা ওখএর সমান হওয়াতে,

কয, যগএর আয়ত ও ওখএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ওযএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

আবার, ওযএর উপর সমচতুর্ভুজ, ওখ ও যখএর



উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান । [১য়, ৪৭ ।

অতএব কখ, ঘগএর আয়ত ও ঙখএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঙখ ও খঘএর উপর দুই সমচতুর্ভুজের সমান :

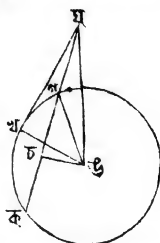
ঙখএর উপর সাপারণ সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট কখ, ঘগএর আয়ত, ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান । [স্বতঃ ৩ ।

অনন্তর, যদি ঘগক কেন্দ্র দিয়া না যায়, তবে ঙ বিন্দুকে কেন্দ্র কল্পনা কর, [৩য়, ১ ।

ঙ হইতে কগএর উপর ঙচ লম্ব টান ; [১য়, ১২ ।
এবং ঙখ, ঙগ ও ঙঘ সংযুক্ত কর ।

পরে, কেন্দ্রগত ঙচ রেখা, কেন্দ্রের বহির্গত কগ রেখাকে লম্ব ভাবে ছেদ করিতেছে বলিয়া, ঙচ রেখা, কগকে দ্বিখণ্ড করিবে ;

আর কগ সরল রেখা চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হইয়া ঘ পর্যাস্ত বর্দ্ধিত হওয়াতে, কঘ ও ঘগএর আয়ত এবং চগএর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, চঘএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান । [২য়, ৬ ।
প্রত্যেকে চঙর উপর সমচতুর্ভুজ যোগ করিলে,



কখ, ঘগএর আয়ত এবং চগ ও চঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে,

যচ ও চঙর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান । [স্বতঃ ২ ।

ইহাদের মধ্যে গচ ও চঙুর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, গঙুর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; কেননা, গচঙ, একটী সম কোণ ; [১ম, ৪৭।

এবং ঘচ ও চঙুর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয় একত্র যোগে, ঘঙুর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ।

অতএব কঘ, ঘগএর আয়ত ও গঙুর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঘঙুর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ;

আর গঙ, খঙুর সমান হওয়াতে,

কঘ, ঘগএর আয়ত ও খঙুর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঘঙুর উপর সমচতুর্ভুজের সমান ।

• আবার ঘঙুর উপর সমচতুর্ভুজ, ঘখ ও খঙুর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমষ্টির সমান । [১ম, ৪৭।

অতএব কঘ, ঘগএর আয়ত ও খঙুর উপর সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে, ঘখ ও খঙুর উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমষ্টির সমান ;

খঙুর উপর সাধারণ সমচতুর্ভুজ বিয়োগ করিলে,

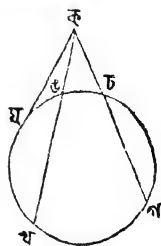
অবশিষ্ট কঘ, ঘগএর আয়ত, অবশিষ্ট ঘখএর উপর সমচতুর্ভুজের সমান হইবে । [স্বতঃ ৩।

অতএব কোন রূত্তের বহিঃস্থ ইত্যাদি ।

এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অনুমান । কোন রূত্তের বহিঃস্থ

এক বিন্দু হইতে কখ ও কগ দুইটী সরল রেখা টানিলে, যদি উভয়েই রূত্তকে ছেদ করে, তবে ইহাদের প্রত্যেকের



সমস্তের ও বৃত্তের বহিস্থ অংশের অন্তর্গত আয়ত দুইটি, পরস্পর সমান হইবে ;

অর্থাৎ, খক ও কঙর আয়ত, গক ও কচএর আয়তের সমান হইবে ;

কেননা, প্রত্যেক আয়ত বৃত্ত স্পর্শক কয় রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান ।

অঃ প্রঃ—৩৮। দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে, যদি তাহাদের সাধারণ জ্যাকে বর্দ্ধিত করা যায়, তবে তাহা সাধারণ স্পর্শিনীকে দ্বিখণ্ড করিবে ।

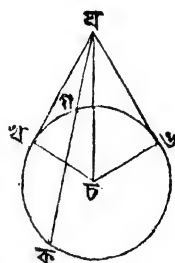
৩৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

বৃত্তের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে যদি দুইটি সরল রেখা টানা যায় ও তন্মধ্যে একটি বৃত্তকে ছেদ করে ও অন্যটি তাহার সহিত সংলগ্ন হয়, আর যদি ছেদক রেখার সমস্তের ও বহিস্থ অংশের অন্তর্গত আয়ত, সংলগ্ন রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয়, তবে সংলগ্ন রেখা, বৃত্তকে স্পর্শ করিবে ।

কথগ বৃত্তের বহিস্থ য বিন্দু হইতে যেন ঘগক ও ঘখ দুই সরল রেখা টানা হইয়াছে; ইহাদের মধ্যে ঘগক বৃত্তকে ছেদ করিয়াছে ও ঘখ বৃত্তের সহিত সংলগ্ন হইয়াছে; আর কয়, ঘগএর আয়ত যেন ঘখএর উপর

সমচতুর্ভুজের সমান ; তাহা হইলে যথ রেখা, রক্তকে স্পর্শ করিবে ।

কথগা রক্ত স্পর্শক ঘঙ সরল
রেখা টান ; [৩য়, ১৭।
চ কেন্দ্র নির্ণয় কর, [৩য়, ১।
এবং চখ, চঘ ও চঙ সংযুক্ত কর ;
তাহা হইলে চঙয, সম কোণ
হইবে ; [৩য়, ১৮।



আর ঘঙ রেখা কথগা রক্তকে স্পর্শ
করিতেছে ও যগক ইহাকে ছেদ করিতেছে বলিয়া,
কঘ ও যগাএর অন্তর্গত আয়ত, ঘঙের উপর সমচতুর্ভুজের
সমান । [৩য়, ৩৬।

আবার, কঘ ও যগাএর আয়ত, যথএর উপর সমচতুর্ভুজের
সমান । [কল্পনা।

অতএব ঘঙের উপর সমচতুর্ভুজ, যথএর উপর সমচতু-
র্ভুজের সমান ; [স্বতঃ ১।

সুতরাং ঘঙ সরল রেখা, যথএর সমান ;

এবং ঙচ, খচএর সমান ; [১ম, সংজ্ঞা ১৫।

এই হেতু ঘঙ ও ঙচ দুই বাহু ক্রমে, যথ ও খচ দুই
বাহুর সমান ;

আর ঘঙচ ও যথচ দুই ত্রিভুজের ঘচ সাধারণ ভূমি ;

অতএব ঘঙচ কোণ, যথচ কোণের সমান । [১ম, ৮।

ইহাদের মধ্যে ঘঙচ কোণ সম কোণ ;

এই হেতু যথচ কোণও সম কোণ ;

এবং খচকে বর্দ্ধিত করিলে, তাহা একটি ব্যাস হইবে ;
আর ব্যাসের প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ
করিয়া যে সরল রেখা টানা যায়, তাহা রক্তকে স্পর্শ
করে ; [৩য়, ১৬, অনু ।

সুতরাং যথ রেখা কথগা রক্তকে স্পর্শ করিবে ।

অতএব কোন রক্তের বহিস্থ ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩১। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা
কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করে ও যাহার পরিধি দুই
নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় ।

৪০। যদি কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শৃঙ্গকে কেন্দ্র করিয়া
একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় ও তাহা ভূমি বা বর্দ্ধিত ভূমিকে
ছেদ করে, তবে ভূমির প্রান্ত দ্বয় হইতে পরিধি পর্য্যন্ত দুই
অংশ পরস্পর সমান হইবে ।

৪১। যদি দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করে, তবে সম্পাত
বিন্দু দ্বয় দিয়া দুইটি সমান্তর সরল রেখা দুই বৃত্তপরিধি পর্য্যন্ত
টানিলে, তাহারা পরস্পর সমান হইবে ।

৪২। দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিয়াছে ; সম্পাত বিন্দু
দিয়া দুই পরিধি পর্য্যন্ত এক সরল রেখা টান, যেন
তাহা ঐ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয় ।

৪৩। কোন বৃত্তের ত ক দ জ্যা, ব্যাসকে ক বিন্দুতে ছেদ
করিয়া তাহার সহিত অর্ধ সম কোণ করিতেছে ; প্রতিপন্ন
কর যে, কত ও কদএর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ, ব্যাসার্ধের
উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে ।

৪৪। ছয় ও আট ইঞ্চ পরিমিত দুই সমান্তর জ্যা, পর-
স্পর এক ইঞ্চ অন্তরে অবস্থিত আছে ; ইহারা যে বৃত্তের
জ্যা, তাহার ব্যাসের পরিমাণ কত ?

৪৫। দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে, ছেদ বিন্দু দিয়া পরিধি দ্বয় পর্য্যন্ত যত গুলি সরল রেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে যেটি দুই কেন্দ্রের সংযোজক রেখার সমান্তর, সেইটি বৃহত্তম হইবে।

৪৬। এমন তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহারা পরস্পরকে স্পর্শ করে; আবার আর একটি বৃত্ত এরূপে অঙ্কিত কর, যেন তাহা ঐ তিন বৃত্তকে স্পর্শ করে।

৪৭। একটি বৃত্তের চতুর্দ্ভুজকে তাহার সমান ও প্রত্যেকে তাহাকে স্পর্শ করে, এরূপ কতগুলি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়?

৪৮। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় এবং কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে এক নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে। কিন্তু ইহা জানা আছে যে উক্ত দুই বিন্দুই নির্দিষ্ট বৃত্তের কোন একটি স্পর্শিনীতে অবস্থিত নহে।

৪৯। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা এক নির্দিষ্ট বৃত্তকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকেও স্পর্শ করে।

৫০। যদি দুই বৃত্তের মধ্যে একটির ব্যাসার্ধ, অন্যের ব্যাসার্ধের অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হয় ও ক্ষুদ্রতর বৃত্তটি বৃহত্তরকে অন্তরে স্পর্শ করে, তবে বৃহত্তর বৃত্তের দ্বারা সীমাবদ্ধ ক্ষুদ্রতর বৃত্তের যত গুলি স্পর্শিনী টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে যেটি দুই বৃত্তের সাধারণ স্পর্শিনীর সমান্তর, সেইটি বৃহত্তম হইবে।

৫১। প্রতিপন্ন কর যে, বহিঃ এক বিন্দু হইতে কোন বৃত্তের দুইটি স্পর্শিনী টানিলে, তাহার পরস্পর সমান হইবে; আবার ইহা দ্বারা উপপন্ন কর যে, বৃত্তের উপর অঙ্কিত যে কোন চতুর্ভুজের সম্মুখীন দুইটি দুইটি বাহুর সমষ্টি দ্বয়, পরস্পর সমান এবং সম্মুখীন দুই বাহুর উপর দণ্ডায়মান দুইটি কেন্দ্রস্থ কোণ একত্র যোগে, দুই সম কোণের সমান।

৫২। কোন স্পর্শিনী, ব্যাসের দুই প্রান্তে অঙ্কিত অন্য দুই স্পর্শিনী দ্বারা সীমাবদ্ধ হইলে, তাহার সম্মুখীন কেন্দ্রস্থ কোণ সম কোণ হইবে।

৫৩। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহার কেন্দ্র, কোন নির্দিষ্ট সম কোণী ত্রিভুজের একটি ভূজে অবস্থিত হইবে এবং যাহার পরিধি সম কোণ দিয়া যাইবে ও কর্ণকে স্পর্শ করিবে ।

৫৪। কোন বৃত্তের কেন্দ্র ম; ব্যাসে বা বর্ধিত ব্যাসে স্থিত ক একটি বিন্দু; মখ ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট ব্যাসের লম্ব; যদি কখ সরল রেখা, বৃত্তকে ত বিন্দুতে ছেদ করে ও ত বিন্দুস্থ স্পর্শিনী কমকে গ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রতিপন্ন কর যে, কগ = গত ।

৫৫। দুই বৃত্ত পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করিলে, যদি তাহাদের একটি সাধারণ স্পর্শিনী টানা যায়, তবে তাহাকে ব্যাস করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহা নির্দিষ্ট দুই বৃত্তের সংযোগ বিন্দু দিয়া যাইবে ও ঐ দুই বৃত্তের কেন্দ্র সংযোজক রেখা, অঙ্কিত বৃত্তের স্পর্শিনী হইবে ।

৫৬। নির্দিষ্ট ব্যাস বিশিষ্ট বৃত্ত এক্রূপে অঙ্কিত কর, যেন তাহা এক নির্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করে ও তাহার কেন্দ্র, এক নির্দিষ্ট রেখাতে থাকে ।

৫৭। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যেন তাহা এক নির্দিষ্ট রেখাকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুতে এবং এক নির্দিষ্ট বৃত্তকেও স্পর্শ করে ।

৫৮। এমন এক রেখা অঙ্কিত কর, যাহা এক নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে ও কোন নির্দিষ্ট রেখার সহিত এক নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন করে ।

৫৯। নির্দিষ্ট ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এমন দুই বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহারা পরস্পরকে ও একই নির্দিষ্ট রেখাকে এক দিকে স্পর্শ করে ।

৬০। কখ ও কগ কোন বৃত্তের দুই জ্যা; ঘ ও ঙ, কখ ও কগ চাপের মধ্য বিন্দু; যদি ঘঙ রেখা, কখ ও কগকে চ ও ছ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কচ রেখা কছএর সমান হইবে ।

৬১। কখগঘ একটি সমান্তরিক; খঘ কর্ণের উপর গঙ লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে, খ ও ঘ বিন্দু হইতে কখ ও কঘএর

তৃতীয় অধ্যায়—অনুশীলনार्थ প্রতিজ্ঞা । ৭৫

সহিত সম কোণ করিয়া দুই সরল রেখা টানিলে তাহারা বর্জিত
ওগ রেখার এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে।

৬২। কোন ত্রিভুজের কোণ গুলি হইতে সম্মুখীন বাহুর
উপর লম্ব টানিলে যে বিন্দুতে তাহারা পরস্পরকে ছেদ করে,
যদি তিন বাহুর উপর অঙ্কিত বৃত্ত গুলি সেই বিন্দু দিয়া যায়
তবে এই বৃত্ত তিনটি পরস্পর সমান হইবে।

৬৩। কসথ ও কগথ দুই বৃত্ত পরস্পরকে ক ও খ বিন্দুতে
ছেদ করিয়াছে এবং কসথ বৃত্তের কেন্দ্র, কগথ বৃত্তের পরিধিস্থ
হইয়াছে; যদি কসথ বৃত্তের কগঘ জ্যা, অন্য বৃত্তকে গ বিন্দুতে
ছেদ করে, তবে গখ=গঘ।

৬৪। কোন বৃত্ত পরিধিস্থ তিনটি বিন্দু নির্দিষ্ট আছে;
কেন্দ্র নির্ণয় না করিয়া পরিধিস্থ অপর কোন বিন্দু নির্ণীত হইতে
পারে কি না?

৬৫। যদি কোন চতুর্ভুজের চারি কোণ দ্বিখণ্ড করা যায়,
তবে পরস্পর সন্নিবৃত্ত দুইটি দুইটি কোণের দ্বিখণ্ড কারক
রেখাদ্বয়ের সম্পাতে যে কএকটি বিন্দু উৎপন্ন হইবে, তাহারা
একটি বৃত্ত পরিধিতে থাকিবে।

৬৬। ক, খ, গ, ঘ, ঙ ও চ কোন বৃত্ত পরিধিস্থ বিন্দু; যদি
কখ ও কগ ক্রমে ঘ ও ঙ ঘচএর সমান্তর হয়, তবে খচ, ঙগএর
সমান্তর হইবে।

৬৭। সমান সমান দুই বৃত্ত পরস্পরকে ছেদ করিলে, যদি
একটি ছেদ বিন্দু দিয়া দুই বৃত্তের পরিধি পর্য্যন্ত কোন এক সরল
রেখা টানা যায় এবং উহাদের সাধারণ জ্যাকে ব্যাস
করিয়া আর একটি বৃত্ত আঁকা যায়, তবে ঐ সরল রেখা, তৃতীয়
বৃত্ত দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে।

৬৮। ক ও খ দুই নির্দিষ্ট বিন্দু; যদি কগ ও খগ সরল
রেখা একরূপে টানা যায় যে, তাহারা কোন নির্দিষ্ট কোণ উৎপন্ন
করে, তবে কগখ কোণের দ্বিখণ্ড কারক রেখা, এক অপরি-
বর্তনীয় বিন্দু দিয়া যাইবে।

৬৯। যদি কোন ব্যাসের দুই প্রান্ত হইতে কোন জ্যার
উপর দুই লম্ব টানা যায়, তবে ইহাদেরও বৃত্ত পরিধির মধ্যস্থিত

জ্যার অংশ দ্বয় পরস্পর সমান হইবে এবং ক্ষুদ্রতর লম্বটী, জ্যা ও পরিধির মধ্যস্থিত বৃহত্তর লম্বখণ্ডের বা তাহার বর্জিত অংশের সমান হইবে।

৭০। যে বৃত্ত, পরস্পর অবনত দুই নির্দিষ্ট সরল রেখাকে স্পর্শ করে, তাহার ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট আছে; বৃত্তের কেন্দ্র স্থির কর।

৭১। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের বর্জিত ব্যাসে এমন এক বিন্দু স্থির কর, যেন তাহা হইতে দুই স্পর্শিনী টানিলে, সংযোগ বিন্দু দ্বয় বৃত্ত পরিধিকে এক্রূপে বিভক্ত করে যে, এক অংশ অন্যের দ্বিগুণ হয়।

৭২। কোন চাপের মধ্য বিন্দু দিয়া জ্যার সমান্তর একটী সরল রেখা টানিলে, তাহা ঐ বিন্দুতে বৃত্তের স্পর্শিনী হইবে; আর যে ব্যাসার্ধ কোন চাপের সম্মুখীন জ্যাকে দিখাও করে, তাহা ঐ চাপকেও দিখাও করিবে।

৭৩। সন্নিহিত সমান দুই চাপের প্রত্যেক প্রান্ত হইতে সম্মুখীন পরিধিগাওস্থ দুই নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া সরল রেখা টানিলে ও তাহাদিগকে বর্জিত করিয়া মিলাইয়া দিলে, তাহাদের অন্তর্গত কোণ গুলি সমান হইবে।

৭৪। কোন সমকোণী ত্রিভুজের দুই বাহুকে ব্যাস করিয়া দুই বৃত্ত অঙ্কিত কর। কণের মধ্য বিন্দুকে কেন্দ্র ও দুই বাহুর সমষ্টিকে ব্যাস লইয়া আর একটি বৃত্ত আঁকিলে, তাহা প্রথম অঙ্কিত দুই বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

৭৫। কোন ত্রিভুজের বাহু গুলিকে ব্যাস করিয়া তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহারা বাহু অথবা বর্জিত বাহুতে পরস্পরকে ছেদ করিবে।

৭৬। কোন বৃত্তের ব্যাসের এক প্রান্ত হইতে যত গুলি জ্যা টানা যায়, তাহাদের মধ্য বিন্দু গুলি এক নির্দিষ্ট বৃত্ত পরিধিতে অবস্থিত হইবে।

৭৭। এক সম বাহু ত্রিভুজ কোন বৃত্তের অন্তর্গত করিলে, তাহার কৌণিক বিন্দু গুলি দ্বারা যে তিনটি চাপ উৎপন্ন হয়, তন্মধ্যে সন্নিহিত দুইটির মধ্য বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখা, ত্রিভুজের দুই বাহু দ্বারা সমান তিন ভাগে বিভক্ত হইবে।

৭৮। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে বর্জিত না করিয়া কোন প্রান্ত হইতে তাহার সহিত সম কোণ করে, এরূপ অন্য এক সরল রেখা টানিতে হইবে।

৭৯। কথং এক সম বাহু ত্রিভুজ ; য, ও ও চ তিন বাহুর মধ্য বিন্দু ; প্রতিপন্ন কর যে, যচ সরল রেখা, গঘও বৃত্তকে স্পর্শ করিবে।

৮০। দুই বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করিলে, যদি সংযোগ বিন্দু দিয়া পরিধি দ্বয় পর্য্যন্ত কোন দুই সরল রেখা টানা যায়, তবে তাহাদের দ্বারা দুই বৃত্তের যে দুই চাপ ছেদিত হইবে, তাহাদের সম্মুখীন দুইটি জ্যা পরস্পর সমান্তর হইবে।

৮১। কোন ত্রিভুজের একটি কোণ, তাহার সম্মুখীন বাহু ও অন্য দুই বাহুর সমষ্টি নির্দিষ্ট আছে, ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮২। কোন সম কোণী ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ও কর্ণ নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮৩। কোন ত্রিভুজের ভূমি, শীর্ষ কোণ এবং উন্নতি নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮৪। এক ভূমির উপর এক দিকে সমান শীর্ষ কোণ বিশিষ্ট যত গুলি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে পারা যায় তন্মধ্যে যেটি সম দ্বিবাহু সেইটি বৃহত্তম ; আর একই ভূমির উপর ও একই সমান্তর রেখা দ্বয়ের মধ্যস্থিত যাবতীয় ত্রিভুজের মধ্যে যেটি সম দ্বিবাহু, সেইটির শীর্ষ কোণ, অন্য ত্রিভুজের শীর্ষ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

৮৫। তিন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া ও রূপ তিনটি সরল রেখা টান, যেন তাহাদের দ্বারা এক সম বাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হয়। ঐ তিন বিন্দু এক রেখায় অবস্থিত নয়।

৮৬। কথং কোন বৃত্তের ব্যাস ; গঘ জ্যা কথএর লম্ব ; যদি গঘ রেখাস্ত কোন একটি ত বিন্দু দিয়া কতখ জ্যা টানা যায়, তবে কত ও কথএর অন্তর্গত আয়ত অপরিবর্তনীয় রাশি হইবে।

৮৭। কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল, একটি কোণ এবং আর একটি কোণ হইতে সম্মুখীন বাহু পর্য্যন্ত অঙ্কিত লম্ব জানা আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮৮। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা এক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় ও এক নির্দিষ্ট রেখাকে এক নির্দিষ্ট বিন্দুতে স্পর্শ করে ।

৮৯। এক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা দুই নির্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করে ।

৯০। এমন এক বৃত্ত অঙ্কিত কর, যাহা এক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় ও দুই নির্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করে ।

৯১। কোন সম দ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমিস্থ কোণ ও তাহার সম্মুখীন বাহুর উপর লম্ব জানা আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর ।

৯২। কোন বৃত্তের কেন্দ্র হইতে একটা জ্যার কোন বিন্দু পর্যন্ত এক সরল রেখা টানিলে, সেই রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ ও জ্যার দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়ত একত্র যোগে, ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

৯৩। যদি কোন বৃত্তের ব্যাস এক নির্দিষ্ট জ্যাকে ক বিন্দুতে লম্ব ভাবে ছেদ করে ও খগ অন্য কোন জ্যা প্রথম জ্যাকে ঘ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কঘএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ এবং খঘ, গঘএর আয়ত একত্র যোগে অপরিসর্তুনিয় রাশি হইবে ।

৯৪। দুই জ্যা পরস্পর লম্ব ভাবে ছেদ করিলে, তাহাদের প্রান্ত বিন্দু গুলির সংযোজক দুই সরল রেখার উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ; আর দুই জ্যার খণ্ডগুলির উপর অঙ্কিত চারি সমচতুর্ভুজের সমষ্টিও ঐ সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

৯৫। কখগ ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ ক কোণ, একটা সূক্ষ্ম কোণ, খগকে ব্যাস করিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে যদি ক বিন্দু হইতে তাহার এক স্পর্শিনী টানা যায়, তবে সেই স্পর্শিনীর উপর অঙ্কিত দ্বিগুণিত সমচতুর্ভুজ ও খগএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে কখ ও কগএর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

৯৬। কগঘখ একটা অর্ধ বৃত্ত ; কখ ইহার ব্যাস ; কঘ ও খগ দুই জ্যা পরস্পরকে ত বিন্দুতে ছেদ করিতেছে ; প্রতিপন্ন কর যে $কখ^2 = কঘ. কত + খগ. খত$ ।

২৭। একটি অর্ধবৃত্তকে এক সমকোণী ত্রিভুজের অন্তর্গত করিলে, যদি ত্রিভুজের কর্ণ ও কোটি তাহাকে স্পর্শ করে এবং তাহার ব্যাসের প্রান্ত হইতে কর্ণের সহিত সংযোগ বিন্দু দিয়া একটি সরল রেখা টানা যায় ও তাহা বর্জিত কোটিকে ছেদ করে, তবে কোটির বর্জিত অংশ, কোটির সমান হইবে।

২৮। কোন ত্রিভুজের তিন কোন হইতে সম্মুখীন বাহুর উপর লম্ব টানিলে, তাহার। পরস্পর যে বিন্দুতে ছেদ করে, সেই বিন্দু ও যে কোন দুইটি কৌণিক বিন্দু, এক বৃত্ত পরিধিস্থ হইলে সেই বৃত্ত ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের সমান হইবে।

২৯। ম বিন্দু কোন বৃত্তের কেন্দ্র ; কখ ও গঘ তাহার দুইটি জ্যা পরস্পরকে ও বিন্দুতে লম্ব ভাবে ছেদ করিয়াছে ; প্রতিপন্ন কর যে, কখ ও গঘএর উপর অঙ্কিত দুই সমচতুর্ভুজ এবং মওর উপর অঙ্কিত চতুর্ভুজিত সমচতুর্ভুজ একত্র যোগে ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ হইবে।

৩০। কখগঘ একটি সমান্তরিক ; ক বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, যদি তাহা কখ ও কঘ ভূজকে এবং কগ কর্ণকে যথাক্রমে চ, ছ ও জ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কখ.কচ+কঘ.কছ =কগ. কজ।



৩য় অধ্যায় ।

ব্যাক্য ও পরিশিষ্ট ।

১ম ও ২য় অধ্যায়ে যে সকল ক্ষেত্রের লক্ষণ ও ধর্ম স্থিরীকৃত হইয়াছে, ইউক্লিড সেইগুলির সাহায্যে তৃতীয় অধ্যায়ে বৃত্তের সাধারণ ধর্ম সকল নির্ণয় করিয়াছেন।

সং ৩। এই সংজ্ঞা দ্বারা বুঝিতে হইবে যে, একটা বৃত্ত তার একটিকে অন্তরে স্পর্শ করিলে, সংযোগ বিন্দু ব্যতীত এক বৃত্ত পরিধির যাবতীয় বিন্দু, অন্যের অন্তরে থাকিবে ; এই রূপ দুই বৃত্ত পরস্পরকে বাহিরে স্পর্শ করিলে, সংযোগ বিন্দু ব্যতীত এক বৃত্ত পরিধির যাবতীয় বিন্দু অন্যের বাহিরে থাকিবে ।

সং ৭। ইউক্লিডের জ্যামিতিতে কোন স্থানেই এই সংজ্ঞার উপযোগিতা দৃষ্ট হয় না।

সং ১০। জ্যামিতিতে প্রবৃত্ত কোণের উল্লেখ না থাকাতে অবশ্যই স্বীকার করিতে হইবে যে, ইউক্লিড লিখিত বৃত্তচ্ছেদকগুলি অর্ধ বৃত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর। যে বৃত্তচ্ছেদকের দুইটি ব্যাসার্ধ পরস্পরের সহিত সম কোণ করে, সেই বৃত্তচ্ছেদকের নাম বৃত্তপাদ।

তৃতীয় অধ্যায়ে, অনেকগুলি প্রতিজ্ঞা ব্যতিরেক মুখে সিদ্ধ হইয়াছে ; ফলত, অন্য কোন অধ্যায়ে এত ব্যতিরেকী প্রমাণের উদাহরণ দৃষ্ট হয় না। ১ম অধ্যায়ের ৪৮ টি প্রতিজ্ঞার মধ্যে ২টির প্রমাণ ব্যতিরেক মুখে সম্পন্ন হইয়াছে ; কিন্তু তৃতীয় অধ্যায়ের ৩৭ টি প্রতিজ্ঞার মধ্যে ১৫ টি ব্যতিরেকী প্রমাণের উদাহরণ স্থল। ব্যতিরেক মুখে প্রমাণ অপেক্ষা, অস্বয় মুখে প্রমাণ বিদ্যার্থীদের অধিক হৃদয়গ্রাহী হইয়া থাকে ; কিন্তু বিবেচনা করিতে হইবে যে, প্রতিজ্ঞাতে যাহা সাধ্য বলিয়া নির্দিষ্ট

হইয়াছে, তদ্ব্যতীত অন্য প্রকার কল্পনা করিলে, তাহা অসম্ভব হইয়া পড়ে, ইহা প্রদর্শন করাও প্রতিজ্ঞা প্রমাণের একটি উৎকৃষ্ট উপায়। এস্থলে শিক্ষার্থীদিগের জ্ঞাপনার্থ বলা যাইতে পারে যে, ইউক্লিড পরস্পর বিপরীত সম্বন্ধ বিশিষ্ট দুইটি প্রতিজ্ঞার মধ্যে অন্যতরটির প্রমাণ তিন প্রকারে সিদ্ধ করিয়াছেন।

(১) ব্যতিরেক যুগ্মে; যথা—১ম, ৩; ৩য়, ১ ইত্যাদি।

(২) যাহা প্রমাণ করিতে হইবে, তাহার অন্যথা ভাবের অসৌক্যিকতা প্রদর্শন দ্বারা; যথা—১ম, ১৯, ২৫ ইত্যাদি।

(৩) ব্যতিরেকী প্রমাণের পথ অবলম্বন না করিয়া অন্যান্যরূপ অঙ্কন দ্বারা; যথা—১ম, ৪৮; ৩য়, ৩৭।

৩য়, ২। এই প্রতিজ্ঞাতে উপপন্ন হইয়াছে যে, পরিমিতি দুই বিন্দু কল্পনা করিলে, তাঁহাদের সংযোজক সরল রেখা বৃত্তের ভিতরে পড়িবে; ইহা দ্বারা স্পর্শকই বোধ হইতেছে যে, কোন পরিমিতিও, সরল রেখা হইতে পারে না; কেননা, তাহা হইলে সেই পরিমিতিও ও সে সরল রেখা তাহার দুই সীমা সংযুক্ত করে এই দুইটি মিলিত হইত।

৩য়, ৩। এই প্রতিজ্ঞার দুইটি প্রকরণের সম্বন্ধ পরস্পর বিপরীত এবং সমস্ত প্রতিজ্ঞা ও প্রথম প্রতিজ্ঞার অনুমানের সম্বন্ধও পরস্পর বিপরীত।

৩য়, ৪। উভয় জ্যা কেন্দ্রগত হইলে, পরস্পরকে দ্বিখণ্ড করিবে; সে স্থলে দুইটি জ্যাই বৃত্তের ব্যাস হইবে।

৩য়, ৭ ও ৮। এই দুই প্রতিজ্ঞার অনুমান স্বরূপ ইহা লেখা যাইতে পারে যে, কোন দুই জ্যা, ব্যাস বা বর্ধিত ব্যাসের সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করিলে, সেই দুই জ্যা পরস্পর সমান হইবে।

৩য়, ৯। এই প্রতিজ্ঞাটি, সমস্তের অনুমান স্বরূপ লিখিলেও হইত। ইউক্লিড, নবমের যে দুই প্রকার প্রমাণ করিয়াছেন তন্মধ্যে একটি মূলে লিখিত হইয়াছে; অন্যটি এই;—কথ ও খণ্ড সংযুক্ত করিয়া তাহাদিগকে ক্রমে ট ও ঠ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত কর। এক্ষণে ঘট ও ঘট সংযুক্ত করিলে, তৃতীয় অধ্যায়ের ১ম প্রতিজ্ঞার অনুমানদ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে,

বৃত্তের কেন্দ্র, ঘট এবং ঘট উভয় রেখাতে থাকিবে ; অতএব ঘ বিন্দুই বৃত্তের কেন্দ্র ।

৩য়, ১০। ইউক্লিড এই প্রতিজ্ঞারও দুই প্রকার প্রমাণ করিয়াছেন ; একটি যথা স্থলে সম্বিবেশিত হইয়াছে ; অন্যটি এই ;—কছ ও ছচএর মধ্য বিন্দু দুইটি টএর সহিত সংযুক্ত করিলে, পূর্ব প্রতিজ্ঞার ন্যায় প্রমাণ হইবে যে, ট দুই বৃত্তেরই কেন্দ্র ; কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ; (৩য়, ৫) ।

৩য়, ১১ ও ১২। এই দুই প্রতিজ্ঞাতে ইহা স্বীকৃত হইয়াছে যে, দুই বৃত্ত পরস্পরকে স্পর্শ করিলে, এক মাত্র বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে, কিন্তু ইউক্লিড ইহা ত্রয়োদশ প্রতিজ্ঞাতে প্রমাণ করিয়াছেন । বৃত্ত দ্বয় একাধিক বিন্দুতে সংলগ্ন হইলেও এই দুইটি প্রতিজ্ঞা সিদ্ধ হইতে পারে ।

৩য়, ১৩। এই প্রতিজ্ঞার প্রথম প্রকরণ প্রমাণ করিবার নিমিত্ত দুইটি চিত্র অঙ্কিত হইয়াছে ; তাহাদের মধ্যে প্রথমটি ইউক্লিডের মূল গ্রন্থে নাই ; সিম্‌সন ইহা অঙ্কিত করিয়াছেন । ইউক্লিড এই প্রকারে প্রতিজ্ঞাটি প্রমাণ করিয়াছেন ; যথা,—

যদি অসম্ভব হয়, তবে ওখচ বৃত্ত যেন কথগ বৃত্তকে অন্তরে থ ও ঘ বিন্দুতে স্পর্শ করিল ; ত যেন কথগ বৃত্তের কেন্দ্র ; তথ সংযুক্ত করিলে তাহা থ ও ঘ বিন্দু দিয়া যাইবে (৩য়, ১১) । এক্ষণে ত বিন্দু, কথগ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া তথ, তঘএর সমান ; ইহাদের মধ্যে তথ, থঘ অপেক্ষা বৃহত্তর ; অতএব থথ, থঘ অপেক্ষা আরও বৃহত্তর । আবার থ বিন্দু ওখচ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া, থথ রেখা থঘএর সমান ; কিন্তু থথ, থঘ অপেক্ষা বৃহত্তর প্রতিপন্ন হইয়াছে ; অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

৩য়, ১৭। এই প্রতিজ্ঞার অঙ্কন দ্বারা সহজেই বোধ হইবে যে, কোন নির্দিষ্ট বহিস্থ বিন্দু হইতে বৃত্তের সমান সমান দুইটি স্পর্শিনী টানিতে পারা যায় । বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে স্পর্শিনী টানিবার একটি সুন্দর উপায় আছে ; নির্দিষ্ট বিন্দু ও নির্দিষ্ট বৃত্তের কেন্দ্র এই দুইটি যোজক রেখাকে ব্যাস করিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহার পরিধি, যে দুই বিন্দুতে নির্দিষ্ট

বৃত্তের পরিধিকে ছেদ করিবে, তাহাদের প্রত্যেকের সহিত নির্দিষ্ট বিন্দুকে সংযুক্ত করিয়া দাও ; তাহা হইলেই দুইটি স্পর্শিনী অঙ্কিত হইবে ।

এই দুইটি কেন স্পর্শিনী হইল তাহা তৃতীয় অধ্যায়ের ৩১শ প্রতিজ্ঞা পাঠ করিলেই অনায়াসে বোধ হইবে ।

৩য়, ১৮ । ১৬র প্রতিজ্ঞার সহিত এই প্রতিজ্ঞার বিপরীত সম্বন্ধ ; কেননা ব্যাসের সহিত সম্যকোণ করিয়া তাহার কোন প্রান্ত হইতে একটি সরল রেখা টানিলে, সেই রেখাটি বৃত্তের স্পর্শিনী হইবে ।

৩য়, ২০ । ইউক্লিড, পরিধিষ্ণু কোণ এক সম্যকোণ, অপেক্ষা ক্ষুদ্র জ্ঞান করিয়া এই প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করিয়াছেন ; যদি পরিধিষ্ণু কোণ, সম্যকোণ হয়, তবে কেন্দ্রে, কোণ উৎপন্ন হইবে না ; আর পরিধিষ্ণু কোণ, সম্যকোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, তাহা যে চাপের উপর দণ্ডায়মান হইয়াছে, সেই চাপের উপর দণ্ডায়মান কেন্দ্রস্থ কোণটি আবৃদ্ধ কোণ হইবে ; তাহা হইলেও প্রতিজ্ঞাটি সিদ্ধ হইতে পারে । এই রূপে প্রতিজ্ঞাটি সকল স্থলে সিদ্ধ হইলে পরবর্তী অনেকগুলি প্রতিজ্ঞার উপপত্তি সহজ হইয়া পড়ে ; তাহা হইলে, ২১ প্রতিজ্ঞার দুইটি প্রকরণের প্রয়োজন থাকে না ; ২২শ প্রতিজ্ঞাটি অনায়াসে সিদ্ধ হয়, কেননা কেন্দ্রস্থ কোণগুলির সমষ্টি চারি সম্যকোণের সমান ; তাহা হইলেই চতুর্ভুজের দুই সম্মুখীন কোণ, চারি সম্যকোণের অর্ধেক, অর্থাৎ দুই সম্যকোণের সমান হইবে ; এবং ৩১শ প্রতিজ্ঞা, ২০শ প্রতিজ্ঞার একটি অনুমান মাত্র হইয়া পড়ে ।

ইউক্লিড ২০র প্রতিজ্ঞার ১ম প্রকরণ প্রমাণের জন্য পঞ্চম অধ্যায়ের প্রথম এবং ২য় প্রকরণ প্রমাণের জন্য পঞ্চম অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞা স্বীকার করিয়া লইয়াছেন ।

৩য়, ২১ । এই প্রতিজ্ঞার প্রথম প্রকরণটি ইউক্লিডের, ২য় প্রকরণটি সিমসনের লিখিত ।

ইউক্লিডের ৪র্থ অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞাটি, তৃতীয় অধ্যায়ের ১ম প্রতিজ্ঞার একটি অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা স্বরূপ গৃহীত হইয়াছে ;

কোন ত্রিভুজের উপর কিরূপে এক বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হয় পাঠক বৃন্দ তাহা এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা জানিতে পারিবেন; তাহা হইলেই নিম্ন লিখিত প্রতিজ্ঞাটি কিরূপে সিদ্ধ হইরাছে, ইহা তাঁহাদের হৃদয়ঙ্গম হইবে;—

এক নির্দিষ্ট ভূমির উপর সমান সমান শীর্ষ কোণ বিশিষ্ট কতকগুলি ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে, শৃঙ্গগুলি এক বৃত্ত পরিধিতে থাকিবে ।

৩য়, ২২ । ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা এই; যদি কোন চতুর্ভুজের সম্মুখান কোণ দুয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হয়, তবে চতুর্ভুজের উপর একটা বৃত্ত অঙ্কিত করিতে পারা যায়; ইহা এই রূপে সিদ্ধ হইবে; নথ্য—কখনো যেন এইরূপ একটা চতুর্ভুজ; কখনো ত্রিভুজের উপর এক বৃত্ত অঙ্কিত কর এবং কগ চাপে ও বিন্দু কল্পনা করিয়া কঙ ও গঙ সংযুক্ত কর । এক্ষণে খ ও ঙ কোণ দুয় একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; আর খ ও স কোণ দুয়ও একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান; অতএব স কোণ ও কোণের সমান; তাহা হইলেই স ও ঙ বিন্দু উভয়েই খগ চাপে অবস্থিত হইবে ।

৩য়, ৩২ । ইউক্লিড ইহার বিপরীত প্রতিজ্ঞা প্রমাণ করেন নাই; কিন্তু সেই প্রতিজ্ঞাটি অনারাসেই ব্যতিরেক মুখে সিদ্ধ হইতে পারে ।

৩য়, ৩৫ । যদি কখ ও গস দুই রেখা ও বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে এবং কঙ ও ঙখএর অন্তর্গত আয়ত, গঙ ও ঙঘএর অন্তর্গত আয়তের সমান হয়, তবে ক, খ, গ ও স এক বৃত্ত পরিধিস্থ হইবে । এই প্রতিজ্ঞাটি সহজেই প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, ক, খ ও গ বিন্দু দিয়া একটা বৃত্ত অঙ্কিত কর; তাহা হইলে তৃতীয় অধ্যায়ের ৩৫শ প্রতিজ্ঞা দ্বারা উপপন্ন হইবে যে, স বিন্দুও এই বৃত্ত পরিধিতে থাকিবে ।

৪র্থ অধ্যায় ।

সংজ্ঞা ।

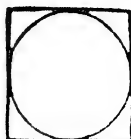
১। একটি সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র অন্য সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তর্গত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, যাহার মধ্যে ঐ অন্তর্গত ক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে তাহার এক একটি ভুজ যথাক্রমে অন্তর্গত ক্ষেত্রের এক একটি কোণের সহিত সংলগ্ন আছে।



২। ঐ রূপ, একটি ক্ষেত্র অন্য ক্ষেত্রের উপর অঙ্কিত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, যাহার উপর বহিস্থ ক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে তাহার এক একটি কোণের সহিত যথাক্রমে উপরি অঙ্কিত ক্ষেত্রের এক একটি ভুজ সংলগ্ন আছে।

৩। একটি সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র কোন রম্বের অন্তর্গত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, অন্তর্গত ক্ষেত্রের সমুদয় কোণ রম্বের পরিধিতে সংলগ্ন আছে।

৪। একটি সরল রৈখিক ক্ষেত্র কোন বৃত্তের উপর অঙ্কিত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, উপরি অঙ্কিত ক্ষেত্রের প্রত্যেক ভূজ বৃত্তের পরিধি স্পর্শ করিয়া আছে।



৫। ঐ রূপ, একটি বৃত্ত কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তর্গত হইয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, বৃত্তের পরিধি ক্ষেত্রের প্রত্যেক ভূজ স্পর্শ করিয়া আছে।

৬। একটি বৃত্ত কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্রের উপর অঙ্কিত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, বৃত্তের পরিধি ঐ ক্ষেত্রের সমুদয় কোণে সংলগ্ন আছে। (তৃতীয় সংজ্ঞার চিত্র দেখ।)

৭। একটি সরল রেখা কোন বৃত্তের মধ্যে স্থাপিত হইয়াছে বলিলে, বুঝিতে হইবে যে, ঐ রেখার দুই প্রান্ত বৃত্তের পরিধিতে সংলগ্ন আছে।

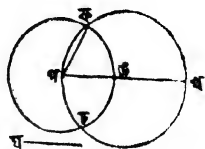
১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে তাহার ব্যাস অপেক্ষা বৃহৎ নয়, এমন এক নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান অন্য একটি সরল রেখা স্থাপিত করিতে হইবে।

কথগ নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং তাহার ব্যাস অপেক্ষা বৃহৎ নয় এমন নির্দিষ্ট সরল রেখা য। কথগ বৃত্তের মধ্যে যের সমান একটি সরল রেখা স্থাপিত করিতে হইবে।

কথগ বৃত্তের খগ ব্যাস টান ।

খগ যদি ঘএর সমান হয়, তবে
তাহাতেই কার্য সিদ্ধ হইল,
কেননা কথগ বৃত্তে, ঘএর সমান



খগ রেখা স্থাপিত হইল । কিন্তু খগ যদি ঘএর সমান না
হয়, তবে অবশ্য তাহা হইতে বৃহৎ হইবে; [কল্পনা।।
গথ হইতে ঘএর সমান করিয়া গঙ ছেদ কর, [১ম, ৩।
এবং গ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া গঙ ব্যাসার্দ্ধ লইয়া কঙচ
বৃত্ত অঙ্কিত কর ও গক সংযুক্ত কর ।

গ বিন্দু কঙচ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া,

- গক, গঙ পরস্পর সমান; [১ম, ১৫ সং ।
আর গঙ রেখা ঘএর সমান, [অঙ্কন । †
সুতরাং ঘ রেখা গকএর সমান । [১ স্বতঃ ।

অতএব কথগ নির্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে তাহার ব্যাস অপেক্ষা
বৃহৎ নয়, এমন একটি নির্দিষ্ট ঘ সরল রেখার সমান গক
রেখা স্থাপিত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে
তাহার ব্যাস অপেক্ষা বৃহৎ নয়, এমন এক রেখার সমান অন্য
একটি সরল রেখা এক্রূপে স্থাপিত করিতে হইবে যে, উহা বর্জিত
হইলে বৃত্তের বহিঃস্থ কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় ।

২। একটি নির্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে তাহার ব্যাস অপেক্ষা
বৃহৎ নয়, এমন এক নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান ও সমান্তর
অন্য একটি সরল রেখা স্থাপিত করিতে হইবে ।

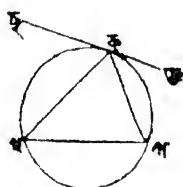
২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট
এক ত্রিভুজ, কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে
হইবে ।

কথগ নির্দিষ্ট বৃত্ত ও ঘণ্টচ নির্দিষ্ট ত্রিভুজ ; ঘণ্টচ
ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট ত্রিভুজ, কথগ বৃত্তের
অন্তর্গত করিতে হইবে ।

ক বিন্দু দিয়া বৃত্ত-
স্পর্শক ছকজ রেখা
টান, [৩য়, ১৭।

ছকজ রেখার ক বিন্দু-
তে ঘণ্টচ কোণের সমান



জকগ কোণ কর,

[১ম, ২৩।

এবং কছ সরল রেখার ক বিন্দুতে ঘণ্টচ কোণের সমান
ছকখ কোণ অঙ্কিত কর, ও খগ সংযুক্ত করিয়া দাও ।
কথগ সম্পাদ্য ত্রিভুজ ।

ছকজ সরল রেখা কথগ বৃত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং
কগ রেখা স্পর্শ বিন্দু ক হইতে টানা হইয়াছে, [অঙ্কন ।
একারণ জকগ কোণ,

বৃত্তের অপর খণ্ডস্থ কথগ কোণের সমান । [৩য়, ৩২।

আর জকগ কোণ ঘণ্টচ কোণের সমান; [অঙ্কন ।

সুতরাং কথগ কোণ ঘণ্টচ কোণের সমান । [১ স্বতঃ ।

এই রূপে, কগখ কোণ ঘণ্টচ কোণের সমান ।

এই হেতু অবশিষ্ট খকগ কোণ,

ঔষচ কোণের সমান ।

[১ম, ৩২; স্বতঃ ১১ ও ৩।

অতএব কখগ ত্রিভুজ, য্যউচ ত্রিভুজের কোণের সমানকোণ বিশিষ্ট হইয়া কখগ বৃত্তের অন্তর্গত হইয়াছে। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

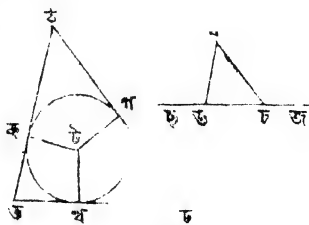
তাঃ প্রঃ—৩। দুইটি ঐককেন্দ্রিক বৃত্তের একটির অন্তর্গত করিয়া এক ত্রিভুজ অঙ্কিত হইয়াছে; ঐ ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট একটি ত্রিভুজ, এরূপ করিয়া অপর বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে যে, দুই ত্রিভুজের ভুজগুলি যথাক্রমে সমান্তর হয়।

৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট এক ত্রিভুজ, কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

কখগ নির্দিষ্ট বৃত্ত এবং য্যউচ নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। কখগ বৃত্তের উপর, য্যউচ ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

ঔচ সরল রেখা দুই পাশ্বে ছ এবং জ বিন্দু পর্য্যন্ত রুদ্ধ কর। টকে কখগ বৃত্তের কেন্দ্র কর; [৩য়, ১। এবং তথা হইতে টখ



রেখা টান। টখ রেখার ট বিন্দুতে খটক কোণ য্যউচ

কোণের সমান করিয়া এবং খটগ কোণ ঘচজ কোণের সমান করিয়া অঙ্কিত কর ; [১ম, ২৩।

এবং ক, খ, গ, বিন্দু দিয়া কথগ রত্তের ঠড, ডঢ, ঢঠ, স্পর্শক রেখা টান । [৩য়, ১৭।

ঠডঢ সম্পাদ্য ত্রিভুজ ।

ঠড, ডঢ, ঢঠ সরল রেখা কথগ রত্তকে ক, খ, গ, বিন্দুতে স্পর্শ করিতেছে ; [অঙ্কন ।

এবং ট কেন্দ্র হইতে ক, খ, গ, স্পর্শবিন্দু পর্য্যন্ত টক, টখ, টগ, রেখা টানা গিয়াছে,

এই হেতু ক, খ, গ, বিন্দুতে যে যে কোণ উৎপন্ন হইয়াছে, তাহার প্রত্যেকে সম কোণ । [৩য়, ১৮।

অপর কডখট চতুর্ভুজ দুই ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে বলিয়া, তদন্তঃপাতী চারি কোণ একত্র করিলে চারি সম কোণের সমান ;

এবং তাহার মধ্যে টকড, টখড প্রত্যেকে এক এক সম কোণ, সুতরাং অবশিষ্ট কটখ ও কডখ এই দুই কোণ একত্র করিলে দুই সম কোণের সমান হইবে ; [৩ স্বতঃ ।

অপর ঘঙচ ও ঘঙছ একত্র করিলে দুই সমকোণের সমান, [১ম, ১৩।

অতএব কটখ ও কডখ একত্র করিলে ঘঙচ ও ঘঙছ কোণের সমান ;

তন্মধ্যে কটখ কোণ ঘঙছ কোণের সমান ; [অঙ্কন ।

সুতরাং অবশিষ্ট কডখ কোণ ঘঙচ কোণের সমান ।

[৩ স্বতঃ ।

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, ঠাট কোণ
ঘাচঙ কোণের সমান ;

সুতরাং অবশ্যই ডঠট কোণ ওঘাচ কোণের সমান ।

[১ম, ৩২; স্বতঃ ১১ ও ৩ ।

অতএব ঠাটট ত্রিভুজ, ঘাচট ত্রিভুজের কোণের সমান-
কোণবিশিষ্ট হইয়া কথগ রূত্বের উপর অঙ্কিত হইয়াছে ।
এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৪ । প্রমাণ কর যে, ক এবং খ বিন্দু দিয়া যে
দুইটি স্পর্শক রেখা টানা হইয়াছে, তাহাদের পরস্পর সম্পাত্ত
হইবে ।

৫ । একটি নির্দিষ্ট ত্রিভুজের কোণের সমানকোণবিশিষ্ট
একটি ত্রিভুজ, এরূপে অঙ্কিত করিতে হইবে যে, উহার এক ভুজ
ও অপর দুই বর্ধিত ভুজ এক নির্দিষ্ট বৃত্ত স্পর্শ করে ।

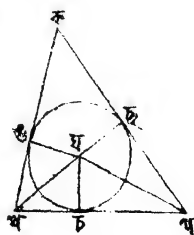
৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

একটি বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্গত করিতে
হইবে ।

কথগ নির্দিষ্ট ত্রিভুজ ; একটি রূত্ব এই ত্রিভুজের
অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কথগ এবং খগক এই দুই
কোণকে খঘ ও গঘ রেখার দ্বারা
দ্বিখণ্ড কর, [১ম, ২ ।

ও ঘ বিন্দুতে ঐ দুই রেখা মিলাইয়া
দাও । ঘ বিন্দু হইতে কথ, খগ,
গক রেখার উপর ঘঙ, ঘাচ, ঘাছ
লম্ব টান ।



[১ম, ১২ ।

কথগ কোণ খয রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হওয়াতে,
 ঔখয কোণ চখয কোণের সমান ; [অঙ্কন ।
 এবং খঔয সম কোণ খচয সম কোণের সমান ; [১১ স্বতঃ।
 অতএব ঔখয, চখয এই দুই ত্রিভুজের একের দুটি কোণ
 ক্রমান্বয়ে অন্যের দুটি কোণের সমান ;
 এবং প্রত্যেক ত্রিভুজের এক একটি সমান কোণের সম্মুখস্থ
 খয ভুজ, উভয়েরই সামান্য বাহু ;
 এই হেতু তাহাদের অন্যান্য ভুজ সমান ; [১ম, ২৬'
 অতএব ঘঔ রেখা ঘচ রেখার সমান ।
 এই রূপে ঘছ রেখা ঘচ রেখার সমান,
 সুতরাং ঘঔ রেখা ঘছএর সমান । [১ স্বতঃ ।
 অতএব ঘঔ, ঘচ, ঘছ এই তিন সরল রেখা পরস্পর
 সমান । এই হেতু ঘ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া, ঐ তিনের
 মধ্যে কোন একটি রেখার প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে
 সেই বৃত্ত অপর দুইটি রেখারও প্রান্ত দিয়া যাইবে ।
 অপর ঐ বৃত্ত, কথ, খগ এবং কগ রেখাকে স্পর্শ করিবে ;
 কেননা ঔ, চ, ছ বিন্দুতে যে যে কোণ উৎপন্ন হইয়াছে,
 সে সকল সম কোণ ; এবং ব্যাসের প্রান্ত হইতে লম্ব
 টানিলে তাহা বৃত্তকে স্পর্শ করে । [৩য়, ১৬-অনু ।
 এই হেতু কথ, খগ, গক সরল রেখা প্রত্যেকে বৃত্ত
 স্পর্শ করিতেছে । অতএব ঔচছ বৃত্ত কথগ ত্রিভুজের
 অন্তর্গত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৬। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যে,
 উহা কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের এক ভুজ ও অপর দুইটি বর্ধিত
 ভুজ স্পর্শ করে ।

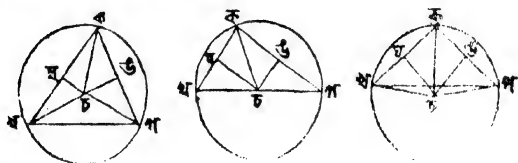
৭। এমন একটা বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যে, উহা একটা নির্দিষ্ট বৃত্ত ও এই নির্দিষ্ট বৃত্তের দুইটা নির্দিষ্ট স্পর্শক রেখা স্পর্শ করে।

৮। চতুর্থ প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি ক ঘ সংযুক্ত হয় ও বৃত্তের সহিত ক ঘ রেখার জ বিন্দুতে সম্পাত হয়, তবে জ বিন্দু ক ও ছ ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্তের কেন্দ্র হইবে।

৫ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের উপর একটা বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে।

কথগ নির্দিষ্ট ত্রিভুজ। একটা বৃত্ত কথগ ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।



কথ এবং কগকে ঘ ও ঙ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর ; [১ম, ১০।
এবং ঐ দুই বিন্দু হইতে কথ এবং কগ সরল রেখার উপর ঘচ এবং ঙচ লম্ব টান। [১ম, ১১।

ঘচ এবং ঙচ এই দুই রেখাকে রুদ্ধি করিলে তাহারা পরস্পর সংলগ্ন হইবে; যদি না হয়, তবে তাহারা সমান্তর রেখা ;

তাহা হইলে কথ ও কগ সরল রেখা, চঘ ও চঙ রেখার সহিত সম কোণ উৎপন্ন করিয়াছে বলিয়া, সমান্তর

হইবে ; কিন্তু এরূপ হওয়া যুক্তিবিহীন । অতএব ঘচ, চুচ যেন চ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল । চ, ক সংযুক্ত কর ; আর চ বিন্দু যদি খগ রেখা হই না হয়, তবে খচ, গচ সংযুক্ত কর ।

কয রেখা খয রেখার সমান, [অনুমান ।

এবং ঘচ রেখা কযচ ও খযচ দুই ত্রিভুজের সামান্য বাহু ও ক খ রেখার উপর লম্ব ;

এই হেতু চক ভূমি চখ ভূমির সমান ; [১ম, ৪ ।

এই রূপে চগ রেখা ও চক রেখার সমান প্রমাণ হইতে পারে ;

সুতরাং চখ রেখা চগের সমান, [১ স্বতঃ ।

এবং চক, চখ, চগ এই তিন রেখা পরস্পর সমান ।

অতএব চ বিন্দুকে কেন্দ্র এবং এই তিনের কোন একটি রেখা ব্যাসার্দ্ধ লইয়া রত্ন অঙ্কিত করিলে, উহা অপর দুই রেখার প্রান্ত দিয়া যাইবে এবং কখগ ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত হইবে । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অনুমান । রত্নের কেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যে পড়িলে ত্রিভুজের প্রত্যেক কোণ অর্দ্ধরত্ন অপেক্ষা রত্নের খণ্ড হওয়াতে, সম কোণ হইতে ন্যূন হইবে । কেন্দ্র কোন বাহুতে সংলগ্ন হইলে, সেই বাহুর সম্মুখবর্তী কোণ, অর্দ্ধ রত্ন হওয়াতে, সম কোণ হইবে । কেন্দ্র ত্রিভুজের বহিঃস্থ হইলে, যে বাহুর বাহিরে কেন্দ্র থাকিবে, তাহার সম্মুখবর্তী কোণ, অর্দ্ধরত্ন হইতে লঘুতর খণ্ড হওয়াতে, সম কোণ হইতে রত্নতর হইবে । [৩য়, ৩১ ।

অতএব বিপর্যাস্তভাবে বলা যাইতে পারে যে, নির্দিষ্ট ত্রিভুজ স্ফমকোণবিশিষ্ট হইলে কেন্দ্র ত্রিভুজের মধ্যে, সমকোণবিশিষ্ট হইলে সমকোণের সম্মুখস্থ বাহুতে, ও স্থলকোণবিশিষ্ট হইলে স্থল কোণের সম্মুখস্থ বাহু অতিক্রম করিয়া অপর পাশ্বে পতিত হইবে ।

অঃ প্রঃ—২ । ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত ও অন্তর্গত বৃত্তবয় এককেন্দ্রিক হইলে ত্রিভুজটী সমসাহ হইবে ।

১০ । যদি কখগ ত্রিভুজের খগ ভূমির সমান্তর ঘঙ রেখা টানা যায়, তবে কখগ এবং কঘঙ এই ই ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তদ্বয়ের একটি সামান্য স্পর্শক রেখা টানা যাইতে পারে ।

৬ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

একটি সমচতুর্ভুজ কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

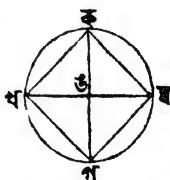
কখগয নির্দিষ্ট বৃত্ত ; একটি সমচতুর্ভুজ, কখগয বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কখগয বৃত্তের কগ এবং খয ব্যাস পরস্পর লম্ব ভাবে টান ;

[৩য়, ১ । ১ম, ১১ ।

এবং কখ, খগ, গয, যক সংযুক্ত কর ।

কখগয ক্ষেত্র সম্পাদ্য সমচতুর্ভুজ ।



ও বিন্দু বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে খউ, ঘউ পরস্পর সমান, আর উক সামান্য ভুজ ও খয রেখার উপর লম্ব, এই হেতু কখ ভূমি কয ভূমির সমান । [১ম, ৪ ।

এ কারণে খগ, গঘ প্রত্যেকেই থক অথবা কঘএর সমান ।
অতএব কখগঘ চতুর্ভুজ সমবাহু ।

অপর এ ক্ষেত্র সমকোণবিশিষ্ট ;

কারণ খঘ সরল রেখা কখগঘ বৃত্তের ব্যাস হওয়াতে,
থকঘ অর্ধবৃত্ত, [অঙ্কন ।

তন্নিমিত্ত থকঘ কোণ সমকোণ ; [৩য়, ৩১ ।

এ কারণে কখগ, খগঘ, গঘক কোণ প্রত্যেকেই সমকোণ ;
অতএব কখগঘ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র সমকোণবিশিষ্ট ;

অপর, ইহা যে সমবাহু তাহা উপপন্ন হইয়াছে,
সুতরাং ইহা বর্গক্ষেত্র এবং কখগঘ বৃত্তের অন্তর্গত হইয়াছে ।
এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১১ । এক নির্দিষ্ট সরল রেখিক ক্ষেত্রের সমান
একটি আয়ত ক্ষেত্র এক বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

১২ । বৃত্তের অন্তর্গত সমচতুর্ভুজ ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত
সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ এবং ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের
অর্ধেক ।

৭ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

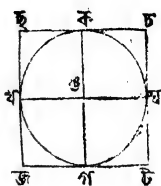
কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর একটি সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত
করিতে হইবে ।

কখগঘ নির্দিষ্ট বৃত্ত । ইহার উপর এক সমচতুর্ভুজ
অঙ্কিত করিতে হইবে ।

কখগঘ হস্তের কগ ও খঘ বাস পরস্পর
লম্বভাবে টান ; [৩য়, ১ ; ১ম, ১১।

এবং ক, খ, গ, ঘ বিন্দু দিরা রক্ত স্পর্শি
চছ, ছজ, জট, টচ রেখা টান । [৩য়, ১৭।

চছজট ক্ষেত্র সম্পাদা সমচতুর্ভুজ ।



চছ রেখা রক্ত স্পর্শ করিতেছে, এবং উ কেন্দ্র হইতে
স্পর্শ বিন্দু ক পর্য্যন্ত উক রেখা টানা হইয়াছে, [অঙ্কন।

এই হেতু ক বিন্দুস্থ কোণদ্বয় প্রত্যেকে সম কোণ । [৩য়, ১৮।

ঐ কারণে খ, গ, ঘ বিন্দুস্থ প্রত্যেক কোণ সম কোণ ।

অপর কখ কোণ একটী সম কোণ হওয়াতে, [অঙ্কন।

এবং উখছ কোণও সম কোণ বলিয়া,

ছজ রেখা কগএর সমান্তর হইল । [১ম, ২৮।

ঐ কারণে কগ রেখা চটএর সমান্তর ।

এই রূপে ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, চছ, টজ
রেখা প্রত্যেকেই যথ রেখার সমান্তর ।

অতএব ছট, ছগ, গচ, চখ, খট ইহারা সমান্তর ক্ষেত্র ;

এই হেতু ছচ সরল রেখা জট রেখার সমান,

এবং ছজ রেখা চটএর সমান ; [১ম, ৩৪।

অপর কগ রেখা খঘএর সমান হওয়ায়,

ও কগ রেখা ছজ, চট রেখার প্রত্যেকের সমান বলিয়া,

এবং খঘ রেখা ছচ, জট রেখার প্রত্যেকের সমান
হওয়াতে,

ছজ অথবা চট রেখাদ্বয়ের প্রত্যেকেই ছচ অথবা জট
রেখার সমান ;

অতএব ছজটচ চতুর্ভুজ ক্ষেত্র সমবাহু ।

অপর, ইহা সমকোণবিশিষ্ট ;

কেননা, চ্ছথঙক সমান্তর ক্ষেত্র, ও কঙথ কোণ সমকোণ
বলিয়া, কছথ কোণও সমকোণ । [১ম, ৩৪

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, জ, ট, চ বিন্দুস্থ
কোণগুলি সমকোণ ;

অতএব ছজটচ চতুর্ভুজ সমকোণবিশিষ্ট,

এবং পূর্বে উপপন্ন হইয়াছে যে, ইহা সমবাহু,

এই হেতু ইহা সমচতুর্ভুজ এবং কথগঘ বৃত্তের উপর
অঙ্কিত হইয়াছে । এখানে ইহাই সম্পাদা ।

অঃ প্রঃ—১৩। বৃত্তের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ সেই বৃত্তের
অন্তর্গত সমচতুর্ভুজের দ্বিগুণ ও তাহার ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত
সমচতুর্ভুজের চতুর্গুণ ।

১৪। প্রমাণ কর যে, সমচতুর্ভুজ ব্যতীত অপর কোন সম-
কোণবিশিষ্ট সমান্তর ক্ষেত্র বৃত্তের উপর অঙ্কিত করা যাইতে
পারে না ।

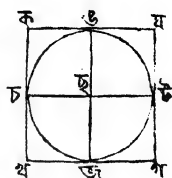
৮ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদা ।

একটী বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ ক্ষেত্রের অন্তর্গত
করিতে হইবে ।

কথগঘ নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ । একটী বৃত্ত কথগঘ
সমচতুর্ভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কথ এবং কঘ বাহুকে ক্রমে চ এবং
 ঙ্গ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর ; [১ম, ১০ ।

এবং ঙ্গ বিন্দু দিয়া ঙ্গজ সরল রেখা কথ
 অথবা ঘগ রেখার সমান্তর করিয়া টান ;
 এবং চ বিন্দু দিয়া চট রেখা কঘ অথবা



খগ রেখার সমান্তর করিয়া টান ; [১ম, ৩১ ।

তাহা হইলে কট, টখ, কজ, জঘ, কছ, ছগ, খছ, ছঘ
 প্রত্যেকেই সমান্তর ক্ষেত্র হইল ;

অতএব তাহাদের সম্মুখস্থ বাহু পরস্পর সমান ।

[১ম, ৩৪ ।

আর কঘ, কথ পরস্পর সমান হওয়াতে, [১ম, সং ৩০ ।

এবং কঙ, কঘ রেখার অর্ধ ; ও কচ, কথএর অর্ধ বলিয়া,

[অঙ্কন ।

কঙ রেখা কচএর সমান ।

[স্বতঃ ৭ ।

অতএব এই দুই ভুজের সম্মুখস্থ ভুজদ্বয় সমান,

অর্থাৎ চছ, ছঙের সমান ;

[১ম, ৩৪ ।

এই রূপে ইহাও উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, ছজ, ছট
 প্রত্যেকে ছঙ অথবা ছচএর সমান ;

অতএব ছঙ, ছচ, ছজ, ছট এই চারি রেখা পরস্পর
 সমান ; তাহা হইলে ছকে কেন্দ্র করিয়া এই চারি রেখার
 কোন একটির প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে সেই বৃত্ত
 অপর তিনটি রেখারও প্রান্ত দিয়া যাইবে এবং কথ, খগ,
 গঘ, ও ঘক রেখাকে স্পর্শ করিবে, কেননা, ঙ্গ, চ, জ, ট
 বিন্দুস্থ কোণ প্রত্যেকে সম কোণ ; এবং ব্যাসের প্রান্ত হইতে

উহার সহিত সম কোণ করিয়া রেখা টানিলে সেই রেখা
রক্তকে স্পর্শ করে । [৩য়, ১৬। অনু।

এই হেতু কখ, খগ, গঘ, ঘক এই চারি সরল রেখা
প্রত্যেকে রক্ত স্পর্শ করিতেছে; অতএব এই রক্তটি
কখগঘ সমচতুর্ভুজের অন্তর্গত করা হইল । এখানে ইহাই
সম্পাদ্য ।

অঃ প্র—১৫। একটি রক্ত কোন নির্দিষ্ট রম্বনের অন্তর্গত
করিতে হইবে ।

৯ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

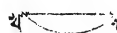
কোন নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের উপর একটি রক্ত
অঙ্কিত করিতে হইবে ।

কখগঘ নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজ । একটি রক্ত কখগ
সমচতুর্ভুজের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে ।

কগ, খঘ সংযুক্ত কর ; তাহাদের
সম্পাত বিন্দু যেন ও হইল ;



কখ রেখা কঘএর সমান বলিয়া,



এবং কগ রেখা কখগ ও কঘগ ত্রিভুজের সামান্য বা
হওয়ায়,

খক, কগ এই দুই বাহু ক্রমে ঘক, কগ বাহুর সমান, এবং
খগ ভূমি ঘগ ভূমির সমান,

অতএব খকগ কোণ ঘকগ কোণের সমান, [১ম, ৮

তাহা হইলে খকঘ কোণ কগ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইল

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, কথগ, থগঘ এবং গঘক কোণ ক্রমে থঘ, গক এবং ঘথ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইয়াছে ।

আবার ঘকথ কোণ কথগ কোণের সমান,

এবং ঙকথ কোণ ঘকথ কোণের অর্দ্ধ,

এবং ঙথক কোণ কথগ কোণের অর্দ্ধ,

এই হেতু ঙকথ কোণ ঙথক কোণের সমান ; [স্বতঃ ৭ ।

অতএব ঙক বাল্ ঙথ বাল্‌র সমান । [১ম, ৬ ।

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, ঙগ, ঙঘ সরল রেখা প্রত্যেকে ঙক অথবা ঙথ রেখার সমান ;

সুতরাং ঙক, ঙথ, ঙগ, ঙঘ এই চারি সরল রেখা পরস্পর সমান । অতএব ঙকে কেন্দ্র করিয়া এই চারি রেখার কোন

একটির প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে সেই বৃত্তে অপর তিন রেখার প্রান্ত দিয়া যাইবে এবং কথগঘ সমচতুর্ভুজের

উপর অঙ্কিত হইবে । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

তাঃ প্র—১৬ । কোন নির্দিষ্ট আয়ত ক্ষেত্রের উপর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে ।

১০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ভূমিস্থ দুই কোণ প্রত্যেকে শূন্য কোণের দ্বিগুণ হয় ।

রেখার উপর সমচতুর্ভুজের সমান হওয়াতে, খঘ সরল রেখা কগঘ রূত্ত স্পর্শ করিতেছে । [৩য়, ৩৭ ।

আর খঘ রেখা রূত্তকে স্পর্শ করিতেছে এবং স্পর্শ-বিন্দু ঘ হইতে ঘগ রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া, খঘগ কোণ রূত্তের অপর খগুহ ঘকগ কোণের সমান ।

[৩য়, ৩২ ।

এই দুই সমান কোণে গঘক কোণ যোগ কর ;

তাহা হইলে সমুদয় খঘক কোণ গঘক এবং ঘকগ এই দুই কোণের সমান হইবে । [স্বতঃ ২ ।

কিন্তু বহিস্থ খগঘ কোণ গঘক এবং ঘকগ এই দুই কোণের সমান । [১ম, ৩২ ।

সুতরাং খঘক কোণ খগঘ কোণের সমান । [স্বতঃ ১ ।

আর কঘ, কখ দুই বাহু সমান হওয়াতে,

খঘক কোণ ঘখক কোণের সমান । [১ম, ৫ ।

অতএব খঘক, ঘখক এই দুই কোণের প্রত্যেকেই খগঘ কোণের সমান । [স্বতঃ ১ ।

আবার ঘখগ কোণ খগঘ কোণের সমান বলিয়া,

খঘ বাহু গঘ বাহুর সমান ; [১ম, ৬ ।

কিন্তু খঘ রেখা গকএর সমান করিয়া অঙ্কিত হইয়াছে,

এই হেতু গক রেখা গঘএর সমান, [স্বতঃ ১ ।

• তন্নিমিত্ত গকঘ কোণ গঘক কোণের সমান । [১ম, ৫ ।

অতএব গকঘ, গঘক দুই কোণ একত্রে গকঘ কোণের দ্বিগুণ, এবং খগঘ কোণ, খঘক ও ঘখক এই দুইএর প্রত্যেকের সমান উপপন্ন হইয়াছে ;

এই হেতু খ্যক, যথক প্রত্যেকে যকখ কোণের দ্বিগুণ ।

অতএব কথয সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এরূপে অঙ্কিত হইয়াছে যে, ভূমিস্থ দুই কোণ প্রত্যেকে তৃতীয় কোণের দ্বিগুণ । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্র—১৭ । এক সমকোণকে সমান পাঁচ অংশে বিভাগ করিতে হইবে ।

১৮ । কোন বৃত্তপরিধিকে সমান দশ অংশে বিভাগ করিতে হইবে ।

১৯ । এক সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট দশভুজ ক্ষেত্র কোন বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

একটি সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ ক্ষেত্র কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কথগযঙ নির্দিষ্ট বৃত্ত ; একটি সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ ক্ষেত্র কথগযঙ বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

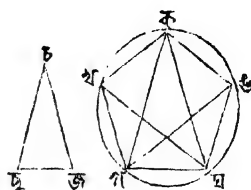
চছজ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ এরূপ করিয়া অঙ্কিত কর, যাহাতে ছ এবং জ বিন্দুস্থ কোণ প্রত্যেকে চ বিন্দুস্থ কোণের দ্বিগুণ হয় ।

[৪থ, ১০ ।

চছজ ত্রিভুজের কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট করিয়া কগয ত্রিভুজ কথগঙয বৃত্তের অন্তর্গত কর, যেন ক বিন্দুস্থ কোণ চ কোণের এবং গ ও য বিন্দুস্থ কোণ প্রত্যেকে ছ অথবা জ কোণের সমান হয় ;

[৪থ, ২ ।

অতএব কগঘ ও কঘগ
কোণ প্রত্যেকে গকঘ
কোণের দ্বিগুণ। কগঘ এবং
কঘগ এই দুই কোণকে ক্রমে
গঙ, যথ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড



কর ;

[১ম, ৯।

এবং কখ, খগ, কঙ, ঙঘ সংযুক্ত কর। কখগঘঙ
সম্পাদ্য পঞ্চভুজ।

কগঘ, কঘগ প্রত্যেকে গকঘ কোণের দ্বিগুণ, এবং যথা-
ক্রমে গঙ, যথ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইয়াছে বলিয়া,

কখখ, খঘগ, গকঘ, ঘগঙ, ঙগক এই পাঁচ কোণ পরস্পর
সমান।

আবার সমান সমান কোণ সমান সমান চাপের উপর
থাকে,

[৩য়, ২৬।

অতএব কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক এই পাঁচ চাপ পরস্পর
সমান।

আর সমান সমান চাপের সম্মুখস্থ সরল রেখা সমান,

[৩য়, ২৯।

এই হেতু কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক এই পাঁচ রেখা পরস্পর
সমান।

• অতএব কখগঘঙ পঞ্চভুজ সমবাহু হইল।

আর ইহা সমান কোণ বিশিষ্ট ;

কারণ কখ চাপ ঘঙ চাপের সমান,

তাহাদের প্রত্যেকে খগঘ চাপ যোগ কর ;

তাহা হইলে সমস্ত কথগয চাপ, ঙ্গযগথ চাপের সমান ।

[স্বতঃ ২ ।

আর কঙয কোণ কথগয চাপের এবং খকঙ কোণ থগযঙ চাপের উপরিস্থ হওয়াতে,

কঙয কোণ খকঙ কোণের সমান । [৩য়, ২৭ ।

এই রূপে কথগ, থগয, গযঙ প্রত্যেকে কঙয অথবা খকঙ কোণের সমান উপপন্ন হইবে ।

অতএব কথগযঙ পঞ্চভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট,

এবং পূর্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, ইহা সমবাহু ।

অতএব একটা সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করা হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

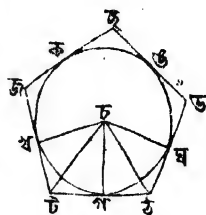
অঃ প্র—২০ । নিয়মিত পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের প্রত্যেক কর্ণদ্বারা যে ভুক্তের সহিত সংলগ্ন না হয়, তাহার সমান্তর হইবে ।

১২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

একটা সমবাহু এবং সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ ক্ষেত্র কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে ।

কথগযঙ নির্দিষ্ট বৃত্ত । একটা সমবাহু এবং সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ কথগযঙ বৃত্তের উপর অঙ্কিত রতে হইবে ।

পূৰ্ণ প্রতিজ্ঞা দ্বারা একটী
পঞ্চভুজ রস্তের অন্তর্গত করিলে যেন
তাহার কোণ গুলি ক, খ, গ, ঘ, ঙ,
বিন্দুতে হইল ; তাহা হইলে কখ,
খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক এই পাঁচ চাপ
পরস্পর সমান হইবে । ক, খ, গ,



ঘ, ঙ, বিন্দু দিয়া ছজ, জট, টঠ, ঠড, ডছ, রস্ত স্পর্শক
রেখা টান । [৩য়, ১৭ ।

ছজটঠড ক্ষেত্র সম্পাদ্য পঞ্চভুজ ।

চ কেন্দ্র নির্দেশ করিয়া চখ, চট, চগ, চঠ, চঘ সংযুক্ত কর ।
টঠ রেখা কখগঘঙ রস্ত স্পর্শ করিতেছে এবং কেন্দ্র
হইতে স্পর্শ বিন্দু পর্যন্ত চগ রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া,
চগ রেখা টঠএর উপর লম্ব, [৩য়, ১৮ ।

অতএব গ বিন্দুস্থ প্রত্যেক কোণ সম কোণ ;

এই কারণে খ এবং ঘ বিন্দুস্থ কোণ গুলি প্রত্যেকে সম কোণ ।

আর চগটি কোণ সম কোণ বলিয়া, চট রেখার উপর অঙ্কিত
সমচতুর্ভুজ চগ ও টগ রেখার উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের
সমান ; [১ম, ৪৭ ।

এই রূপে চট রেখার উপর সমচতুর্ভুজ চখ ও খট রেখার
উপর সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের সমান ;

অতএব চগ, গট রেখার উপর সমচতুর্ভুজ চখ, খট রেখার
উপর সমচতুর্ভুজের সমান ; [স্বতঃ ১১ ।

তাহার মধ্যে চগএর উপর সমচতুর্ভুজ চখএর উপর
সমচতুর্ভুজের সমান,

সুতরাং অবশিষ্ট গট এবং খটএর উপর সমচতুর্ভুজের
পরস্পর সমান ; [স্বতঃ ৩।

অতএব গট রেখা খট রেখার সমান ;

আবার চখ রেখা চগএর সমান,

এবং চট রেখা চখট, চগট এই দুই ত্রিভুজের সামান্য
বাহু হওয়াতে,

খচ, চট দুই বাহু ক্রমে গচ ও চট বাহুর সমান ;

আর উপপন্ন হইয়াছে যে, খট ভূমি গট ভূমির সমান,

অতএব খচট কোণ গচট কোণের সমান ; [১ম, ৮।

এবং খটচ কোণ গটচ কোণের সমান ; [১ম, ৪

সুতরাং খচগ কোণ গচট কোণের দ্বিগুণ,

এবং খটগ কোণ গটচ কোণের দ্বিগুণ ।

এই রূপে গচঘ কোণ গচঠ কোণের দ্বিগুণ,

এবং গঠঘ কোণ গঠচ কোণের দ্বিগুণ উপপন্ন হইবে ।

আবার খগ চাপ গঘ চাপের সমান বলিয়া,

খচগ কোণ গচঘ কোণের সমান ; [৩য়, ২৭।

এবং খচগ কোণ টচগ কোণের দ্বিগুণ ও গচঘ কোণ গচঠ
কোণের দ্বিগুণ ;

অতএব গচট কোণ গচঠ কোণের সমান ; [স্বতঃ ৭।

এবং চগট সম কোণ চগঠ সম কোণের সমান ;

অতএব চগট, চগঠ এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে একটীর দুই
কোণ ক্রমে অন্যটীর দুই কোণের সমান,

এবং সমান সমান কোণ সংলগ্ন গচ রেখা দুই ত্রিভুজের
সামান্য বাহু,

এই হেতু অন্যান্য বালু ও ক্রমে পরস্পর সমান,
এবং একের তৃতীয় কোণ অন্যের তৃতীয় কোণের সমান,
অতএব গট রেখা গট রেখার সমান এবং চটগ কোণ চটগ
কোণের সমান । [স্বতঃ ২৬।

আর টগ রেখা টগএর সমান হওয়াতে টট রেখা টগএর
দ্বিগুণ ।

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, জট রেখা খটএর
দ্বিগুণ ।

আর পূর্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, খট রেখা গটএর সমান ;
এবং জট, খটএর দ্বিগুণ ও টট, টগএর দ্বিগুণ হওয়াতে,
জট রেখা টট রেখার সমান । [স্বতঃ ৬।

এই রূপে প্রমাণ করা যাইতে পারে যে, ছজ, ছড, ডট
প্রত্যেকে জট অথবা টট রেখার সমান ;

অতএব ছজটটড পঞ্চভুজ সমবাহু ।

অপর ইহা সমান কোণ বিশিষ্ট ;

কেননা চটগ কোণ চটগ কোণের সমান বলিয়া,

আর জটট কোণ চটগ কোণের দ্বিগুণ এবং টটড কোণ
চটগ কোণের দ্বিগুণ উপপন্ন হওয়াতে,

জটট কোণ টটড কোণের সমান । [স্বতঃ ৬।

এই রূপে টজছ, জছড, ছডট প্রত্যেকে জটট অথবা টটড
কোণের সমান উপপন্ন হইবে ।

অতএব ছজটটড পঞ্চভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট
ও ইহা যে সমবাহু, তাহা উপপন্ন হইয়াছে এবং কথগঘাঙ
ত্রয়ের উপর অঙ্কিত হইয়াছে । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

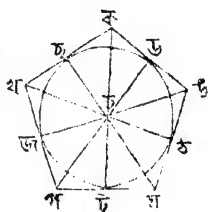
অঃ প্রঃ—২১ । কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর এক সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে ।

১৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

একটী বৃত্ত কোন সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কথংঘাট্ট কোন সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ ; একটী বৃত্ত কথংঘাট্ট পঞ্চভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

খংঘা এবং গঘাট্ট কোণ
ক্রমে গচ এবং ঘচ রেখা
দ্বারা দ্বিখণ্ড কর ; [১ম, ৯।
এবং ঐ দুই রেখার সম্পাত
বিন্দু চ হইতে চখ, চক, চঙ
রেখা টান ।



খং রেখা গঘাএর সমান বলিয়া, [কল্পনা ।
এবং চগ রেখা চখং ও চঘগ এই দুই ত্রিভুজের সামান্য
ভুজ হওয়াতে,

খং এবং গচ বাহু ক্রমে ঘগ এবং গচ বাহুর সমান,
এবং খংচ কোণ ঘগচ কোণের সমান ; [অঙ্কন ।

অতএব খচ ভূমি ঘচ ভূমির সমান ;

এবং সমান সমান বাহুর সম্মুখস্থ অন্যান্য কোণও ক্রমে
সমান ; [১ম, ৪।

সুতরাং গখচ কোণ গঘচ কোণের সমান ।

আর গঘঙ কোণ গঘচ কোণের দ্বিগুণ বলিয়া,

এবং গঘঙ কোণ গখক কোণের সমান ও গঘচ কোণ গখচ কোণের সমান হওয়াতে,

গখক কোণ গখচ কোণের দ্বিগুণ,

অতএব কখগ কোণ খচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইয়াছে ।

এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, খকঙ এবং কঙঘ কোণ ক্রমে কচ এবং ঙচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড হইয়াছে ।

চ বিন্দু হইতে কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক রেখার উপর চছ, চজ, চট, চঠ, চড লম্ব টান । [১ম, ১২ ।

চগজ কোণ চগট কোণের সমান বলিয়া,

এবং চজগ সম কোণ চটগ সম কোণের সমান হওয়াতে,

চজগ, চটগ এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের দুইটি কোণ ক্রমে অন্যের দুইটি কোণের সমান ;

এবং প্রত্যেকের সমান সমান কোণের সম্মুখস্থ চগ রেখা উভয়েরই সামান্য বাহু ;

এই হেতু তাহাদের অন্যান্য বাহুও ক্রমে সমান ;

অতএব চজ লম্ব চট লম্বের সমান । [১ম, ২৬ ।

এই রূপে চঠ, চড, চছ প্রত্যেকে চজ অথবা চট রেখার সমান উপপন্ন হইবে ;

অতএব চছ, চজ, চট, চঠ, চড এই পাঁচ রেখা পরস্পর সমান, তাহা হইলে চ বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া এই পাঁচটি রেখার কোন একটির প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে সেই বৃত্ত অপর চারিটি রেখারও প্রান্ত দিয়া যাইবে ;

এবং ইহা কথ, খগ, গঘ, ঘঙ এবং ঙক রেখা স্পর্শ করবে,
 কেননা ছ, জ, ট, ঠ এবং ড বিন্দুস্বকোণ সকল প্রত্যেকেই
 সম কোণ, [অঙ্কন।

আর বাসের প্রান্ত হইতে লম্ব টানিলে, তাহা রূত্ত স্পর্শ
 করে; [৩য়, ১৬।

এই হেতু কথ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙক প্রত্যেকেই রূত্ত স্পর্শ
 করিতেছে।

অতএব একটী রূত্ত, সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট
 কথগঘঙ পঞ্চভুজের অন্তর্গত করা হইল। এখানে ইহাই
 সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—২২। একটী নিয়মিত পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের পাঁচটী
 কর্ণ রেখা টানিলে অর্থাৎ একান্তর কোণিক বিন্দুগুলি যোগ
 করিয়া দিলে, তাহাদের সম্পাত দ্বারা যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হইবে,
 তাহাও একটী নিয়মিত পঞ্চভুজ ক্ষেত্র।

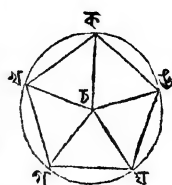
১৪ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দিষ্ট সমবাহু এবং সমান কোণ বিশিষ্ট
 পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের উপর একটী রূত্ত অঙ্কিত করিতে
 হইবে।

কথগঘঙ নির্দিষ্ট সমবাহু এবং সমান কোণ বিশিষ্ট
 পঞ্চভুজ; ইহার উপর একটী রূত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে

খগঘ, গঘঙ এই দুই কোণ ক্রমে
গচ এবং ঘচ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড কর ;
[১ম, ৯।

এবং তাহাদের সম্পাত বিন্দু চ
ইহাতে চখ, চক, চঙ রেখা টান ।



পূর্ব প্রতিজ্ঞার ধারানুসারে উপপন্ন হইবে যে,
গখক, খকঙ, কঙঘ কোণ খচ, কচ, ঙচ রেখা দ্বারা
দ্বিখণ্ড হইয়াছে ।

খগঘ কোণ গঘঙ কোণের সমান বলিয়া,

এবং চগঘ কোণ খগঘ কোণের অর্দ্ধ,

ঙ চঘগ কোণ গঘঙ কোণের অর্দ্ধ হওয়াতে,

চগঘ কোণ চঘগ কোণের সমান ; [স্বতঃ ৭।

অতএব চগ বাহু চঘ বাহুর সমান । [১ম, ৬।

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, চখ, চক,
চঙ প্রত্যেকে চগ অথবা চঘএর সমান ;

অতএব চক, চখ, চগ, চঘ, চঙ এই পাঁচ রেখা
পরস্পর সমান ; তাহা হইলে চকে কেন্দ্র করিয়া এই পাঁচটির
কোন একটির প্রান্ত দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, তাহা অপর
চারিটি রেখার প্রান্ত দিয়া যাইবে, এবং সমবাহু ও সমান
কোণ বিশিষ্ট কখগঘঙ পঞ্চভুজের উপর অঙ্কিত হইবে ।

এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২৩। যদি নির্দিষ্ট পঞ্চভুজের ক এবং গ বিন্দু
আর খ এবং ঘ বিন্দু সংযুক্ত করা যায় এবং ছ বিন্দুতে এই দুই
রেখার সম্পাত হয়, তবে ক, ছ, ঘ বিন্দু দিয়া বৃত্ত অঙ্কিত
করিলে, উহা কখ এবং গঘ রেখা স্পর্শ করিবে ।

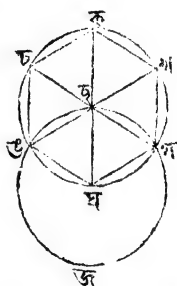
১৫ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

একটী সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট ষড়ভুজ ক্ষেত্র কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কথগঘঙচ কোন নির্দিষ্ট বৃত্ত ; এক সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট ষড় ভুজ ইহার অন্তর্গত করিতে হইবে ।

কথগঘঙচ বৃত্তের ছ কেন্দ্র নির্দেশ কর এবং কছঘ ব্যাস টান ; [৩৪, ১।

য বিন্দুকে কেন্দ্র করিয়া ঘছ রেখার প্রান্ত দিয়া ছঙজগ বৃত্ত অঙ্কিত কর । ঙছ, গছ সংযুক্ত কর ও এই দুই রেখাকে খ এবং চ পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর ; আর কখ, খগ, গঘ, ঘঙ, ঙচ, চক সংযুক্ত করিয়া দাও ।
কথগঘঙচ সম্পাদ্য ষড় ভুজ ।



ছ বিন্দু কথগঘঙচ বৃত্তের কেন্দ্র হওয়াতে ছঙ রেখা দুঘ রেখার সমান ;

আবার য বিন্দু ছঙজ বৃত্তের কেন্দ্র বলিয়া ঘঙ রেখা ঘছ রেখার সমান ;

সুতরাং ছঙ রেখা ঘঙ রেখার সমান, [স্বতঃ ১।

এবং ঙছঘ ত্রিভুজ সমবাহু ;

অতএব ঙছঘ, দুঘঙ, ঘঙচ কোণ পরস্পর সমান,

[১৮, ৫, অনুরূপ।

কিন্তু ত্রিভুজের তিন কোণের সমষ্টি দুই সম কোণের

সমান ; [১ম, ৩২ ।

অতএব ঔচ্ছ্ব দুই সম কোণের তৃতীয়াংশ ।

এই রূপে ঘড়গ কোণ দুই সম কোণের তৃতীয়াংশ উপপন্ন হইবে ।

আর ছগ রেখা ছ বিন্দুতে ঔখ রেখার সহিত সংলগ্ন হওয়াতে ঔচ্ছ্ব এবং গচ্ছ্ব কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান, [১ম, ১৩ ।

এই হেতু অবশিষ্ট গচ্ছ্ব কোণ দুই সম কোণের তৃতীয়াংশ ।

অতএব ঔচ্ছ্ব, ঘড়গ, গচ্ছ্ব কোণ পরস্পর সমান ;

এবং তাহাদের সম্মুখস্থ খচ্ছ্ব, কচ্ছ্ব, চচ্ছ্ব কোণও তাহাদের সমান ; [১ম, ১৫ ।

অতএব ঔচ্ছ্ব, ঘড়গ, গচ্ছ্ব, খচ্ছ্ব, কচ্ছ্ব, চচ্ছ্ব এই ছয় কোণ পরস্পর সমান ।

কিন্তু কেন্দ্রস্থ সমান সমান কোণ সমান সমান চাপের উপর থাকে ; [৩য়, ২৬ ।

অতএব ঔঘ, ঘগ, গধ, ধক, কচ, চঙ এই ছয় চাপ পরস্পর সমান,

এবং সমান সমান চাপের সম্মুখস্থ সরল রেখাও সমান :

[৩য়, ২৯ ।

অতএব এই ছয়টি সরল রেখা পরস্পর সমান ; তাহা হইলে গড়্‌ভুজ ক্ষেত্রটি সমবাহু ।

আর ইহা সমান কোণ বিশিষ্টও বটে :

কেননা, কচ চাপ ঔঘ চাপের সমান হওয়াতে,

উহাদের প্রত্যেকের সহিত কথংঘ চাপ যোগ করিলে,
সমুদয় চকংঘ চাপ সমুদয় কথংঘ চাপের সমান
হইবে। [স্বতঃ ২।

আর চঙঘ কোণ চকংঘ চাপের উপরিস্থিত,
এবং চঙচক কোণ কথংঘ চাপের উপরিস্থিত বলিয়া,
চঙঘ কোণ কচঙ কোণের সমান। [৩য়, ২৭।

এই রূপে উপপন্ন করা যাইতে পারে যে, ষড়্ভুজের
অন্যান্য কোণগুলি প্রত্যেকে চঙঘ বা কচঙ কোণের
সমান ;

সুতরাং এই ষড়্ভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট; এবং ইহা
যে সমবাহু, তাহা পূর্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে; আর ইহা
কথংঘচ রত্নের অন্তর্গত হইয়াছে। এখানে ইহাই
সম্পাদ্য।

অনুমান। রত্নের অন্তর্গত সমবাহু ও সমান কোণ
বিশিষ্ট ষড়্ভুজের একটা বাহু ঐ রত্নের ব্যাসার্ধের সমান।

যদি ক, খ, গ, ঘ, ঙ, চ বিন্দু দিয়া রত্নের স্পর্শক
রেখা টানা যায়, তাহা হইলে পঞ্চভুজ অঙ্কনের ন্যায়
রত্নের উপর ষড়্ভুজও অঙ্কিত হইবে।

আবার পঞ্চভুজ সম্বন্ধে যে প্রণালী অবলম্বন করা
গিয়াছে, তদনুসারে রত্নকে ষড়্ভুজের অন্তর্গত ও উপর
অঙ্কিত করা যাইতে পারে।

অঃ প্রঃ—২৪। প্রমাণ কর যে, নিয়মিত ষড়্ভুজের কোন
একটা ভুজের উপর সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে ষড়্ভুজটি
ত্রিভুজের ছয় গুণ হইবে।

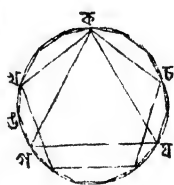
২৫। যদি এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে কঙ, ওগ, গক সংযুক্ত করা যায়, তাহা হইলে কঙগ এক সমবাহু ত্রিভুজ হইবে; এবং ক, ও, গ বিন্দু দিয়া স্পর্শক রেখা টানিলে বৃত্তের উপর এক সমবাহু ত্রিভুজ হইবে।

১৬ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

একটী সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চদশভুজ ক্ষেত্র কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কথগঘ নির্দিষ্ট বৃত্ত; একটী সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চদশভুজ কথগঘ বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

কগ যেন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত এক সমবাহু ত্রিভুজের বাহু, [৪থ, ২।
আর কথ নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজের বাহু, [৪থ, ১১।



অতএব সমুদয় কথগঘচ পরিধি পঞ্চদশ সমান ভাগে বিভক্ত হইলে, কথগ চাপ পরিধির তৃতীয়াংশ হওয়াতে এই চাপে তাহার পাঁচ ভাগ, এবং কথ চাপ সমুদয়ের পঞ্চমাংশ বলিয়া ইহাতে তিন ভাগ থাকিবে;
এই হেতু কথগ এবং কথ চাপের অন্তর খগ চাপে, দুই ভাগ থাকিবে।

খগ চাপ ও বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর,

[৩য়, ৩০।

তাহা হইলে খণ্ড, ঙ্গ চাপ প্রত্যেকে সমুদয় পরিধির পঞ্চদশ অংশ হইবে ।

অতএব খণ্ড, ঙ্গ রেখা টানিয়া এবং তাহাদের সমান সমান সরল রেখা সমস্ত পরিধি ব্যাপ্ত করিয়া রূত্ত মধে স্থাপিত করিলে,

[৪র্থ, ১।

এক সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চদশভুজ রূত্তে অন্তর্গত করা হইবে। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

পঞ্চদশভুজ রূত্তের অন্তর্গত করাতে পরিধি যে যে বিন্দুতে বিভক্ত হইয়াছে, সেই সকল বিন্দু দিয়া যদি রূত্তের স্পর্শক রেখা টানা যায়, তাহা হইলে পঞ্চভুজ অঙ্কনের ন্যায় রূত্তের উপর পঞ্চদশভুজও অঙ্কিত হইবে আবার পঞ্চভুজ সম্বন্ধে যে প্রণালী অবলম্বন করা গিয়াছে তদনুসারে রূত্তকে পঞ্চদশভুজের অন্তর্গত ও উপর অঙ্কিত করা বাইতে পারে।

অঃ প্রঃ—২৬। যদি নিয়মিত পঞ্চদশভুজের কোন একটি কোণ হইতে তাহার সমুখস্থ বাহুর প্রান্তদ্বয় পর্য্যন্ত দুইটি রেখা টানা যায়, তবে এই দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণ চারি সাত কোণের ত্রিশতম অংশ হইবে।

২৭। কোন রূত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের একটি ভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র ঐ রূত্তের অন্তর্গত ষড়্ভুজের একটি ভুজের উপর বর্গক্ষেত্রের তিন গুণ।

২৮। রূত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের তিনটি কোণের বিন্দু দিয়া স্পর্শক রেখা টানিলে তাহাদের সম্মাত দ্বারা যে ত্রিভুজ হইবে, তাহা সমবাহু ও রূত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজের চতুর্গুণ।

২৯। কোন চতুর্ভুজের প্রত্যেক ভুজ ও তৎসংলগ্ন দুইটি বর্জিত ভুজ স্পর্শ করে একত্র চারিটি রূত্ত অঙ্কিত হই

রাছে ; প্রমাণ কর যে, ঐ চারিটি বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া অপর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যাইতে পারে ।

৩০। একটি বৃত্ত এক সমকোণী ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত ও আর একটি বৃত্ত তাহার অন্তর্গত করিলে উহাদের ব্যাসের সমষ্টি সম কোণের দুই পার্শ্বস্থ বাহুর সমষ্টির সমান হইবে ।

৩১। যদি সমবাহু ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে ভূমির উপর লম্ব পাতিত করা যায় ও ভূমিকে ব্যাস স্বরূপ লইয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তবে লম্বটি বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের একটি ভুজের সমান হইবে ।

৩২। একটি বর্গক্ষেত্র ও একটি বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট বৃত্তপাদের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

৩৩। ত্রিভুজের কোন একটি ভুজ ও অপর দুইটি বর্জিত ভুজ স্পর্শ করে, এরূপ বৃত্তের কেন্দ্র স্থির কর এবং প্রমাণ কর যে, এই প্রকারে অঙ্কিত দুইটি বৃত্তের কেন্দ্রযোজক রেখা, এবং ত্রিভুজের বৃত্তদ্বয় মধ্যবর্তী কোণিক বিন্দুর ও ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্তের কেন্দ্রের যোজক রেখা, এই দুইটি পরস্পর লম্ব ।

৩৪। বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজের একটি কোণ দ্বিখণ্ড করিলে, দ্বিখণ্ডকারক রেখা যে বিন্দুতে পরিগিষ্ট ছেদ করে, তাহা সম্মুখস্থ বাহুর দুই প্রান্ত ও বৃত্তের কেন্দ্র হইতে সম-দূরবর্তী ।

৩৫। কণাগম একটি আয়ত ক্ষেত্র ; যদি কণাগ ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্ত, ও এবং চ বিন্দুতে কণা, খগ বাহু স্পর্শ করে এবং ওজ্জ, চছট এই দুই রেখা কণা এবং গম রেখার সমান্তর টানা যায়, তাহা হইলে টজ আয়ত কচজ শঙ্কর সমান হইবে ।

৩৬। একটি কর্ণ রেখার উপর যতগুলি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে, তাহাদের অন্তর্গত বৃত্তগুলির কেন্দ্র দ্বারা যে রেখা উৎপন্ন হয়, তাহা কর্ণ রেখার উপর অঙ্কিত বৃত্তের পরিগিষ্টপাদ হইবে ।

৩৭। কণাগ ত্রিভুজের ক কোণ যদি কণা রেখার দ্বারা দ্বিখণ্ড হয় এবং ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্তের ও কেন্দ্র হইতে

৩৮। একটা বর্গক্ষেত্র কোন সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

৩৯। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যে, উহা দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায় ও কোন নির্দিষ্ট বৃত্ত স্পর্শ করে ।

প্রমাণ কর যে, ঐ বিন্দুদ্বয় হইতে নির্দিষ্ট বৃত্তের বহির্দিকে যত রেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে বৃত্তদ্বয়ের স্পর্শ বিন্দু যোজক দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণ সর্বাপেক্ষা বৃহত্তম ।

৪০। বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত ষড়্ভুজ ক্ষেত্র সেই বৃত্তের উপর অঙ্কিত ষড়্ভুজের তিন চতুর্থাংশ ।

৪১। এক নির্দিষ্ট সরল রেখা কর্ণ স্বরূপ জ্ঞান করিয়া তাহার উপর এমন একটি রম্বস অঙ্কিত করিতে হইবে যে, তাহার দুইটি কোণের সমষ্টি অপর দুই কোণের দ্বিগুণ হয় । এক সম কোণকে কিরূপে সমান তিন খণ্ডে বিভক্ত করা যায়, তাহা ইহা দ্বারা প্রতিপন্ন কর ।

৪২। শূন্য কোণ, তাহার দ্বিখণ্ডকারক রেখা, এবং ভূমি ও অপর দুইটি ভুজ সমষ্টির অন্তর নির্দিষ্ট আছে ;— ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর ।

৪৩। স্থূলকোণী ত্রিভুজের স্থূল কোণ হইতে ভূমি পর্যন্ত এমন একটি রেখা টানিতে হইবে, যাহার উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, ভূমির দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়তের সমান হয় ।

৪৪। সমবাহু ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাস তাহার অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসের দ্বিগুণ ।

৪৫। ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত এবং উহার অন্তর্গত বৃত্তদ্বয়ের কেন্দ্র সংযোজক রেখার দুই প্রান্ত হইতে কোন একটি কোণ পর্যন্ত রেখা টানিলে, যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহা ত্রিভুজের অপর দুই কোণের অন্তরের অর্ধেক ।

৪৬। ত্রিভুজের একটি কোণ ও অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে ।

৪৭। ত্রিভুজের শৃঙ্গ কোণ এবং অন্তর্গত ও উপর অঙ্কিত এই দুই বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

৪৮। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের মধ্যে এমন আটটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহারা পরস্পর স্পর্শ করে এবং প্রত্যেকে নির্দিষ্ট বৃত্ত স্পর্শ করে।

৪৯। কোন নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর একটি নিয়মিত অষ্টভুজ ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

৫০। কোন বৃত্তের অন্তর্গত ও উপর অঙ্কিত দুইটি সম-চতুর্ভুজের প্রত্যেকের এক একটি বাহু লইয়া, একটি আয়ত ক্ষেত্র অঙ্কিত করিলে, তাহা বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত অষ্টভুজের সমান হইবে।

৫১। দুইটি সমান বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিয়াছে, এই দুইটির সাধারণ খণ্ডের অন্তর্গত করিয়া এক সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৫২। কণাগদ চতুর্ভুজ কোন বৃত্তের অন্তর্গত করা গিয়াছে; কদ, খগ বাহু বর্জিত হইয়া ও বিন্দুতে মিলিত হইয়াছে; ঘঙ রেখার চ বিন্দু হইতে চঙ্গ রেখা ওখএর সমান্তর করিয়া টান। এই রেখার উপর যেন জ বিন্দুতে গঘএর সম্পাত হইল; চখ সংযুক্ত কর; এই রেখা বৃত্ত পরিধিকে যেন ছ বিন্দুতে ছেদ করিল; তাহা হইলে ছজ রেখা বর্জিত করিলে পুনরায় পরিধিকে একটি অপরিবর্তনীয় বিন্দুতে ছেদ করিবে।

৫৩। একটি সমবাহু ত্রিভুজ এক্ষেপে কোন বর্গক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে হইবে, যেন ত্রিভুজের শৃঙ্গ একবার একটি ভূজের মধ্য বিন্দুতে ও পুনর্বার উহা বর্গক্ষেত্রের একটি কোণে সংলগ্ন হয়।

৫৪। যত গুণি বর্গক্ষেত্র আর একটি নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে পারা যায়, তন্মধ্যে কোনটি সর্বাপেক্ষা লঘুতম?

৫৫। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা

কোন নির্দিষ্ট বর্গক্ষেত্রের এক কোণ দিয়া যাহা ও দুইটি ভুজ স্পর্শ করে ।

৫৩। প্রমাণ কর যে, ৪র্থ অধ্যায়ের ১০ম প্রস্তাবের চিত্রে অঙ্কিত কগ রেখা, বহু বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত দশভুজ ক্ষেত্রের একটি ভুজের এবং ক্ষুদ্র বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের একটি ভুজের সমান ।

৫৭। যদি θ ত্রিভুজের সগ রেখা চ বিন্দুতে বহু বৃত্ত পরিবিহীন করে, তবে কগচ কোণ খচস কোণের তিনগুণ হইবে ।

৫৮। যদি θ বর্গক্ষেত্রের একটি নিয়মিত পঞ্চভুজ হয়, তবে কখগ, খগক, গঘখ, ঘগক, ও কস এই পাঁচ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান হইবে ।

৫৯। একটি নির্দিষ্ট নিয়মিত পঞ্চভুজের সমান, ও তুল্য উৎপত্তি বিশিষ্ট এক ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

৬০। যদি কোন নিয়মিত পঞ্চভুজের দুইটি কর্ণ রেখা পরস্পর ছিন্ন করে, তবে ঐ দুইএর বহুত্রের অংশগুলি প্রত্যেকে পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের ভুজের সমান হইবে ।

৬১। প্রমাণ কর যে, নিয়মিত ষড়্ভুজের সম্মুখস্থ ভুজ গুলি সমান্তর এবং যদি θ বৃত্তের অন্তর্গত ষড়্ভুজের কোন দুইটি ভুজ অপার দুইটি ভুজের সমান্তর হয়, তবে অবশিষ্ট দুইটি ভুজ সমান্তর হইবে ।

৬২। একটি নিয়মিত ষড়্ভুজ কোন সমবাহু ত্রিভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে । এই ষড়্ভুজ ও ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের অনুপাত স্থির কর ।

৬৩। কোন বৃত্তের অন্তর্গত দ্বাদশভুজের ক্ষেত্রফল ঐ বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের এক ভুজের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান ।

৬৪। কোন নিয়মিত বহুভুজের কখ, গঘ দুইটি একান্তর ভুজ বর্জিত করিলে উহার যেন চ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল; যদি ন বিন্দু বহুভুজের কেন্দ্র হয়, তবে প্রমাণ কর যে, কচগন ক্ষেত্র একটি বৃত্তের অন্তর্গত করা যাইতে পারে ।

৯৫। একটি বৃত্ত কোন ত্রিভুজের অন্তর্গত করা হইয়াছে ; বৃত্ত স্পর্শক তিনটি রেখা দ্বারা এই ত্রিভুজ হইতে আর তিনটি ত্রিভুজ ছেদ করিয়া লইলে তাহাদের ভূজ সমষ্টি প্রথম ত্রিভুজের ভূজ সমষ্টির সমান হইবে।

৯৬। নির্দিষ্ট ভূমির উপর এমন একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ভূমিসংলগ্ন প্রত্যেক কোণ শূন্য কোণের তৃতীয়াংশ হয়।

৯৭। কোন বৃত্তপাদের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের দুই ভূজ বৃত্তপাদের দুই সীমাবোধক দুইটি ব্যাসার্ধ। প্রতিপন্ন কর যে, বর্গক্ষেত্রের কর্ণের মে অংশ বৃত্তপাদের বাহিরে থাকিবে, তাহা বৃত্তপাদের অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্ধের সমান।

৯৮। কোন বৃত্তের অন্তর্গত ষড়্ভুজের এক বাহু বর্ধিত করিয়া অন্তর্গত বর্গক্ষেত্রের ভূজের সমান করিলে, তাহার প্রান্ত হইতে পারিধি পর্যন্ত অঙ্কিত বৃত্তস্পর্শক রেখা, বৃত্তের অন্তর্গত অষ্টভুজ ক্ষেত্রের ভূজের সমান হইবে।

৯৯। কক্ষ, খগ, দুই অসমান বৃত্ত বহির্দিকে পরস্পর স্পর্শ করিতেছে ; কক্ষ, সগ তাহাদের দুইটি সাধারণ স্পর্শক রেখা ; যদি কক্ষ, খগ সংযুক্ত করা যায়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, একটি বৃত্ত কক্ষগ চতুর্ভুজের অন্তর্গত করা যাইতে পারে।

১০। কোন বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের এক বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্র, ব্যাসার্ধের উপর অথবা অন্তর্গত ষড়্ভুজের একটি ভূজের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের তিনগুণ।

১১। একটি বৃত্ত কোন নির্দিষ্ট বৃত্তছেদকের অন্তর্গত করিতে হইবে।

১২। যে ব্যাস বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজের ভূমি দ্বিখণ্ড করে, তাহার এক প্রান্ত হইতে ত্রিভুজের বৃত্তের বাহুর উপর স্পর্শ পাত করিলে ঐ বাহুর দুই অংশ, ত্রিভুজের বাহুদ্বয়ের সমষ্টির ও অন্তরের অর্ধেকের সমান হইবে।

১৩। এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সমান আর একটি ত্রিভুজ, কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৭৪। বৃত্তের অন্তর্গত যে কোন অক্ষভুজ ক্ষেত্রের একান্তর কোণগুলির সমষ্টি, ছয় সম কোণের সমান।

৭৫। সমান সমান তিনটি বৃত্ত পরস্পর স্পর্শ করিতেছে; উহাদের বহির্ভাগে একটি ও মধ্যভাগে আর একটি বৃত্ত এইরূপে অঙ্কিত কর, যে, উহার। প্রত্যেকে ঐ তিনটি বৃত্ত স্পর্শ করে। প্রমাণ কর যে, বহিস্থ বৃত্তের ব্যাসমধ্যবৃত্তের ব্যাসের যোনি গুণ।

৭৬। একটি বৃত্ত কোন ত্রিভুজের অন্তর্গত করিয়া, আর একটি বৃত্ত প্রথম বৃত্তের বহিস্থ ও ত্রিভুজের একটি কোণের মধ্যস্থ ক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৭৭। কোন সমকোণী সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের দুই ভুজে একরূপ করিয়া দুইটি বৃত্তপাদ অঙ্কিত হইয়াছে যে, তাহার। ত্রিভুজের শৃঙ্গে পরস্পর স্পর্শ করিতেছে। যে বৃত্ত ঐ দুইটি পরিবিপাদ ও ত্রিভুজের কর্ণ রেখা স্পর্শ করিলে, তাহার ব্যাসার্ধ কণের অক্ষমাংশ।

৭৮। এমন এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ভূমি সংলগ্ন প্রত্যেক কোণ শৃঙ্গস্থ কোণের অক্ষমাংশ।

৭৯। কোন বৃত্তের অন্তর্গত দশভুজ কেন্দ্রের একান্তর কোণগুলির সমষ্টি আট সম কোণের সমান।

৮০। একটি বৃত্তস কোন সমান্তর ক্ষেত্রে একরূপ করিয়া অঙ্কিত করিতে হইবে যে, তাহার এক একটি কোণ ঐ সমান্তর ক্ষেত্রের এক একটি বাহু বা নির্দিষ্ট বাহুতে সংলগ্ন হয়। প্রতিপন্ন কর যে, এইরূপে অসংখ্য বৃত্তস অঙ্কিত হইতে পারে।

৮১। ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের কেন্দ্র হইতে ভুজগুলির উপর পতিত তিনটি লম্ব নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৮২। এমন এক সমদ্বিবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার ভূমি সংলগ্ন প্রত্যেক কোণ শৃঙ্গস্থ কোণের তৃতীয়াংশ।

৮৩। বৃত্ত পরিধির কোন একটি বিন্দু হইতে বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজের বাহুগুলির উপর লম্বপাত করিলে তিনটি লম্বের অপর প্রান্ত গুলি একই সরল রেখাতে থাকিবে।

৮৪। কথঞ্চিৎ ত্রিভুজ এক বৃত্তের অন্তর্গত করা হইয়াছে; ঐ বিন্দু দিয়া একটি স্পর্শক রেখা টান ও কণ বাহুকে বর্জিত কর। ঐ বিন্দুতে যেন কণ ও স্পর্শক রেখার সম্পাত হইল। প্রমাণ কর যে, কথঞ্চিৎ কোণ ঐক্য কোণের সমান।

৮৫। ত্রিভুজের এক একটি ভুজ ও অপর দুইটি বর্জিত ভুজ স্পর্শ করে, এরূপ করিয়া যদি তিনটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তাহা হইলে তাহাদের কেন্দ্র যোজক রেখা গুলি ত্রিভুজের কৌণিক বিন্দু দিয়া যাইবে।

৮৬। পূর্ব প্রতিজ্ঞার ন্যায় অঙ্কিত তিনটি বৃত্তের কেন্দ্র গুলি ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্তের কেন্দ্রের সহিত সংযুক্ত করিলে, তিনটি যোজক রেখা ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্ত পরিধি দ্বারা বিখণ্ড হইবে।

৮৭। সমকোণী ত্রিভুজের কণ ও অপর দুই বর্জিত ভুজ স্পর্শ করে, এরূপ একটি বৃত্ত অঙ্কিত হইয়াছে; প্রমাণ কর যে, এই বৃত্তের ব্যাস ত্রিভুজের ভুজ সমষ্টির সমান।

৮৮। সমকোণী ত্রিভুজের কণ রেখা ও অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্ধ নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজ অঙ্কিত কর।

৮৯। সমবাহু ত্রিভুজের ভুজ গুলির উপর তিনটি বর্গক্ষেত্র অঙ্কিত হইয়াছে। এই তিন ক্ষেত্রের মধ্য বিন্দু গুলি সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহার ক্ষেত্রফলের সহিত সমবাহু ত্রিভুজের ক্ষেত্রফলের তুলনা কর।

৯০। একটি বর্গ ক্ষেত্র আর একটি বর্গক্ষেত্রের অন্তর্গত করিলে তাহাদের ক্ষেত্রফলের অন্তর, বহিস্ বর্গক্ষেত্রের কোন একটি ভুজ যে দুই অংশে বিভক্ত হয়, তাহাদের অন্তর্গত দ্বিগুণিত আয়তের সমান।

৯১। একটি রম্বস কোন নির্দিষ্ট চতুর্ভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৯২। কথঞ্চিৎ চতুর্ভুজ নিরমিত অষ্টভুজ ক্ষেত্র এক বর্গ ক্ষেত্রের অন্তর্গত করা হইয়াছে; প্রমাণ কর যে, অষ্টভুজ ক্ষেত্র, কথঞ্চিৎ ও চতুর্ভুজের দ্বিগুণিত আয়তের সমান।

৯৩। ৪র্থ অধ্যায়ের দশম প্রতিজ্ঞার চিত্রে স্ব ও চ ইহার দুই বৃত্তের ছেদ বিন্দু। প্রমাণ কর যে, কচ রেখা গম্বীর সমান্তর।

৯৪। উক্ত চিত্রে যদি ছ বিন্দু ক্ষুদ্র বৃত্তের কেন্দ্র হয়, তবে কহয় কোণ কঘছ ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন অত্যেক কোণের দ্বিগুণ হইবে।

৯৫। একটি নিয়মিত দ্বাদশভুজ কোন বৃত্তের অন্তর্গত কর; এবং প্রমাণ কর যে, উহার ক্ষেত্রফল বৃত্তের অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজের একটি বাহুর উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রের সমান।

৯৬। সম্ভূজ ক্ষেত্রের বাহুগুলি উভয় দিকে বর্দ্ধিত করিলে যে সাতটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহাদের শীর্ষ কোণের সমষ্টি স্থির কর।

৯৭। একটি নির্দিষ্ট নিয়মিত বহুভুজ কোন বৃত্তের অন্তর্গত করা হইয়াছে; ইহার দ্বিগুণ সংখ্যক ভূমি বিশিষ্ট আর একটি নিয়মিত বহুভুজ কি রূপে এই বৃত্তের অন্তর্গত অথবা উহার উপর অঙ্কিত করা যাইতে পারে?

৯৮। স সংখ্যক ভুজ বিশিষ্ট এক নির্মিত বহুভুজের মধ্যস্থ কোন বিন্দু হইতে যদি ভুজগুলির উপর লম্ব পাত করা যায়, তবে তাহাদের সমষ্টি, অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্ধের সংখ্যক হইবে।

৯৯। কোন নিয়মিত বহুভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ = ক, এবং অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্ধ = খ; বাহু সংখ্যার দ্বিগুণ কিন্তু বাহুগুলির পরিমাণ সমষ্টিতে সমান, এরূপ আর এক বহুভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ = চ, তাহার অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসার্ধ = ছ; প্রমাণ কর যে, ছ = ই (ক + খ) এবং চ^২ = কছ।

১০০। কোন বহুভুজ, দুইটি এককেন্দ্রিক বৃত্তের একটির অন্তর্গত ও অন্যটির উপর অঙ্কিত হইয়াছে; প্রমাণ কর যে, ক্ষেত্রটি নিয়মিত বহুভুজ।

৪র্থ অধ্যায় ।

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট ।

চতুর্থ অধ্যায়ের প্রতিজ্ঞাগুলি চারিটি সাধারণ প্রতিজ্ঞার বিশেষ বিশেষ উদাহরণ স্বরূপ ; সে চারিটি প্রতিজ্ঞা এই,—

(১) এক সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র কোন বৃত্তের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

(২) এক সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র কোন বৃত্তের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে ।

(৩) এক বৃত্ত কোন সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

(৪) এক বৃত্ত কোন সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের উপর অঙ্কিত করিতে হইবে ।

ইউক্লিড এতটী সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র অপর কোন সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের অন্তর্গত বা উপর অঙ্কিত করিবার দৃষ্টান্ত স্বরূপ কোন প্রতিজ্ঞা লেখেন নাই ।

অতিবিক্ত সংজ্ঞা—সমান সমান ভুজ ও কোণ বিশিষ্ট বহুভুজ ক্ষেত্রকে নিয়মিত বহুভুজ বলে । ঐ সংজ্ঞার অনুসারে ক্ষেত্রগুলির নাম হইয়া থাকে ; যথা, ত্রুভুজ, চতুর্ভুজ, পঞ্চভুজ, ষড়্ভুজ, সপ্তভুজ, অষ্টভুজ, দশভুজ, দ্বাদশভুজ, পঞ্চদশভুজ, ইত্যাদি ।

৩য় প্র। ক, খ, গ বিন্দু হইতে যে তিনটি স্পর্শক রেখা টানা হইয়াছে, তাহার পরস্পর সংলগ্ন হইবে কি না, ইহা জিজ্ঞাসা করা যাইতে পারে । কিন্তু সহজেই এই প্রশ্নের সমাধা হয় ;—যথা, কখ সংযুক্ত করিয়া দাও ; তাহা হইলে টকড এবং টখড কোণ একত্রে দুই সম কোণের সমান বলিয়া (৩। ১৮), খকড এবং কখড এই দুই কোণ দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহৎ ; এই হেতু টক এবং টখ বর্জিত হইলে সংলগ্ন হইবে (স্বতঃ ১২) ;

এইরূপে প্রতিপন্ন করা যাইতে পারে যে, তিনটি স্পর্শক রেখাটি পরস্পর সংলগ্ন হইবে।

৪র্থ প্র। ইউক্লিডের ৪র্থ প্রতিজ্ঞা নিম্ন লিখিত প্রতিজ্ঞার অন্তর্গত;—

এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে যে, তাহা তিনটি নির্দিষ্ট সরল রেখা স্পর্শ করে।

যদি এই তিনটি সরল রেখা এক বিন্দু দিয়া যায় কিম্বা সকলেই পরস্পর সমান্তর হয়, তবে প্রতিজ্ঞাটি সিদ্ধ হইতে পারে না।

চতুর্থ প্রতিজ্ঞার নির্দিষ্ট ত্রিভুজটি যদি সমবাহু হয়, তাহা হইলে অন্তর্গত বৃত্তের কেন্দ্র ত্রিভুজের তিনটি কোণের সমদূরবর্তী হইবে। অতএব সমবাহু ত্রিভুজের উপরি অঙ্কিত ও তাহার অন্তর্গত বৃত্তের কেন্দ্র একই বিন্দু এবং একের ব্যাসার্দ্ধ অপরের ব্যাসার্দ্ধের দ্বিগুণ।

৫ম প্র। এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তি স্থলে লিখিত হইয়াছে যে, দুইটি ভুজের দ্বিগুণ করক রেখা ঘচ এবং ওচ বর্ধিত হইলে চ বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে। ইউক্লিড এই অংশটি লেখেন নাই। ইহা বিখ্যাত ইংলণ্ডীয় পণ্ডিত গিম্‌সন স্বকৃত ইউক্লিডের জ্যামিতির অনবাদে লিখিয়া দিয়াছেন। অন্য প্রকারেও ইহা প্রমাণ করা যাইতে পারে; যথা, ঘঙ সংযুক্ত করিয়া দাও। তাহা হইলে ওসচ, ঘঙচ কোণ একত্রে কসচ, কঙচ কোণ অপেক্ষা ন্যূন হওয়াতে, তাহার দুই সম কোণ অপেক্ষা ন্যূন; অতএব ঘচ, ওচ সংলগ্ন হইবে। (স্বতঃ ১১)

১০ম প্র। এই প্রতিজ্ঞাসিদ্ধ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ যে দুই সম কোণের পঞ্চমাংশ, তাহা সহজেই প্রতীত হইবে; সুতরাং ইহার অর্ধেক এক সম কোণের পঞ্চমাংশ। অতএব এক সম কোণকে জ্যামিতির ধারানুসারে পাঁচ সমান ভাগে বিভক্ত করা যাইতে পারে।

১৬শ প্র। বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত পঞ্চভুজ ও ষড়ভুজের বাহুর সমান দুইটি রেখা পরিধির কোন এক বিন্দু হইতে

এরূপে টান, যেন ঐ রেখাদয় বৃত্তে স্থাপিত হয়, তাহা হইলে তাহাদের মধ্যস্থ চাপ পরিধির ত্রিংশ ভাগের এক ভাগ, অর্থাৎ পঞ্চদশ ভাগের দ্বিগুণ হইবে ।

ইউক্লিডের প্রতিজ্ঞাগুলি দ্বারা সহজেই প্রতিপন্ন হইবে যে, একটি বৃত্ত কোন নিয়মিত ক্ষেত্রের অন্তর্গত করিলে ও আবার একটি বৃত্ত উহার উপর অঙ্কিত করিলে এই দুই বৃত্ত এক-কেন্দ্রিক হইবে ।

চতুর্থ অধ্যায়ে যে সকল প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ হইয়াছে, তদ্বারা অনায়াসে বোধ হইবে যে,—

(১) বৃত্ত পরিধিকে ৩, ৬, ১২, ২৪ ইত্যাদি সমান অংশে ভাগ করা যায় ।

(২) বৃত্ত পরিধিকে ৪, ৮, ১৬, ৩২ ইত্যাদি সমান অংশে ভাগ করা যায় ।

(৩) বৃত্ত পরিধিকে ৫, ১০, ২০, ৪০ ইত্যাদি সমান অংশে ভাগ করা যায় ।

(৪) বৃত্ত পরিধিকে ১৫, ৩০, ৬০, ১২০ ইত্যাদি সমান অংশে ভাগ করা যায় ।

অতএব যে যে সংখ্যা লিখিত হইল, তত্তৎসংখ্যক ভুজ বিশিষ্ট নিয়মিত বহুভুজ ক্ষেত্র বৃত্তের অন্তর্গত ও উহার উপর অঙ্কিত করিতে পারা যায় ।

এতদ্ব্যতীত অন্য কোন নিয়মিত বহুভুজ জ্যামিতির প্রচলিত রীত্যানুসারে অঙ্কিত করা সহজ নয় । অদ্যাবদি কেহই এই প্রণালী অবলম্বন করিয়া নিয়মিত সপ্তভুজ অঙ্কিত করিতে পারেন নাই ।

প্রথম অধ্যায়ের ৩২শ প্রতিজ্ঞার প্রথম অনুমানের সাহায্যে নিয়মিত ক্ষেত্র যাত্রেরই প্রত্যেক কোণের পরিমাণ স্থির হইতে পারে ; আবার কোন নিয়মিত বহুভুজের মধ্য বিন্দুর সহিত কোণিক বিন্দুগুলি যোগ করিয়া দিলে মধ্য বিন্দুতে যে সকল কোণ উৎপন্ন হয়, তাহাদের প্রত্যেকের পরিমাণ নির্ণয় করিতে হইলে, চারি সম কোণকে ভুজসংখ্যা দিয়া ভাগ করিলেই হইবে ।

সমতলস্থ কোন বিন্দুতে চারি সম কোণ অঙ্কিত করিলেই স্থান পরিপূরণ হয়, অন্য কোন উপায়ে হয় না, ইহা বিদ্যার্থীদিগের সহজেই বোধগম্য হইবে। এই সিদ্ধান্ত অবলম্বন করিয়া গ্রীস দেশীয় মহাপণ্ডিত পিথাগোরাস স্থির করিয়াছেন যে, সমবাহু ত্রিভুজ, সমচতুর্ভুজ, ও নিয়মিত ষড়্ভুজ ব্যতীত অন্য কোন ক্ষেত্র দ্বারা স্থান পরিপূরণ হইতে পারে না; কেননা, সমবাহু ত্রিভুজের একটি কোণের ছয় গুণ, সমচতুর্ভুজের একটি কোণের চারি গুণ, ও নিয়মিত ষড়্ভুজের একটি কোণের তিন গুণ লইলে চারি সমকোণের সমান হয়।

৫ম অধ্যায় ।

সংজ্ঞা ।

১। দুইটি রাশির মধ্যে ক্ষুদ্রতর রাশিটী রহস্তরের অংশ বলিলে বুঝিতে হইবে যে, ক্ষুদ্রতর রাশি রহস্তরের অপবর্তন* বা পরিমাপক; অর্থাৎ রহস্তর রাশি কোন নির্দিষ্ট বার ক্ষুদ্রতর রাশি দ্বারা ব্যাপ্ত। (৫ম অধ্যায়ের পরিশিষ্ট দেখ।)

২। দুইটি রাশির মধ্যে রহস্তর রাশিটী ক্ষুদ্রতরের অপবর্ত্য বা গুণিত† বলিলে বুঝিতে হইবে যে, রহস্তর রাশি ক্ষুদ্রতর দ্বারা পরিমেষ; অর্থাৎ রহস্তর রাশি কোন নির্দিষ্ট বার ক্ষুদ্রতর রাশিকে দ্বারাণ করিতেছে।

৩। সমজাতীয় দুই রাশির পরিমাণ লইয়া পরস্পর যে সম্বন্ধ, তাহাকে নিম্পত্তি‡ বা অনুপাত বনে।

৪। দুই রাশি অনুপাতী বলিলে বুঝিতে হইবে যে, ক্ষুদ্রতর রাশিকে গুণন দ্বারা বর্দ্ধিত করিলে অপর রাশি অপেক্ষা রহস্তর হয়। (পরিশিষ্ট দেখ।)

* Measure—পরস্পর ভাজিতযোর্বযোর্বঃ শেষস্তযোঃ
ম্যাদপবর্তনং সং । ভাস্করাচার্য্যঃ ।

† Multiple.

‡ একরাশেঃ সমজাতীয়ান্যরাশিনা প্রমাণায়কঃ সম্বন্ধোনিম্পত্তিঃ ।
যোগদ্ব্যানকৃত্য ক্ষেত্রতত্ত্বদীপিকা ।

৫। চারি রাশির মধ্যে প্রথম ও তৃতীয়ের কোন সম-
 গুণিত এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থের কোন সমগুণিত কল্পনা
 করিলে যদি এরূপ প্রতীত হয় যে, প্রথমের গুণিত
 দ্বিতীয়ের গুণিত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে তৃতীয়ের গুণিতও
 চতুর্থের গুণিত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, আর প্রথমের
 গুণিত দ্বিতীয়ের গুণিতের সমান হইলে তৃতীয়ের গুণিতও
 চতুর্থের গুণিতের সমান হয়, এবং প্রথমের গুণিত
 দ্বিতীয়ের গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে তৃতীয়ের গুণিতও
 চতুর্থের গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথমোক্ত
 চারি রাশির মধ্যে, প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত যে সম্বন্ধ,
 তৃতীয়ের চতুর্থের সহিতও সেই সম্বন্ধ বলা যায়।
 (পরিশিষ্ট দেখ।)

৬। রাশি সকল পরস্পর একই নিষ্পত্তি বিশিষ্ট
 হইলে, তাহাদিগকে সমানুপাতী বলে। চারি রাশি
 সমানুপাতী হইলে তাহাদিগের সম্বন্ধ প্রকাশ করিবার
 এই রূপ রীতি আছে;—যথা প্রথমের, দ্বিতীয়ের সহিত যে
 নিষ্পত্তি বা অনুপাত, তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত সেই
 নিষ্পত্তি বা অনুপাত; অথবা প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত
 বা সম্বন্ধ, তৃতীয়ে চতুর্থে সেই অনুপাত বা সম্বন্ধ; কিম্বা
 সংক্ষেপে, প্রথমে দ্বিতীয়ে যে রূপ তৃতীয়ে চতুর্থে সেই রূপ।

৭। পঞ্চম সংজ্ঞার ধারানুসারে চারি রাশির সম-
 গুণিত কল্পনা করিলে যদি দ্বিতীয়ের গুণিত অপেক্ষা
 প্রথমের গুণিত বৃহত্তর হয়, কিন্তু চতুর্থের গুণিত অপেক্ষা
 তৃতীয়ের গুণিত বৃহত্তর না হয়, তবে তৃতীয়ের চতুর্থের

সহিত নিষ্পত্তির পরিমাণ অপেক্ষা, প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত নিষ্পত্তির পরিমাণ বৃহত্তর, এবং প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত নিষ্পত্তির পরিমাণ অপেক্ষা তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত নিষ্পত্তির পরিমাণ ক্ষুদ্রতর বলা যায় ।

৮। যে সকল অনুপাতের সমতা আছে, তাহাদের নাম সমানুপাত বা সমান নিষ্পত্তি ।

৯। সমানুপাতে অন্তত তিনটি রাশি থাকে । (পরিশিষ্ট দেখ ।)

১০। তিন রাশি সমানুপাতী হইলে প্রথমের তৃতীয়ের সহিত অনুপাতকে প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত অনুপাতের দ্বিগুণ বা দ্বিগাত বলা যায় ।

১১। চারি রাশি ক্রমাগত সমানুপাতী হইলে প্রথমের চতুর্থের সহিত অনুপাতকে, প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত অনুপাতের দ্বিগুণ বা দ্বিগাত বলা যায় ; এবং সমানুপাতের রাশি সংখ্যা এক এক করিয়া বৃদ্ধি করিলে অনুপাতও তদনুসারে চতুর্গুণ বা চতুর্গাত প্রভৃতি এক এক ঘাত বৃদ্ধি হইবে । (পরিশিষ্ট দেখ ।)

সম্মিলিত অনুপাতের সংজ্ঞা ।

(ক) কতিপয় এক জাতীয় রাশির মধ্যে প্রথমের শেষের সহিত অনুপাতকে, প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত, দ্বিতীয়ের তৃতীয়ের সহিত, তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত ইত্যাদি শেষ রাশি পর্য্যন্ত যাবতীয় অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত বলে ; যথা, যদি ক, খ, গ, ঘ এক জাতীয় চারি রাশি হয়, তাহা

হইলে এরূপ কথিত হইয়া থাকে যে, ক ও ঘএর অনুপাতটী, ক ও খএর, খ ও গএর এবং গ ও ঘএর অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত; অথবা, ক ও খএর অনুপাত, খ ও গএর অনুপাত এবং গ ও ঘএর অনুপাতের সম্মিলনে, ক ও ঘএর অনুপাতের উৎপত্তি হইয়াছে ।

আবার কএর খএর সহিত যে অনুপাত, ঙএর চএর সহিত সেই অনুপাত ও খএর গএর সহিত যে অনুপাত, ছএর জএর সহিত সেই অনুপাত এবং গএর ঘএর সহিত যে অনুপাত, টএর ঠএর সহিত সেই অনুপাত এইরূপ হইলে, এই সংজ্ঞানুসারে কএর ঘএর অনুপাত, যে যে অনুপাতের সম্মিলনে উৎপন্ন হইয়াছে, তাহার ঙ ও চএর, ছ ও জএর, এবং ট ও ঠএর অনুপাতের সমান । সংক্ষেপে প্রকাশ করিতে হইলে ইহা কথিত হয় যে, ক ও ঘএর অনুপাত ঙ ও চ, ছ ও জ, এবং ট ও ঠএর অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত ।

এই রূপে, যদি এমন কল্পনা করা যায় যে, কএর ঘএর সহিত যে অনুপাত, ডএর ঢএর সহিত সেই অনুপাত, তাহা হইলে সংক্ষেপে বলা যাইতে পারে যে, ডএর ঢএর সহিত অনুপাত ঙ ও চএর, ছ ও জএর, এবং ট ও ঠএর অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত ।

১২। সমানুপাতের পূর্ববর্তী গুলিকে অর্থাৎ প্রথম, তৃতীয় ইত্যাদি রাশিকে, পরস্পর সবর্গীয় বা সমভাবী বলা যায়; পরবর্তীদিগকে অর্থাৎ দ্বিতীয়, চতুর্থ ইত্যাদি রাশিকে পরস্পর সবর্গীয় বলিয়া থাকে ।

রাশিদিগের সমানুপাতিত্ব পরিবর্তন না করিয়া স্থান অথবা পরিমাণ পরিবর্তন করিবার নিমিত্ত জামিতি-বেত্তারা নিম্ন লিখিত কতিপয় বিশেষ পারিভাষিক শব্দ ব্যবহার করিয়া থাকেন ।

১৩। একান্তর সমানুপাত—চারি রাশি সমানুপাতী হইলে যখন এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, প্রথমের তৃতীয়ের সহিত যে অনুপাত, দ্বিতীয়ের চতুর্থের সহিত সেই অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে । (৫ম, ১৬প্র ।)

১৪। বিলোম বা ব্যাৎক্রম সমানুপাত—চারি রাশি সমানুপাতী হইলে, যখন এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, দ্বিতীয়ের প্রথমের সহিত যে অনুপাত, চতুর্থের তৃতীয়ের সহিত সেই অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে । (৫ম, ১৭প্র ।)

১৫। যোগ সমানুপাত—চারি রাশি সমানুপাতী হইলে, যখন এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, প্রথম ও দ্বিতীয়ের যোগফলের দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থের যোগফলের চতুর্থের সহিত সেই অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে । (৫ম, ১৮প্র ।)

১৬। অন্তর সমানুপাত—চারি রাশি সমানুপাতী হইলে যখন এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, দ্বিতীয় অপেক্ষা প্রথমের আধিক্যের দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, চতুর্থ অপেক্ষা তৃতীয়ের আধিক্যের চতুর্থের সহিত সেই

অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে ।
(৫ম, ১৭প্র ।)

১৭। অন্তর বিলোম* সমানুপাত—চারি রাশি সমানুপাতী হইলে যখন এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, প্রথমের দ্বিতীয় অপেক্ষা প্রথমের আধিক্যের সহিত যে অনুপাত, তৃতীয়ের চতুর্থ অপেক্ষা তৃতীয়ের আধিক্যের সহিত সেই অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে ।
(৫ম, ৬প্র ।)

১৮। সমদূর সমানুপাত—দুইটির অধিক কতগুলি রাশি এক স্থানে থাকিলে ও আর তত গুলি রাশি অপর স্থানে থাকিলে, যখন এক শ্রেণীস্থ দুইটা দুইটা ক্রমে অপর শ্রেণীস্থ দুইটা দুইটার সহিত সমানুপাতী হয় এবং এপ্রকার সিদ্ধান্ত হয় যে, এক শ্রেণীর প্রথমের উহার শেষ রাশির সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীর প্রথমের তাহার শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে । বিভিন্ন ক্রম অনুসারে দুইটা দুইটা করিয়া রাশি লওয়াতে এই সমানুপাত দুই প্রকার হইয়াছে, যথা;—

১৯। ক্রম সমানুপাত—এক শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির উহার দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীস্থ প্রথমের তাহার দ্বিতীয়ের সহিত সেই অনুপাত হইলে ও

* যত্র প্রথমস্য প্রথমদ্বিতীয়যোরন্তরেণ নিষ্পত্তির্দ্রষ্টে তত্র অন্তরবিলোমনিষ্পত্তিজ্যেযা । জগমাথকৃতং রেখাগণিতং ।

প্রথম শ্রেণীস্থ দ্বিতীয়ের উহার তৃতীয়ের সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীস্থ দ্বিতীয়ের তাহার তৃতীয়ের সহিত সেই অনুপাত হইলে এবং ক্রমাগত এই রূপ হইলে, যখন পূর্ব সংজ্ঞার ন্যায় সিদ্ধান্ত করা যায়, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে । (৫ম, ২২প্র।)

২০। ব্যতিক্রম সমানুপাত—এক শ্রেণীস্থ প্রথম রাশির উহার দ্বিতীয় রাশির সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীস্থ একোন শেষ রাশির তাহার শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত হইলে, ও প্রথম শ্রেণীস্থ দ্বিতীয়ের উহার তৃতীয়ের সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীস্থ দ্বান শেষ রাশির তাহার একোন শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত হইলে, আর প্রথম শ্রেণীস্থ তৃতীয়ের উহার চতুর্থের সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীস্থ ত্রান শেষ রাশির তাহার দ্বান শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত হইলে, এবং এই রূপে ধারাবাহিক ব্যতিক্রমে রাশি গুলি সমানুপাতী হইলে, যখন অষ্টাদশ সংজ্ঞার ন্যায় সিদ্ধান্ত করা যায়, তখন এই পরিভাষা ব্যবহৃত হইয়া থাকে । (৫ম, ২৩প্র।)

স্বতঃ সিদ্ধ ।

১। এক রাশি বা সমান সমান রাশির সম অপবর্ত্তা গুলি পরস্পর সমান ।

২। যে যে রাশির সম অপবর্ত্তা একই রাশি বা সমান সমান রাশি, তাহার পরস্পর সমান ।

৩। বৃহত্তর রাশির অপবর্ত্তা, ক্ষুদ্রতর রাশির তৎসম অপবর্ত্তা অপেক্ষা বৃহত্তর ।

৪। যে রাশির অপবর্ত্তা অন্য রাশির তৎসম অপবর্ত্তা হইতে বৃহত্তর, সেই রাশিটা অপর রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর ।

১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যদি কতিপয় রাশি যথাক্রমে তৎসংখ্যক অন্য কতিপয় রাশির সমগুণিত হয়, তবে তদ্ব্যতীত কোন একটা রাশি স্থায় অংশের যে পরিমাণে গুণিত, প্রথমোক্ত সমস্ত রাশি গুলি অপর সমুদয় রাশির সেই পরিমাণে গুণিত হইবে ।

কথ, গঘ ইত্যাদি কতিপয় রাশি যথাক্রমে ৬, ৮ ইত্যাদি তৎসংখ্যক অন্য কতিপয় রাশির সমগুণিত; তাহা হইলে কথ রাশি ৬র যে পরিমাণে গুণিত, একত্র করিলে কথ ও গঘ, একত্রকৃত ৬ ও ৮এর সেই পরিমাণে গুণিত হইবে ।

ক ছ থ

গ জ ঘ

৬-

কথ রাশি ৬র যে গুণিত, গঘ রাশি ৮এর সেই গুণিত হওয়াতে, কথতে ৬র সমান বত গুলি রাশি আছে, ৮এর সমান ততগুলি রাশি গঘতে থাকিবে ।
কথকে এরূপে ভাগ কর, যেন কছ, ছথ প্রত্যেক অংশ ৬র

সমান হয় ; এবং গযকে এরূপে ভাগ কর, যেন গজ, জয এতাকে চএর সমান হয় ।

তাহা হইলে কছ, ছথ রাশি গুলির সংখ্যা গজ, জয রাশি গুলির সংখ্যার সমান হইবে ।

আবার কছ রাশি গুর ও গজ রাশি চএর সমান হওয়াতে, একত্রকৃত কছ ও গজ একত্রকৃত ঙ ও চএর সমান হইবে । [স্বতঃ ।

এই রূপে ছথ রাশি গুর সমান ও জয রাশি চএর সমান হওয়াতে, একত্রকৃত ছথ ও জয একত্রকৃত ঙ ও চএর সমান হইবে ।

এই হেতু কথতে গুর সমান যতগুলি রাশি আছে, ঙ ও চএর সমান ততগুলি রাশি কথ ও গযতে থাকিবে । অতএব কথ রাশি গুর যে গুণিত, একত্র করিলে কথও গয, ঙ ও চএর সেই গুণিত হইবে । সুতরাং যদি কতিপয় রাশি ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

দীক্ষা উপঃ। ক, খ, গ ইত্যাদি কতিপয় রাশি এবং চ, ছ, জ ইত্যাদি আর কতিপয় রাশি, $ক = সচ$, $খ = সছ$, $গ = সজ$,
 $\therefore ক + খ + গ = সচ + সছ + সজ = স(চ + ছ + জ)$;

‘ $\therefore ক \div চ = স$; আবার $(ক + খ + গ) \div (চ + ছ + জ) = স$:

‘ $\therefore ক \div চ = (ক + খ + গ) \div (চ + ছ + জ)$ অর্থাৎ ক রাশি চএর যে গুণিত, $(ক + খ + গ)$, $(চ + ছ + জ)$ এর সেই গুণিত ।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের যে পরিমাণে গুণিত, যদি তৃতীয় রাশি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত হয় আর পঞ্চম রাশি দ্বিতীয়ের যে পরিমাণে গুণিত, ষষ্ঠ রাশি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত হয়, তবে প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টি দ্বিতীয়ের যে পরিমাণে গুণিত হইবে, তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত হইবে ।

প্রথম রাশি কথ দ্বিতীয় রাশি গএর যে পরিমাণে গুণিত, তৃতীয় রাশি ঘঙ চতুর্থ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত ; আবার পঞ্চম রাশি খছ দ্বিতীয় রাশি গএর যে পরিমাণে গুণিত, ষষ্ঠ রাশি ঙ্জ চতুর্থ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত ; তাহা হইলে প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টি কছ, দ্বিতীয় রাশি গএর যে গুণিত, তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টি ঘজ, চতুর্থ রাশি চএর সেই গুণিত হইবে ।

ক খ ছ

ঘ ঙ্জ

কথ রাশি গএর যে গুণিত, ঘঙ রাশি চএর সেই গুণিত হওয়াতে, কথতে গএর সমান যত গুলি রাশি আছে, ঘঙতে চএর সমান তত গুলি রাশি থাকিবে ।

এই রূপে খছত গএর সমান যত গুলি রাশি আছে,
উজতে চএর সমান তত গুলি রাশি থাকিবে ।

এই হেতু সমস্ত কছত গএর সমান যত রাশি আছে,
সমস্ত ঘজত চএর সমান তত রাশি থাকিবে ।

অতএব কছ রাশি গএর যে গুণিত, ঘজ রাশি চএর সেই
গুণিত, অর্থাৎ প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টি কছ রাশি গএর
যে গুণিত, তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টি হজ রাশি চএর সেই
গুণিত । অতএব প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের ইত্যাদি ।
এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অনু । ইহা হইতে অনায়াসে প্রতীত হইবে যে,
কতিপয় রাশি কথ, খছ, ছজ প্রত্যেকে গএর যে গুণিত,
যদি ঘঙ, ওট, টঠ যথাক্রমে চএর সেই পরিমাণে গুণিত
হয়, তবে সমস্ত কজ রাশি গএর যে পরিমাণে গুণিত
সমস্ত ঘঠ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত হইবে ।

ক খ ছ জ ঘ ও ট ঠ

গ-

বীড়ঃ উপঃ । ক, খ, গ, ঘ, ঙ, চ ছয়টি রাশি; ক=সখ
গ=সঘ, ও=হখ, চ=হঘ ;

∴ ক + ও = সখ + হখ = (স + হ)খ ; গ + চ = সঘ + হঘ
= (স + হ)ঘ ∴ (ক + ও) ÷ খ = স + হ এবং (গ + চ) ÷ ঘ
= স + হ ।

* অনু । যদি ক=শট, খ=সট, গ=হট ইত্যাদি এবং
চ=শঠ, ছ=সঠ, জ=হঠ ইত্যাদি হয়, তবে ক+খ+গ
=(শ+স+হ)ট এবং চ+ছ+জ=(শ+স+হ)ঠ অর্থাৎ
ক+খ+গ+ইত্যাদি টএর যে গুণিত, চ+ছ+জ+ইত্যাদি
ঠএর সেই গুণিত ।

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের যে পরিমাণে গুণিত, যদি তৃতীয় রাশি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত হয় এবং প্রথম ও তৃতীয় রাশির সমগুণিত কল্পনা করা যায়, তবে এই দুইটি গুণিতের একটি দ্বিতীয়ের ও অন্যটির চতুর্থের সমগুণিত হইবে ।

প্রথম রাশি ক দ্বিতীয় রাশি খএর যে গুণিত, তৃতীয় রাশি গ চতুর্থ রাশি ঘএর সেই গুণিত ; ক ও গএর সমগুণিত উচ ও ছজ কল্পনা কর ; তাহা হইলে উচ, খএর যে গুণিত, ছজ রাশি ঘএর সেই গুণিত হইবে ।

উ ট চ

ছ ঠ জ

ক—

গ—

খ—

ঘ—

উচ, কএর যে গুণিত, ছজ, গএর সেই গুণিত হওয়াতে, উচতে কএর সমান যত গুলি রাশি আছে, ছজতে গএর সমান তত গুলি রাশি থাকিবে ।

উচকে এরূপে ভাগ কর যে, প্রত্যেক অংশ উট, টচ, কএর সমান হয় এবং ছজকে এরূপে ভাগ কর যে, প্রত্যেক অংশ ছঠ, ঠজ, গএর সমান হয় ;

তাহা হইলে উট, টচ, এই সকল রাশি গুলির সংখ্যা ছঠ, ঠজ, এই রাশি গুলির সংখ্যার সমান হইবে ।

আবার ক, খএর যে গুণিত, গ রাশি ঘএর সেই গুণিত

হওয়াতে,

[কম্পনা ।

এবং উট, কএর সমান, ও ছঠ, গএর সমান বলিয়া,

উট, খএর যে গুণিত, ছঠ রাশি ঘএর সেই গুণিত ;

এইরূপে টচ, খএর যে গুণিত, ঠজ রাশি ঘএর সেই গুণিত ; এবং উচ ও ছজতে ক ও গএর সমান আরও অধিক রাশি থাকিলে এইরূপ হইত ।

অতএব প্রথম রাশি উট দ্বিতীয় রাশি খএর যে গুণিত, তৃতীয় রাশি ছঠ চতুর্থ রাশি ঘএর সেই গুণিত হওয়াতে,

এবং পঞ্চম রাশি টচ দ্বিতীয় রাশি খএর যে গুণিত, ষষ্ঠ রাশি ঠজ চতুর্থ রাশি ঘএর সেই গুণিত বলিয়া,

প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টি উচ, দ্বিতীয় রাশি খএর যে গুণিত তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টি ছজ, চতুর্থ রাশি ঘএর সেই গুণিত ;

[৫ম, ২ ।

অতএব প্রথম রাশি ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । ক = মথ, গ = সদ .: হক = হমথ এবং হগ = হসদ অর্থাৎ খ ও ঘ প্রত্যেকে হক ও হগ রাশিতে হস বার আছে ।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

প্রথম রাশির দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, যদি তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত সেই অনুপাত হয় আর যদি প্রথম ও তৃতীয়ের কোন সমগুণিত এবং দ্বিতীয়ের ও চতুর্থের কোন সমগুণিত কম্পনা করা যায়, তবে

প্রথমের গুণিতে দ্বিতীয়ের গুণিতে যে অনুপাত
তৃতীয়ের গুণিতে চতুর্থের গুণিতে সেই অনুপাত
হইবে।

প্রথম রাশি কতে দ্বিতীয় রাশি খতে যে অনুপাত
তৃতীয় রাশি গতে চতুর্থ রাশি ঘতে সেই অনুপাত : ক ও
গএর কোন সমগুণিত ঙ ও চ, এবং খ ও ঘএর কোন
সমগুণিত ছ ও জ কল্পনা কর; তাহা হইলে উতে হতে
যে অনুপাত, চতে জতে সেই অনুপাত হইবে।

ট—	ড—
ঙ—	ছ—
ক—	খ—
গ—	ঘ—
চ—	জ—
ট—	চ—

ঙ ও চএর কোন সমগুণিত ট ও ঠ, এবং ছ ও জএর কোন
সমগুণিত ড ও ঢ কল্পনা কর।

অনন্তর, ঙ যে পরিমাণে কএর গুণিত, চ সেই পরি-
মাণে গএর গুণিত হওয়াতে,

আর ঙ ও চএর সমগুণিত ট ও ঠ কল্পিত হইয়াছে বলিয়া,
ট, কএর যে গুণিত ঠ, গএর সেই গুণিত হইবে। [৫ম, ৩।]

এই কারণে ড, খএর যে গুণিত ঢ, ঘএর সেই গুণিত হইবে।

আবার কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত
হওয়ায়, [কল্পনা।]

আর ট ও ঠ এই দুই রাশি ক ও গ এর কোন সমগুণিত
এবং ড ও ঢ এই দুই রাশি খ ও ঘ এর কোন সমগুণিত
কম্পিত হইয়াছে বলিয়া,

ট রাশি ড অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঠ ও ঢ অপেক্ষা
বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর
হইবে ;

[৫ম, সং ৫ ।

কিন্তু ট ও ঠ এই দুই রাশি ঙ ও চ এর সমগুণিত, এবং
ড ও ঢ এই দুই রাশি ছ ও জ এর সমগুণিত ;

[অঙ্কন ।

সুতরাং ঙ রাশির ছ এ সহিত যে অনুপাত, চ রাশির
জ এর সহিত সেই অনুপাত ;

[৫ম, সং ৫ ।

অতএব প্রথম রাশির দ্বিতীয়ের সহিত ইত্যাদি ।
এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অনু । চারি রাশি সমানুপাতী হইলে প্রথম ও
তৃতীয়ের সমগুণিত দ্বিতীয় ও চতুর্থের সহিত সমানুপাতী
আর প্রথম ও তৃতীয় রাশি দ্বিতীয় ও চতুর্থের সমগুণিতের
সহিত সমানুপাতী হইবে ।

এই প্রতিজ্ঞাতে যেরূপ সমগুণিত কম্পিত হইয়াছে,
সেই পদ্ধতি অবলম্বন করিলে প্রতিপন্ন হইবে যে, ট রাশি
ক এর যে গুণিত, ঠ রাশি গ এর সেই গুণিত ।

এবং কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ হওয়াতে,
আর ক ও গ এর কোন সমগুণিত ট ও ঠ, এবং খ ও ঘ এর
কোন সমগুণিত ছ ও জ কম্পিত হইয়াছে বলিয়া,

ট রাশি ছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঠ ও জ অপেক্ষা বৃহত্তর,
সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর

হইবে;

[৫ম, সং ৫

কিন্তু ট ও ঠ এই দুই রাশি ঙ ও চএর সমগুণিত, [অঙ্কন
এবং ছ ও জ এই দুই রাশি থ ও ঘএর সমগুণিত ; .

অতএব ঙর থএর সহিত যে অনুপাত, চএর ঘএর সহিত
সেই অনুপাত । [৫ম, সং ৫

অন্য সমানুপাতদ্বিও এই রূপে প্রতিপন্ন হইতে পারে।

বীজঃ উপঃ । ক : খ :: গ : ঘ অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} \therefore \frac{ক}{খ} \times \frac{স}{হ}$
 $= \frac{গ}{ঘ} \times \frac{স}{হ} \therefore স ক : হ খ :: স গ : হ ঘ ।$

অনু। যদি হ = ১ হয়, তবে $\frac{ক}{খ} \times স = \frac{গ}{ঘ} \times স$;

$\therefore স ক : খ :: স গ : ঘ$; যদি স = ১ হয়, তবে $\frac{ক}{খ} \times \frac{১}{হ} = \frac{গ}{ঘ} \times \frac{১}{হ}$;

$\therefore ক : হ খ :: গ : হ ঘ ।$

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক রাশি অন্য কোন রাশির যে পরিমাণে গুণিত,
জাহার এক ভাগ যদি অপরের এক ভাগের সেই
পরিমাণে গুণিত হয়, তবে সমুদয় রাশি সমুদয়ের যে
পরিমাণে গুণিত, একের অবশিষ্ট অন্যের অবশিষ্টের
সেই পরিমাণে গুণিত হইবে ।

কথ রাশি গঘএর যে গুণিত, কথএর এক ভাগ কঙ,
গঘএর এক ভাগ গচএর সেই পরিমাণে গুণিত ; তাহা
হইলে সমস্ত কথ সমস্ত গঘএর যে গুণিত, অবশিষ্ট ঙথ
অবশিষ্ট চঘএর সেই গুণিত হইবে ।

ছ ক ঙ খ

গ চ ঘ

কঙ রাশি গচএর যে গুণিত, কছ রাশিকে চঘএর সেই গুণিত কল্পনা কর ;

তাহা হইলে কঙ রাশি গচএর যে গুণিত, ঙ্গ রাশি গঘএর সেই গুণিত হইবে ; [৫ম, ১ ।

কিন্তু কখ রাশি গঘএর যে গুণিত, কঙ রাশি গচএর সেই গুণিত ; [কল্পনা ।

অতএব কখ রাশি গঘএর যে পরিমাণে গুণিত, ঙ্গ রাশি গঘএর সেই পরিমাণে গুণিত ;

এই হেতু ঙ্গ রাশি কখএর সমান । [৫ম, স্মৃতঃ ১ ।

এই দুই সমান বস্তু হইতে কঙ বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট কছ অবশিষ্ট ঙ্গএর সমান হইবে । [স্মৃতঃ ৩ ।

অনন্তর, কঙ রাশি গচএর যে গুণিত, কছ রাশি চঘএর সেই গুণিত হওয়ারূপে, [অঙ্কন ।

এবং বছ রাশি ঙ্গএর সমান বলিয়া,

কঙ রাশি গচএর যে গুণিত, ঙ্গ রাশি চঘএর সেই গুণিত ; কিন্তু কখ যে পরিমাণে গঘএর গুণিত, কঙ সেই পরিমাণে গচএর গুণিত ; [কল্পনা ।

অতরাং কখ যে পরিমাণে গঘএর গুণিত, ঙ্গ সেই পরিমাণে চঘএর গুণিত ; অতএব এক রাশি যে পরিমাণে ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বাক্যঃ উপঃ। ক ও খ দুইটা রাশি এবং গ ও ঘ যথাক্রমে
ভাগদেব এক এক ভাগ। আর ক = সখ, গ = সঘ;
∴ ক - গ = সখ - সঘ = স(খ-ঘ)।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন দুই রাশি যদি অন্য দুই রাশির সমগুণিত
হয়, আবার প্রথম দুইটির এক এক অংশ যদি অন্য
দুইটির সমগুণিত হয়, তাহা হইলে অবশিষ্ট গুলিও
তাহাদের সমান বা সমগুণিত হইবে।

কখ ও গঘ দুই রাশি ঙ ও চএর সমগুণিত এবং কখ
ও গঘএর এক এক অংশ কছ ও গজ, ঙ ও চএর
সমগুণিত; তাহা হইল ছখ, জঘ দুইটা অবশিষ্টও,
ঙ এবং চএর সমান বা সমগুণিত হইবে।

ক	ছ	খ		ঙ—
ট	গ	জ	ঘ	চ—

প্রথমত যদি ছখ, ঙর সমান হয়, তবে জঘও চএর
সমান হইবে। গট রাশি চএর সমান কর।

পরে, কছ রাশি ঙর যে পরিমাণে গুণিত, গজ রাশি
চএর সেই পরিমাণে গুণিত হওয়ায়, [কম্পনা।

এবং ছখ রাশি ঙর সমান ও গট চএর সমান বলিয়া,
কখ রাশি ঙর যে গুণিত, টজ রাশি চএর সেই গুণিত
হইবে;

দ্বিত্ব কখ, ঙর যে গুণিত, গঘ চএর সেই গুণিত, [কং।

এই হেতু টজ রাশি চএর যে গুণিত, গঘ রাশি চএর সেই গুণিত ।

অতএব টজ রাশি গঘএর সমান ; [৫ম, স্বতঃ ১।

প্রত্যেক হইতে সাধারণ অংশ গজ বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট টগ অবশিষ্ট জঘএর সমান হইবে ; [স্বতঃ ৩।

কিন্তু টগ রাশি চএর সমান ;

অতএব জঘ রাশি চএর সমান ।

অনন্তর, যদি ছথ, ওর গুণিত হয়,

তবে জঘও চএর সেই পরিমাণে গুণিত হইবে ।

ক ছ থ

ঙ—

ট গ জ ঘ

চ—

ছথ রাশি ওর যে পরিমাণে গুণিত, টগকে চএর সেই পরিমাণে গুণিত কর ।

পরে, কছ রাশি ওর যে পরিমাণে গুণিত, গজ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত হওয়াতে, [কম্পনা ।

ও ছথ রাশি ওর যে পরিমাণে গুণিত টগ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত বলিয়া, [অঙ্কন ।

কথ রাশি ওর যে পরিমাণে গুণিত, টজ রাশি চএর সেই পরিমাণে গুণিত ; [৫ম, ২ ।

কিন্তু কথ, ওর যে গুণিত, গঘ রাশি চএর সেই গুণিত, [কম্পনা ।

এই হেতু টজ রাশি চএর যে গুণিত, গঘ রাশি চএর সেই গুণিত ; [৫ম, স্বতঃ ১ ।

অতএব টিগ রাশি গহ্যএর সমান :

প্রত্যেক হইতে সাধারণ খণ্ড গজ বিয়োগ করিলে,

অবশিষ্ট টিগ অবশিষ্ট জহ্যএর সমান হইবে। [স্বতঃ ৩।

আবার ছখ রাশি ঙুর যে গুণিত, টিগ রাশি চএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন।

এবং টিগ রাশি জহ্যএর সমান বলিয়া,

ছখ, ঙুর যে গুণিত জহ্যও চএর সেই গুণিত ; অতএব কোন দুই রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। যদি ক=সগ, খ=সস হয়, এবং কএর এক অংশ চ=হগ ও খএর এক অংশ ছ=হস হয়, তবে ক-চ = সগ-হগ=(স-হ)গ; খ-ছ=(স-হ)স; যদি স-হ ১ হয়, তবে ক-চ=গ এবং খ-ছ=স হইবে।

ক প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

চারি রাশির মধ্যে প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত যদি সেই অনুপাত হয়, তবে প্রথমটী দ্বিতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে তৃতীয়টী চতুর্থ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান, ও ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

প্রত্যেক রাশির কোন সমগুণিত কল্পনা কর ; এখানে যেন ঐ সমগুণিত প্রত্যেকের দ্বিগুণ লওয়া গেল।

তাহা হইলে যদি দ্বিগুণিত প্রথমরাশি দ্বিগুণিত দ্বিতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে দ্বিগুণিত তৃতীয়রাশি দ্বিগুণিত চতুর্থ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; [৫ম, সং ৫।

কিন্তু যদি প্রথম রাশি দ্বিতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথমের দ্বিগুণ দ্বিতীয়ের দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; ও তাহা হইলে তৃতীয়ের দ্বিগুণ চতুর্থের দ্বিগুণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ;

অতএব তৃতীয় রাশি চতুর্থ রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর ।

এইরূপে প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের সমান বা ক্ষুদ্রতর হইলে তৃতীয় রাশিও চতুর্থের সমান বা ক্ষুদ্রতর হইবে ; অতএব চারি রাশির মধ্যে ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বাক্য উপঃ । ক : খ :: গ : ঘ অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$

∴ ক > খ হইলে, গ > ঘ হইবে ; ক = খ হইলে, গ = ঘ হইবে ; আর ক < খ হইলে, গ < ঘ হইবে ।

খ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

চারি রাশি সমানুপাতী হইলে, বিলোমেও সমানুপাতী হইবে ।

কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে যেন সেই রূপ সমস্ত ; তাহা হইলে বিলোমে খতে কতে যে রূপ ঘতে গতে সেই রূপ হইবে ।

ক — খ — গ — ঘ —
ছ — ঙ — জ — চ —

খ ও ঘএর কোন সমগুণিত ঙ ও চ এবং ক ও গএর কোন সমগুণিত ছ ও জ কল্পনা কর ।

প্রথমত সেন, ও রাশি ছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইল; তবে ছ রাশি ও অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

পরে, কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ হওয়াতে, [কম্পনা।

এবং প্রথম ও তৃতীয়ের কোন সমপুণ্ডিত ছ ও জ কম্পিত হইরাছে বলিয়া,

এবং দ্বিতীয় ও চতুর্থের কোন সমপুণ্ডিত ও ও চ কম্পিত হওয়ায়,

আর ছ রাশি ও অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হওয়াতে,

জ রাশি চ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, [৫ম, সং ৫।

অর্থাৎ চ রাশি জ অপেক্ষা বৃহত্তর।

সুতরাং ও রাশি ছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে চ রাশি জ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

এই রূপে ও রাশি ছএর সমান হইলে চ রাশি জএর সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে।

কিন্তু ও ও চ, খ ও ঘএর কোন সমপুণ্ডিত, এবং ছ ও জ এই দুই রাশি ফ ও গএর কোন সমপুণ্ডিত :

এই হেতু খতে কতে যে রূপ, ঘতে গতে সেই রূপ : অতএব চারি রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। $k : x :: g : y$, অথবা $\frac{k}{x} = \frac{g}{y} \therefore 1 : \frac{x}{y}$

$\therefore 1 : \frac{g}{x}$; অথবা $\frac{x}{k} = \frac{y}{g}$; অর্থাৎ $x : k :: y : g$ ।

গ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

প্রথম রাশি দ্বিতীয়ের যে পরিমাণে গুণিত বা যত অংশ, তৃতীয় রাশি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত বা তত অংশ হইলে প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, তৃতীয়ে চতুর্থ সেই অনুপাত হইবে ।

প্রথমত ক রাশি খএর যে গুণিত, গ রাশি ঘএর সেই গুণিত হইলে, কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত হইবে ।

ক—— খ—— গ—— ঘ——
 ঙ—— ছ—— চ—— জ——

ঙ ও চ এই দুই রাশিকে ক ও গএর কোন সমগুণিত এবং ছ ও জ এই দুই রাশিকে খ ও ঘএর কোন সমগুণিত কল্পনা কর ।

পরে, ক রাশি খএর যে গুণিত, গ রাশি ঘএর সেই গুণিত বালিয়া, [কল্পনা ।

আর ঙ রাশি কএর যে গুণিত, চ রাশি গএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন ।

ঙ, খএর যে গুণিত, চ রাশি ঘএর সেই গুণিত, [৫ম, ৩ ।

অর্থাৎ ঙ ও চ এই দুই রাশি খ ও ঘএর সমগুণিত,

আর ছ ও জ, খ ও ঘএর সমগুণিত; [অঙ্কন ।

এই হেতু যদি ছ, খএর যে গুণিত, ঙ তদপেক্ষা বৃহত্তর পরিমাণে খএর গুণিত হয়, তবে জ রাশি ঘএর যে গুণিত, চ তদপেক্ষা বৃহত্তর পরিমাণে ঘএর গুণিত হইবে,

অর্থাৎ যদি ছ অপেক্ষা উ রহত্তর হয়, জ অপেক্ষা চ রহত্তর হইবে ।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে, যে উ, ছ এর সমান হইলে চ রাশি জ এর সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

কিন্তু উ, চ এই দুই রাশি ক ও গ এর সমগুণিত এবং ছ ও জ এই দুই রাশি খ ও ঘ এর সমগুণিত কল্পিত হইয়াছে । এই হেতু কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত ।

অনন্তর, যদি ক রাশি খ এর যে অংশ, গ রাশি ঘ এর সেই অংশ হয়, তাহা হইলে কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত হইবে ।

ক—— খ—— গ—— ঘ—

ক রাশি খ এর যে অংশ, গ রাশি ঘ এর সেই অংশ হওয়াতে, খ রাশি ক এর যে গুণিত, ঘ রাশি গ এর সেই গুণিত হইবে ; তাহা হইলে পূর্ব উপপাদ্য অনুসারে খতে কতে যে অনুপাত, ঘতে গতে সেই অনুপাত ; সুতরাং বিনোমে, কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত ; [৫ম, খ ।

অতএব প্রথম রাশি ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । ক = সখ ; গ = সঘ \therefore ক \div খ = স এবং গ \div ঘ = স \therefore ক \div খ = গ \div ঘ অথবা ক : খ :: গ : ঘ ।

আবার, ক = $\frac{খ}{স}$ এবং গ = $\frac{ঘ}{স}$ \therefore স ক = খ, স গ = ঘ ;

অথবা স = খ \div ক এবং স = ঘ \div গ \therefore খ \div ক = ঘ \div গ

অথবা খ : ক :: ঘ : গ ; \therefore ক : খ :: গ : ঘ । [৫ম, খ ।

ঘ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

চারি রাশি যদি সগানুপাতী হয় ও প্রথম রাশি যদি দ্বিতীয়ের গুণিত বা কোন অংশ হয়, তবে তৃতীয় রাশি চতুর্থের সেই পরিমাণে গুণিত বা তত অংশ হইবে ।

কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত ।
প্রথমত, ক রাশি খএর কোন গুণিত হইলে গ রাশিও ঘএর সেই গুণিত হইবে ।

ক——	খ——	গ——	ঘ——
	ঙ——		চ——

কএর সমান করিয়া ঙ অঙ্কিত কর ; এবং ক অথবা ঙ রাশি খএর যে পরিমাণে গুণিত, চকে ঘএর সেই পরিমাণে গুণিত কর ।

পরে, কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ বলিয়া,
[কল্পনা ।

আর দ্বিতীয় রাশি খ ও চতুর্থ রাশি ঘএর কোন সমগুণিত ঙ ও চ কল্পিত হওয়াতে,

কতে ঙতে যে রূপ, গতে চতে সেই রূপ ; [৫ম, ৪, অনু ।
কিন্তু ক রাশি ঙর সমান, [অঙ্কন ।

এই হেতু গ রাশি চএর সমান ; [৫ম, কং ।

আর ক রাশি খএর যে গুণিত, চ রাশি ঘএর সেই গুণিত হওয়াতে,
[অঙ্কন ।

ক রাশি খএর যে গুণিত, গ রাশি ঘএর সেই গুণিত হইয়াছে ।

অনন্তর, যদি ক রাশি খএর কোন নির্দিষ্ট অংশ হয়, তবে গ রাশিও ঘএর সেই অংশ হইবে ।

ক—— খ—— গ—— ঘ——
কতে খতে যে রূপ, গত ঘতে সেই রূপ হওয়াতে, বিলোমে, খতে কতে যে রূপ ঘতে গতে সেই রূপ [৫ম, খ । কিন্তু ক রাশি খএর কোন অংশ, [কপ্পনা ।

অর্থাৎ খ রাশি কএর কোন গুণিত ;

তাহা হইলে পূর্ব উপপত্তি অনুসারে ঘও সেই পরিমাণে গএর গুণিত হইবে ;

অর্থাৎ ক রাশি খএর যত অংশ, গ রাশি ঘএর তত অংশ; অতএব চারি রাশি ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । প্রথমত, যদি ক = সখ হয়, তবে গ = সম হইবে ।

ক = সখ \therefore $\frac{ক}{খ} = স$, কিন্তু $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} \therefore \frac{গ}{ঘ} = স$, অর্থাৎ গ = সম ।

আবার, ক = $\frac{খ}{স}$ হইলে, $\frac{ক}{খ} = \frac{১}{স}$; কিন্তু $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} \therefore \frac{গ}{ঘ} = \frac{১}{স}$,

অর্থাৎ গ = $\frac{ঘ}{স}$ ।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সমান সমান রাশির অন্য কোন রাশির সহিত একই অনুপাত হইয়া থাকে ; এবং এক রাশির, সমান সমান রাশির সহিত অনুপাত একই হয় ।

ক ও খ যেন সমান সমান রাশি এবং গ অন্য কোন রাশি, তাহা হইলে ক ও খ এই দুইএর প্রত্যেক রাশির, গএর সহিত একই অনুপাত হইবে ; এবং গএর, ক ও খ এই দুই রাশির প্রত্যেকের সহিত একই অনুপাত হইবে ।

ক—

খ—

গ—

ঘ—

ঙ—

চ—

ক ও খএর কোন সমগুণিত ঘ ও ঙ এবং গএর কোন গুণিত চ কল্পনা কর ।

পরে, ঘ রাশি কএর যে গুণিত, ঙ রাশি খএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন ।

এবং ক রাশি খএর সমান বলিয়া, [কল্পনা ।

ঘ রাশি ঙর সমান ; [৫ম, স্বতঃ ১ ।

এই হেতু ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তা হইলে ঙও চ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ;

কিন্তু ঘ ও ঙ এই দুই রাশি ক ও খএর কোন সমগুণিত, এবং চ রাশি গএর কোন গুণিত ; [অঙ্কন ।

সুতরাং কতে গতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ ।

[৫ম, সং ৫ ।

* আবার গতে কতে যে রূপ, গতে খতে সেই রূপ হইবে ; কেননা, পূর্বপ্রকার চিত্র অঙ্কিত করিলে সেই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, ঘ রাশি ঙর সমান ;

অতএব যদি চ রাশি ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে চও

ঙ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

কিন্তু চ রাশি গএর কোন গুণিত এবং ঘ ও ঙ, ক ও খএর সমগুণিত । [অঙ্কন ।

সুতরাং গতে কতে যে রূপ, গতে খতে সেই রূপ ;

[৫ম, সং ৫ ।

অতএব সমান সমান রাশির ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । $k = \frac{a}{b} : k \div g = \frac{a}{b} \div g$ অর্থাৎ $k : a :: g : b$;
আবার $g \div k = g \div \frac{a}{b} \therefore g : k :: g : \frac{a}{b}$ ।

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই অসমান রাশির মধ্যে বৃহত্তরের অন্য কোন রাশির সহিত অনুপাত, ক্ষুদ্রতরের সেই রাশির সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; এবং কোন এক রাশির দুই অসমান রাশির মধ্যে ক্ষুদ্রতরের সহিত অনুপাত, বৃহত্তরের সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

কথ, খগ দুই অসমান রাশির মধ্যে কথ বৃহত্তর এবং ঘ অন্য কোন রাশি । কথএর ঘএর সহিত অনুপাত, খগএর ঘএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে এবং ঘএর খগএর সহিত অনুপাত, ঘএর কথএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

(১ম চিত্র)		(২য় চিত্র)		(৩য় চিত্র)	
ঙ		ঙ		ঙ	
চ	ক	চ	ক	চ	ক
ছ	গ	ছ	গ	ছ	গ
ট	খ	ট	খ	ট	খ
ড	য	ড	য	ড	য

কগ, গখ এই দুইএর মধ্যে যে রাশিটি অন্য অপেক্ষা বৃহত্তর নয়, তাহা যদি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর না হয়, (১ম চিত্র) তাহা হইলে কগ, গখএর দ্বিগুণ করিয়া উচ, চছ অঙ্কিত কর, কিন্তু বগ, গখএর মধ্যে যেটি অন্য অপেক্ষা বৃহত্তর নয়, তাহা যদি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হয়, (২য় এবং ৩য় চিত্র) তবে সেই রাশিটি কগই হউক বা গখই হউক, গুণন দ্বারা তাহাকে বৃদ্ধি করিয়া ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর করা নাইতে পারে। অতএব তাহাকে ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর করিয়া বৃদ্ধি কর ও অপর রাশিকেও তত গুণ বৃদ্ধি কর। এই রূপে বৃদ্ধি করিয়া উচ রাশি কগএর যে গুণিত চছ রাশিকে গখএর সেই গুণিত করিলে উচ ও চছ প্রত্যেকেই ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

আর যে পর্য্যন্ত না ঘএর কোন গুণিত চছ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তত ক্ষণ প্রত্যেক চিত্রে ঘএর দ্বিগুণ ত্রিগুণ ইত্যাদি করিয়া জ, ট প্রভৃতি গুণিত লইতে থাক। এই

রূপে গুণিত লওয়াতে ঠ যেন চছ অপেক্ষা প্রথম রহন্তর
হইল এবং যএর অন্যান্য গুণিত মধ্যে ট রাশি যেন ঠএর
অব্যবহিত ক্ষুদ্রতর হইল ।

পরে, যএর গুণিত গুলির মধ্যে ঠ রাশি সর্বত্র চছ
অপেক্ষা রহন্তর হওয়াতে, [অঙ্কন ।

উহার অব্যবহিত পূর্ববর্তী গুণিত ট রাশি চছ অপেক্ষা
রহন্তর নহে ;

অর্থাৎ চছ, ট অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে ;

আর ওচ রাশি কগএর যে গুণিত, চছ রাশি গখএর
সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন ।

চছ রাশি গখএর যে গুণিত, ওছ রাশি কখএর সেই
গুণিত, [৫ম, ১ ।

অর্থাৎ ওছ ও চছ এই দুই রাশি কখ ও গখএর সমগুণিত ।

আবার চছ রাশি যে ঠ অপেক্ষা লঘুতর নয়, ইহা
প্রতিপন্ন হইয়াছে বলিয়া,

এবং ওচ রাশি য অপেক্ষা রহন্তর হওয়াতে, [অঙ্কন ।

সমস্ত ওছ রাশি ট ও যএর সমষ্টি অপেক্ষা রহন্তর ;

কিন্তু ট ও যএর সমষ্টি ঠএর সমান ; [অঙ্কন

এই হেতু ওছ রাশি ঠ অপেক্ষা রহন্তর,

কিন্তু চছ রাশি ঠ অপেক্ষা রহন্তর নহে ;

আর ওছ ও চছ এই দুই রাশি যে কখ ও খগএর সমগুণিত
তাহা প্রতিপন্ন হইয়াছে ;

এবং ঠ রাশি যএর কোন গুণিত, [অঙ্কন

এই হেতু কখএর যএর সহিত অনুপাত, খগএর যএর

সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর । [৫ম, সং ৭ ।

অনন্তর, ঘএর খগএর সহিত অনুপাত ঘএর কখএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

পূর্বরূপে অঙ্কন দ্বারা প্রতিপন্ন হইবে যে, ঠ রাশি চছ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু ঙ্গছ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে ;

আর ঠ রাশি ঘএর কোন গুণিত, [অঙ্কন ।

এবং চছ ও ঙ্গছ এই দুই রাশি গখ ও কখএর সমগুণিত ;

সুতরাং ঘএর গখএর সহিত অনুপাত ঘএর কখএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর ; [৫ম, সং ৭ ।

অতএব দুই অসমান রাশির ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজ : উপ : । যদি ক, খ দুই অসমান রাশি ও গ অন্য কোন রাশি হয় আর যদি $k > x$ হয়, তবে $k \div g > x \div g$,
 $\therefore k : g > x : g$ । আবার, $g \div k < g \div x$;
 $\therefore g \div k < g \div x$ অথবা $g : x > g : k$ ।

৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যে সকল রাশি অন্য কোন রাশির সহিত একই অনুপাত বিশিষ্ট, তাহারা পরস্পর সমান এবং কোন রাশি যে সকল রাশির সহিত একই অনুপাত বিশিষ্ট, তাহারা পরস্পর সমান ।

প্রথমত ক ও খ এই দুই রাশি প্রত্যেকে গএর সহিত একই অনুপাত বিশিষ্ট হইলে, ক রাশি খএর সমান হইবে ।

ক—

ঘ—

গ—

চ—

খ—

ঙ—

বদি সমান না হয়, তাহা হইলে একটি অবশ্যই অন্যটি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; ক যেন দুইএর মধ্যে বৃহত্তর হইল। তাহা হইলে পূৰ্ব্ব প্রতিজ্ঞার রীতি অনুসারে প্রতিপন্ন হইবে যে, ক ও খএর কোন সমগুণিত এবং গএর কোন গুণিত এক্ষেপে কল্পনা করা যাইতে পারে যে, কএর গুণিত, গএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে, কিন্তু খএর গুণিত, গএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না।

সেই রূপে ঘ ও ঙ এই দুই রাশি যেন ক ও খএর সমগুণিত এবং চ রাশি যেন গএর কোন গুণিত কল্পিত হইল, অতএব ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু ঙ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে।

পরে, কতে গতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ বলিয়া, [কল্পনা।

এবং ঘ ও ঙ এই দুই রাশি ক ও খএর কোন সমগুণিত এবং চ রাশি গএর কোন গুণিত কল্পিত হওয়ায়,

আর ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, [অঙ্কন।

ঙ রাশিও চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; [এম, সং ৫।

কিন্তু ঙ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে; [অঙ্কন।

অতএব এরূপ হওয়া অনস্বব;

এই হেতু ক ও খ অসমান নয়, অর্থাৎ সমান।

অনন্তর, গতে কতে যে অনুপাত, গতে খতে সেই অনুপাত হইলে, ক রাশি খএর সমান হইবে। যদি সমান না হয়, একটী রূহত্তর হইবে; ক যেন রূহত্তর হইল; তাহা হইলে ৮ম প্রতিজ্ঞার রীতি অনুসারে প্রতিপন্ন হইবে যে, গএর কোন গুণিত চ এবং ক ও খএর কোন সমগুণিত ঘ ও ঙ একরূপে কল্পনা করা যাইতে পারে যে, চ রাশি ঙ অপেক্ষা রূহত্তর হইবে কিন্তু ঘ অপেক্ষা রূহত্তর হইবে না।

এক্ষণে, গতে কতে যে অনুপাত, গতে খতে সেই অনুপাত হওয়াতে, [কল্পনা।

এবং প্রথমের গুণিত চ দ্বিতীয়ের গুণিত ঙ অপেক্ষা রূহ-
ত্তর বলিয়া, [অঙ্কন।

তৃতীয়ের গুণিত চ চতুর্থের গুণিত ঘ অপেক্ষা রূহত্তর;
[৫ম, সং ৫।

কিন্তু চ রাশি ঘ অপেক্ষা রূহত্তর নহে; [অঙ্কন।

অতএব একরূপ হওয়া অসম্ভব।

সুতরাং ক ও খ অসমান নহে; অর্থাৎ সমান;

অতএব যে সকল রাশি ইত্যাদি। এখানে ইহাট
উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক : গ :: খ : গ অথবা $\frac{ক}{গ} = \frac{খ}{গ} \therefore ক = খ।$

আবার, গ : ক :: গ . খ অথবা $\frac{গ}{ক} = \frac{গ}{খ} \therefore \frac{১}{ক} = \frac{১}{খ} \therefore ক = খ।$

১০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই রাশির মধ্যে যে রাশির কোন এক রাশির সহিত অনুপাত অন্য রাশির তাহার সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর, সেই রাশিটীও বৃহত্তর ; এবং কোন এক রাশির দুইএর মধ্যে যাহার সহিত অনুপাত অন্যের সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর, সেই রাশিটী ক্ষুদ্রতর ।

প্রথমত, কএর গএর সহিত অনুপাত, খএর গএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ক রাশি খ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

ক——

ঘ——

গ——

চ——

ঙ——

ট——

কএর গএর সহিত অনুপাত, খএর গএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, ক ও খএর কোন সমগুণিত ও গএর কোন গুণিত একরূপে কল্পনা করা যাইতে পারে যে, কএর গুণিত গএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে, কিন্তু খএর গুণিত গএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না ।

[৫ম, সং ৭ ।

য ও ঙ যেন ক ও খএর সেইরূপ কোন সমগুণিত ও চ রাশি গএর কোন গুণিত । তাহা হইলে ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর কিন্তু ঙ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে ;

অতএব ঘ রাশি ঙ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

আবার ঘ ও ঙ রাশি ক ও খএর সমগুণিত হওয়াতে,

এবং ঘ রাশি ঙ অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া,

ক রাশি থ অপেক্ষা বৃহত্তর । [৫ম, সূত্র: ৯।

অনন্তর, গ এর থ এর সহিত অনুপাত, গ এর ক এর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, থ রাশি ক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে।

কারণ, গ এর কোন গুণিত চ এবং থ ও ক এর কোন সমগুণিত ঙ ও ঘ এরূপে কল্পনা করা যাইতে পারে যে, চ রাশি ঙ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে কিন্তু ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না ; [৫ম, সং ৭।

অতএব ঙ রাশি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

আবার ঙ ও ঘ রাশি থ ও ক এর সমগুণিত হওয়াতে,

এবং ঙ রাশি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর বলিয়া,

থ রাশি ক অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; [৫ম, সূত্র: ৮।

অতএব দুই রাশির মধ্যে ইত্যাদি। এখানে ইচ্ছাই উপপাদ্য।

বীজ : উপ : । ক : গ > থ : গ অথবা $\frac{ক}{গ} > \frac{থ}{গ} \therefore ক > থ$ ।

আবার গ : থ > গ : ক, অথবা $\frac{গ}{থ} > \frac{গ}{ক} \therefore গক > গথ$,

$\therefore ক > থ$ অথবা $থ < ক$ ।

১১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যে সকল অনুপাত অন্য কোন অনুপাতের সমান, তাহার পরস্পর সমান।

কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে যেন সেই রূপ
এবং গতে ঘতে যে রূপ, ঙতে চতে যেন সেই রূপ ;
তাহা হইলে কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ
হইবে ।

ছ—	—	জ——	ট——
ক—	-	গ——	ঙ——
খ—		ঘ——	চ—
ঠ —		ড—	ঢ—

ক, গ ও ঙর কোন সমগুণিত ছ, জ ও ট ; এবং খ,
ঘ ও চএর কোন সমগুণিত ঠ, ড ও ঢ কল্পনা কর ।

পরে, কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ হওয়াতে,
[কল্পনা ।

এবং ক ও গএর কোন সমগুণিত ছ ও জ আর খ ও ঘএর
কোন সমগুণিত ঠ ও ড কল্পিত হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন ।
ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে জ রাশি ড অপেক্ষা
বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে
ক্ষুদ্রতর হইবে । [৫ম, সং ৫ ।

আবার গতে ঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ
হওয়াতে, [কল্পনা ।

এবং গ ও ঙর কোন সমগুণিত জ ও ট আর ঘ ও চএর
কোন সমগুণিত ড ও ঢ কল্পিত হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন ।
জ রাশি ড অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ট রাশি চ অপেক্ষা
বৃহত্তর, সমান হইলে সমান, এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর
হইবে ; [৫ম, সং ৫ ।

কিন্তু ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে জ রাশি ড অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান, এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে, প্রতিপন্ন হইয়াছে ;

সুতরাং ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, ট রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

আর ছ ও ট রাশি ক ও ঙর সমশুণিত এবং ঠ ও চ রাশি খ ও চএর সমশুণিত ; এই হেতু কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ হইবে ; [৫ম, সং ৫ ।

অতএব যে সকল অনুপাত ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । ক : খ :: গ : ঘ এবং গ : ঘ :: ঙ : চ,
অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$ এবং $\frac{গ}{ঘ} = \frac{ঙ}{চ} \therefore \frac{ক}{খ} = \frac{ঙ}{চ} \therefore ক : খ :: ঙ : চ ।$

১২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কতিপয় রাশি সমানুপাতী হইলে কোন একটী অগ্রবর্তীর তাহার পরবর্তীর সহিত যে অনুপাত, সমস্ত অগ্রবর্তী গুলির সমস্ত পরবর্তী গুলির সহিত সেই অনুপাত হইবে ।

ক, খ, গ, ঘ, ঙ, চ কতিপয় সমানুপাতী রাশি অর্থাৎ কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই অনুপাত এবং ঙতে চতেও সেই অনুপাত ; তাহা হইলে কতে খতে যে

অনুপাত, একত্রকৃত ক, গ ও ঙতে একত্রকৃত খ, ঘ ও চতে
সেই অনুপাত হইবে ।

ছ ———	জ ———	ট ———
ক ———	গ ———	ঙ ———
খ ———	ঘ ———	চ ———
ঠ ———	ড ———	ঢ ———

ক, গ ও ঙর কোন সমগুণিত ছ, জ, ট এবং খ, ঘ
ও চএর কোন সমগুণিত ঠ, ড ও ঢ সম্পন্ন কর ।

পরে, কতে খতে যে অনুপাত, গতে ঘতে সেই
অনুপাত এবং ঙতে চতেও সেই অনুপাত হওয়াতে,
আর ছ, জ ও ট রাশি ক, গ, ও ঙর সমগুণিত এবং ঠ,
ড ও ঢ রাশি খ, ঘ ও চএর সমগুণিত বলিয়া, [অঙ্কন ।
ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে জ রাশি ড অপেক্ষা ও
ট রাশি ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং
ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ; [৫ম, সং ৫ ।

অতএব ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে একত্রকৃত ছ,
জ ও ট একত্রকৃত ঠ, ড ও ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ;
সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

কিন্তু ছ রাশি এবং একত্রকৃত ছ, জ ও ট ইহারা ক
রাশি এবং একত্রকৃত ক, গ ও ঙর সমগুণিত ; [৫ম, ১ ।
আর ঠ রাশি এবং একত্রকৃত ঠ, ড ও ঢ ইহারা খ রাশি
এবং একত্রকৃত খ, ঘ ও চএর সমগুণিত, [৫ম, ১ ।
এই হেতু কতে খতে যে অনুপাত, একত্রকৃত ক, গ, ও ঙতে
একত্রকৃত খ, ঘ ও চতে সেই অনুপাত ; [৫ম, সং ৫ ।

অতএব কতিপয় রাশি ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ। $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} = \frac{ঙ}{চ} \therefore কঘ = খগ ; কচ = খঙ,$

.. কঘ + কচ = খগ + খঙ ; সমীকরণের দুই পার্শ্বে কখ যোগ করিলে, কখ + কঘ + কচ = খক + খগ + খঙ ; অথবা,

$ক(খ + ঘ + চ) = খ(ক + গ + ঙ) \therefore \frac{ক}{খ} = \frac{ক + গ + ঙ}{খ + ঘ + চ} :$

অথবা, ক : খ :: ক + গ + ঙ : খ + ঘ + চ ।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, যদি তৃতীয়ে চতুর্থে সেই অনুপাত হয় এবং তৃতীয়ের চতুর্থের সহিত অনুপাত যদি পঞ্চমের ষষ্ঠের সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত অনুপাতও পঞ্চমের ষষ্ঠের সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

প্রথম রাশি কতে দ্বিতীয় রাশি খতে যে অনুপাত, যদি তৃতীয় রাশি গতে চতুর্থ রাশি ঘতে সেই অনুপাত হয়, কিন্তু তৃতীয় রাশি গএর চতুর্থ রাশি ঘএর সহিত অনুপাত যদি পঞ্চম রাশি ঙএর ষষ্ঠ রাশি চএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে ক ও খএর অনুপাত ঙ ও চএর অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

ড_____

ছ_____

জ_____

ক_____

গ_____

ঙ_____

খ_____

ঘ_____

চ_____

ট_____

ঠ_____

ড_____

গএর ঘএর সহিত অনুপাত, ঙ্র চএর সহিত অনুপাত
অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, গ ও ঙ্র কোন সমগুণিত এবং ঘ
ও চএর কোন সমগুণিত এরূপে কল্পিত হইতে পারে যে,
গএর গুণিত ঘএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে কিন্তু
ঙ্র গুণিত চএর গুণিত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে না ;

[৫ম, সং ৭।

ছ ও জ রাশি গ ও ঙ্র এবং ট ও ঠ রাশি যেন ঘ ও
চএর সেই রূপ সমগুণিত ;

অতএব ছ রাশি ট অপেক্ষা বৃহত্তর, কিন্তু জ রাশি ঠ
অপেক্ষা বৃহত্তর নহে ।

আর ছ রাশি গএর যে গুণিত, ড রাশি কএর সেই গুণিত
এবং ট রাশি ঘএর যে গুণিত, চ রাশি থএর সেই গুণিত
কল্পনা কর ।

পরে, কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ
হওয়াতে,

[কল্পনা ।

আর ড ও ছ রাশি ক ও গএর সমগুণিত এবং চ ও ট
রাশি থ ও ঘএর সমগুণিত বলিয়া,

[অঙ্কন ।

ড রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ছ রাশি ট অপেক্ষা
বৃহত্তর হইবে, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে
ক্ষুদ্রতর হইবে ;

[৫ম, সং ৫।

কিন্তু ছ রাশি ট অপেক্ষা বৃহত্তর ;

এই হেতু ড রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

কিন্তু জ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে ।

[অঙ্কন ।

আর ড ও জ রাশি ক ও ঙ্র সমগুণিত এবং চ ও ঠ রাশি

খ ও চএর সমগুণিত ; [অঙ্কন ।

এই হেতু কএর খএর সহিত অনুপাত ঊর চএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর ; অতএব প্রথমে দ্বিতীয়ে ইদ্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । ক : খ :: গ : ঘ এবং গ : ঘ > চ : ছ ;
অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$ এবং $\frac{গ}{ঘ} > \frac{চ}{ছ} \therefore \frac{ক}{খ} > \frac{চ}{ছ}$; অর্থাৎ ক : খ > চ : ছ ।

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, যদি তৃতীয়ে চতুর্থে সেই অনুপাত হয়, তবে প্রথম রাশি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, দ্বিতীয় রাশি চতুর্থ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

প্রথম রাশি কতে দ্বিতীয় রাশি খতে যে অনুপাত, তৃতীয় রাশি গতে চতুর্থ রাশি ঘতে যেন সেই অনুপাত ; তাহা হইলে যদি ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, খ রাশিও ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

১	২	৩
ক—	ক—	ক—
খ—	খ—	খ—
গ—	গ—	গ—
ঘ—	ঘ—	ঘ—

প্রথমত, ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে খ রাশি
য অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। (১ম চিত্র ।)

ক, গ অপেক্ষা বৃহত্তর ও খ আর একটী রাশি বলিয়া,
[কম্পনা ।]

ক রাশির খএর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত
অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর, [৫ম, ৮ ।]

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ, [কং ।]

অতএব গএর ঘএর সহিত অনুপাত গএর খএর সহিত
অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর, [৫ম, ১৩ ।]

কিন্তু কোন এক রাশির অন্য দুইএর মধ্যে যে রাশির সহিত
বৃহত্তর অনুপাত, সেই রাশিটী ক্ষুদ্রতর। [৫ম, ১০ ।]

সুতরাং য রাশি খ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর অর্থাৎ খ রাশি
য অপেক্ষা বৃহত্তর ।

দ্বিতীয়ত, ক রাশি গএর সমান হইলে খও ঘএর
সমান হইবে ; (২য় চিত্র ।)

কএর খএর সহিত যে অনুপাত, গএর অর্থাৎ কএর ঘএর
সহিত সেই অনুপাত হওয়াতে,

খ রাশি ঘএর সমান ।

তৃতীয়ত, ক রাশি গ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে খও য
অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ।

গ রাশি ক অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,

এবং গতে ঘতে যে রূপ, কতে খতে সেই রূপ বলিয়া, [অং ।]

প্রথম প্রকরণ অনুসারে, য রাশি খ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

অর্থাৎ খ রাশি য অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

অতএব প্রথমে দ্বিতীয়ে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ । ক : খ : : গ : ঘ অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$;

∴ $\frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} = \frac{গ}{ঘ} \times \frac{খ}{গ}$ অথবা $\frac{ক}{গ} = \frac{খ}{ঘ}$;

অতএব ক > , = বা < গ হইলে খ > , = বা < ঘ হইবে, কারণ তাহা না হইলে $\frac{ক}{গ}$ এই ভগ্নরাশি $\frac{খ}{ঘ}$ -এর সমান হইতে পারে না।

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

রাশি সকল পরস্পর যে অনুপাত বিশিষ্ট, তাহা-
দিগের সমগুণিতেরাও সেই অনুপাত বিশিষ্ট।

কখ ও ঘঙ ইহার গ ও চএর সমগুণিত ; তাহা
হইলে গতে চতে যে রূপ, কখতে ঘঙতে সেই রূপ হইবে।

ক খ জ খ ঘ ট ঠ ঙ

গ— চ—

কখ রাশি গএর মে গুণিত, ঘঙ রাশি চএর সেই
গুণিত বলিয়া, [কল্পনা।

কখতে গএর সমান যত গুলি রাশি আছে, ঘঙতে চএর
সমান তত গুলি রাশি থাকিবে।

প্রত্যেকে গএর সমান হয়, এমন করিয়া কখকে কছ, চজ,
জখ এই কয় অংশে ভাগ কর ;

এবং চএর সমান করিয়া ঘঙকে ঘট, টঠ, ঠঙ এই কয়
অংশে ভাগ কর।

অতএব কছ, ছজ, জখ ইহাদের সংখ্যা, ঘট, টঠ, ঠঙ ইহাদের সংখ্যার সমান ।

একণে, কছ, ছজ, জখ পরস্পর সমান হওয়াতে, [অং। এবং ঘট, টঠ, ঠঙ পরস্পর সমান বলিয়া, কছতে ঘটতে যে রূপ, ছজতে টঠতে সেই রূপ এবং জখতে ঠঙতেও সেই রূপ : [৫ম, ৭।

কিন্তু একটা পূর্ববর্তীতে তাহার পরবর্তীতে যে রূপ, একত্র-রূত সমস্ত পূর্ববর্তীতে একত্ররূত সমস্ত পরবর্তীতে সেই রূপ । [৫ম, ১২।

এই হেতু কছতে ঘটতে যে রূপ, কখতে ঘঙতে সেই রূপ ; কিন্তু কছ রাশি গএর এবং ঘট রাশি চএর সমান ; এজনা গতে চতে যে রূপ, কখতে টঙতে সেই রূপ : অতএব রাশি সকল পরস্পর ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ। ক এবং খ দুই রাশি ; মক, মখ তাহাদের সমান্তরিত : $\frac{ক}{খ} = \frac{মক}{মখ} \therefore ক : খ :: মক : মখ।$

১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক জাতীয় চারি রাশি সমানুপাতী হইলে, একান্তরেও সমানুপাতী হইবে ।

ক, খ, গ, ঘ, এক জাতীয় চারি সমানুপাতী রাশি : অর্থাৎ কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ : তাহা

হইলে কতে গতে যে রূপ, খতে ঘতে সেই রূপ হইবে।

ঙ —————

ছ —————

ক —————

গ —————

খ —————

ঘ —————

চ —————

জ —————

ক ও খএর কোন সমগুণিত ঙ ও চ কল্পনা কর এবং
গ ও ঘএর কোন সমগুণিত ছ ও জ কল্পনা কর।

পরে, ঙ রাশি কএর যে গুণিত, চ রাশি খএর সেই
গুণিত হওয়ার, আর রাশি সকল যে অনুপাত বিশিষ্ট,
তাহাদের সমগুণিতেরাও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হয়
বলিয়া, [৫ম, ১৫।

কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ ;

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, গতে ঘতে সেই রূপ ; [কল্পনা।
অতএব গতে ঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

আবার ছ ও জ রাশি গ ও ঘএর সমগুণিত বলিয়া,
গতে ঘতে যে রূপ, ছতে জতে সেই রূপ, [৫ম, ১৫।
কিন্তু পূর্বে প্রমাণ হইয়াছে যে, গতে ঘতে যে রূপ,
ঙতে চতে সেই রূপ ;

অতএব ঙতে চতে যে রূপ, ছতে জতে সেই রূপ। [৫ম, ১১।

কিন্তু সমানুপাতী চারি রাশির প্রথম তৃতীয় অপেক্ষা
বৃহত্তর হইলে দ্বিতীয় চতুর্থ অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে
সমান, এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইয়া থাকে ;

[৫ম, ১৪।

অতএব ঙ রাশি ছ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে চ রাশি জ

অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান, এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

কিন্তু ঙ ও চ, ক ও খএর সমগুণিত এবং ছ ও জ, গ ও ঘএর সমগুণিত ; [অঙ্কন ।

সুতরাং কতে গতে যে রূপ, খতে ঘতে সেই রূপ ; [৫ম, সং ৫ ।

অতএব এক জাতীয় ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

দ্বিজঃ উপঃ । ক : খ : : গ : ঘ অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$;

৫. $\frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} = \frac{গ}{ঘ} \times \frac{খ}{গ}$ অথবা $\frac{ক}{গ} = \frac{খ}{ঘ}$, বা ক : গ : : খ : ঘ ।

১৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

একত্র করিলে যদি রাশি সকল সমানুপাতী হয়, তবে পৃথক করিলেও তাহারা সমানুপাতী হইবে, অর্থাৎ দুই রাশির সমষ্টির তাহাদের কোন একটির সহিত যে অনুপাত, অপর রাশিদ্বয়ের সমষ্টিরও তাহাদের কোন একটির সহিত সেই অনুপাত হইলে, প্রথম দুই রাশির অবশিষ্টের অপর রাশির সহিত যে অনুপাত, দ্বিতীয় দুই রাশির অবশিষ্টের অপর রাশির সহিত সেই অনুপাত হইবে ।

কখ, খঙ, গঘ, ঘচ এই চারি রাশি, একত্র হইয়া যেন সমানুপাতী হইয়াছে ; অর্থাৎ কখতে খঙতে যে অনু-

পাত, গযতে ঘচতে সেই অনুপাত ; তাহা হইলে পৃথক করিলেও তাহার সমানুপাতী হইবে ; অর্থাৎ কঙতে ঙ্খতে যে অনুপাত, গচতে চযতে সেই অনুপাত হইবে ।

ছ জ ট ভ

ঠ ড চ ত

ক ঙ খ

গ চ ঘ

কঙ, ঙখ, গচ ও চযএর ছজ, জট, ঠড ও ডচ সমগুণিত ; আবার ঙখ, চযএর টভ, চত সমগুণিত কল্পনা কর ।

পরে, ছজ রাশি কঙর যে গুণিত, জট রাশি ঙখএর সেই গুণিত হওয়াতে,

ছজ রাশি কঙর যে গুণিত, ছট রাশি কখএর সেই গুণিত, [৫ম, ১।

কিন্তু ছজ রাশি কঙর যে গুণিত, ঠড রাশি গচএর সেই গুণিত ; [অঙ্কন ।

এই হেতু ছট রাশি কখএর যে গুণিত, ঠড রাশি গচএর সেই গুণিত ।

আবার, ঠড রাশি গচএর যে গুণিত, ডচ রাশি চযএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন ।

ঠড রাশি গচএর যে গুণিত, ঠচ রাশি গযএর সেই গুণিত ; [৫ম, ১।

কিন্তু এরূপ প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ঠড রাশি গচএর যে গুণিত, ছট রাশি, কখএর সেই গুণিত ;

অতএব ছট রাশি কথএর যে গুণিত, ঠট রাশি গঘএর সেই গুণিত ; অর্থাৎ, ছট ও ঠট, কথ ও গঘএর সমগুণিত ।

পুনর্বার, জট রাশি ঙুথএর যে গুণিত, ডট রাশি চঘএর সেই গুণিত এবং টভ রাশি ঙুথএর যে গুণিত, চত রাশি চঘএর সেই গুণিত হওয়াতে, [অঙ্কন ।

জভ রাশি ঙুথএর যে গুণিত, ডত রাশি চঘএর সেই গুণিত, [৫ম, ২ ।

অর্থাৎ জভ ও ডত ইহারা ঙুথ ও চঘএর সমগুণিত ।

আর কথতে খঙতে যে রূপ, গঘতে ঘচতে সেই রূপ, [কম্পনা ।

এবং ছট ও ঠট, কথ ও গঘএর সমগুণিত, আর জভ ও ডত, ঙুথ ও চঘএর সমগুণিত,

এই হেতু ছট রাশি জভ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঠট রাশি ডত অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে । [৫ম, সং ৫ ।

কিন্তু যদি ছজ রাশি টভ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে প্রত্যেকে সাধারণ রাশি জট যোগ করিলে, ছট রাশি জভ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ;

অতএব ঠটও ডত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ;

এবং উভয় হইতে সাধারণ খঙ ডট বিয়োগ করিলে, ঠড রাশি চত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; [১ম, স্বতঃ ৫ ।

এই হেতু যদি ছজ রাশি টভ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ঠড রাশি চত অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

এই রূপে উপপন্ন হইতে পারে যে, ছজ রাশি টভএর

সমান হইলে, ঠাউ রাশি চতুঃকোণের সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ;

কিন্তু ছজ ও ঠাউ, কঙ ও গচএর কোন সমান্তরিত এবং চিত ও চত, ঙখ ও চঘএর কোন সমান্তরিত ; [অং ।

সুতরাং কঙতে ঙখতে যে অনুপাত, গচতে চঘতে সেই অনুপাত ; [৫ম, সং ৫ ।

অতএব একত্র করিলে ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । যদি ক + খ : খ :: গ + ঘ : ঘ হয়,

তবে, ক : খ :: গ : ঘ হইবে, $\frac{ক + খ}{খ} = \frac{গ + ঘ}{ঘ}$

$\frac{ক}{খ} + ১ = \frac{গ}{ঘ} + ১$ অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$ অথবা ক : খ :: গ : ঘ ।

১৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

পৃথক করিলে যদি রাশি গুণি সমানুপাতী হয়, তবে একত্র করিলেও তাহারা সমানুপাতী হইবে ; অর্থাৎ প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, যদি তৃতীয়ে চতুর্থে সেই অনুপাত হয়, তাহা হইলে একত্রকৃত প্রথম ও দ্বিতীয়ের, দ্বিতীয়ের সহিত যে অনুপাত, একত্রকৃত তৃতীয় ও চতুর্থের, চতুর্থের সহিত সেই অনুপাত হইবে ।

যদি কঙ, ঙখ, গচ, চঘ এই চারি রাশি সমানুপাতী হয়, তবে একত্র করিলে কথতে খঙতে যে অনুপাত, গঘতে ঘচতে সেই অনুপাত হইবে ।

ক ঙ খ

গ চ ছ ঘ

যদি না হয়, তবে কথতে ঋঙতে যে অনুপাত, গঘতে ঘচ অপেক্ষা কোন ক্ষুদ্রতর রাশি ঘছতে যেন সেই অনুপাত হইল ।

পরে, কথতে ঋঙতে যে রূপ, গঘতে ঘছতে সেই রূপ বলিয়া,

কঙতে ঙথতে যে রূপ, গছতে ছঘতে সেই রূপ । [৫ম, ১৭ ।

কিন্তু কঙতে ঙথতে যে রূপ, গচতে চঘতে সেই রূপ,
[কম্পনা ।

এই হেতু গছতে ছঘতে যে রূপ, গচতে চঘতে সেই রূপ ;
[৫ম, ১১ ।

কিন্তু গছ রাশি গচ অপেক্ষা বৃহত্তর, [কম্পনা ।

এই হেতু ছঘ রাশি চঘ অপেক্ষা বৃহত্তর ; [৫ম, ১৪ ।

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভবনীয় ।

এই প্রকারে যদি ঘছ রাশি ঘচ অপেক্ষা বৃহত্তর কম্পিত হইত, তাহা হইলে উপরোক্ত রীতি অনুসারে তাহা অসম্ভব প্রমাণ হইত ;

এই হেতু কথতে ঋঙতে যে রূপ, গঘতে ঘচতে সেই রূপ ;
অতএব পৃথক করিলে ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । ক : খ :: গ : ঘ, বা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} \therefore \frac{ক}{খ} + ১$

$= \frac{গ}{ঘ} + ১$ বা $\frac{ক + খ}{খ} = \frac{গ + ঘ}{ঘ}$; বা ক + খ : খ :: গ + ঘ : ঘ ।

১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

একটী পূর্ণ রাশিতে আর একটী পূর্ণ রাশিতে যে অনুপাত, প্রথমের এক অংশে দ্বিতীয়ের এক অংশে যদি সেই অনুপাত হয়, তবে পূর্ণ রাশিতে পূর্ণ রাশিতে যে অনুপাত, অবশিষ্টে অবশিষ্টে সেই অনুপাত হইবে।

পূর্ণ রাশি কথ্যে পূর্ণ রাশি গম্যে যে রূপ, কথ্যের এক অংশ কণ্ডতে, গম্যের এক অংশ গচতে যেন সেই রূপ হইল ; তাহা হইলে পূর্ণ রাশি কথ্যে পূর্ণ রাশি গম্যে যে রূপ, অবশিষ্টে উথ্যে অবশিষ্টে চম্যে সেই রূপ হইবে।

ক	ঙ	থ
গ	চ	য

কথ্যে গম্যে যে রূপ, কণ্ডতে গচতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা ।

একান্তরে, কথ্যে কণ্ডতে যে রূপ, গম্যে গচতে সেই রূপ ; [৫ম, ১৮ ।

আর একত্র করিলে যদি রাশি সকল সমানুপাতী হয়, তবে পুঙ্খ করিলেও তাহারা সমানুপাতী হইবে ; [৫ম, ১৭ ।
এই হেতু উথ্যে কণ্ডতে যে রূপ, চম্যে গচতে সেই রূপ ;
অতএব একান্তরে, উথ্যে চম্যে যে রূপ, কণ্ডতে গচতে সেই রূপ ; [৫ম, ১৬ ।

কিন্তু কঙতে গচতে যে রূপ, কথতে গঘতে সেই রূপ; [কং।
এই হেতু কথতে, গঘতে যে রূপ, ঙথতে চঘতে সেই
রূপ; [৫ম, ১১।

অতএব একটী পূর্ণ ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনু। পূর্ণ রাশিতে পূর্ণ রাশিতে যে অনুপাত, যদি
তাহাদের অংশে অংশে সেই অনুপাত হয়, তবে
অংশে অংশে যে অনুপাত, অবশিষ্টে অবশিষ্টে সেই
অনুপাত হইবে।

প্রতিজ্ঞার উপপত্তিতে এই অনুমান সপ্রমাণ হইয়াছে।

বীজঃ উপঃ। যদি ক, খ দুই পূর্ণ রাশি ও গ, ঘ তাহাদের
অংশ হয়, এবং ক : খ :: গ : ঘ হয়,
তবে ক : খ :: ক - গ : খ - ঘ হইবে। \therefore ক : খ :: গ : ঘ ;
 \therefore একান্তরে, ক : গ :: খ : ঘ, বা $\frac{ক}{গ} = \frac{খ}{ঘ} \therefore \frac{ক}{গ} - ১ = \frac{খ}{ঘ} - ১,$

অথবা $\frac{ক - গ}{গ} = \frac{খ - ঘ}{ঘ}, \therefore \frac{গ}{ক - গ} = \frac{ঘ}{খ - ঘ}$ "

অথবা গ : ক - গ :: ঘ : খ - ঘ ;

\therefore একান্তরে ; গ : ঘ :: ক - গ : খ - ঘ ;

কিন্তু ক : খ :: গ : ঘ \therefore ক : খ :: ক - গ : খ - ঘ ।

ঙ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

চারি রাশি সমানুপাতী হইলে অন্তর্বিলোমেও
সমানুপাতী হইবে; অর্থাৎ প্রথম রাশিতে দ্বিতীয়
অপেক্ষা প্রথমের আধিক্যেতে যে অনুপাত, তৃতীয়
রাশিতে চতুর্থ অপেক্ষা তৃতীয়ের আধিক্যেতে সেই
অনুপাত হইবে।

কথতে খঙতে যে রূপ, গঘতে ঘচতে যেন সেই রূপ ; তাহা হইলে কথতে কঙতে যে রূপ, গঘতে গচতে সেই রূপ হইবে ।

ক	ঙ	খ
গ	চ	ঘ

কথতে খঙতে যে রূপ, গঘতে ঘচতে সেই রূপ হওয়াতে, [কম্পনা ।

অন্তর সমানুপাতে, কঙতে খঙতে যে রূপ, গচতে ঘচতে সেই রূপ ; [৫ম, ১৭ ।

এবং বিলোমে খঙতে কঙতে যে রূপ, চঘতে গচতে সেই রূপ । [৫ম, খ ।

সুতরাং যোগ সমানুপাতে, কথতে কঙতে যে রূপ, গঘতে গচতে সেই রূপ ; [৫ম, ১৮ ।

অতএব চারি রাশি ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । ক, খ, গ, ঘ সমানুপাতী চারি রাশি ;

$$\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} \therefore \frac{ক}{খ} - ১ = \frac{গ}{ঘ} - ১ \text{ অথবা } \frac{ক-খ}{খ} = \frac{গ-ঘ}{ঘ}$$

$$\therefore \frac{খ}{ক-খ} = \frac{ঘ}{গ-ঘ} ; \therefore \frac{খ}{ক-খ} \times \frac{ক}{খ} = \frac{ঘ}{গ-ঘ} \times \frac{গ}{ঘ} ;$$

$$\text{অথবা } \frac{ক}{ক-খ} = \frac{গ}{গ-ঘ} \therefore ক : ক-খ :: গ : গ-ঘ ।$$

২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক শ্রেণীতে তিনটি ও অপর শ্রেণীতে আর তিনটি রাশি থাকিলে, যদি একের দুইটি দুইটি ক্রমে অপরের

দুইটী দুইটীর সহিত সমানুপাতী হয়, তবে প্রথম রাশিগী তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে চতুর্থ রাশি ষষ্ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর ; সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

ক, খ, গ যেন তিন রাশি ও ঘ, ঙ, চ অপর তিন রাশি ; ইহারা ক্রমে দুইটী দুইটী করিয়া সমানুপাতী অর্থাৎ কতে খতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ এবং খতে গতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ ; তাহা হইলে যদি ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

ক——

খ——

ঘ——

ঙ——

প্রথমত, ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর ও খ অন্য কোন রাশি বলিয়া, কএর খএর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর, [৫ম, ৮ ।

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ ; [৬ম্পন্য । অতএব ঘএর ঙর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর । [৫ম, ১৩ ।

আবার খতে গতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ ; [কং ।

অতএব বিলোমে, গতে খতে যে রূপ, চতে ঙতে সেই
রূপ ; [৫ম, খ ।

এবং পূর্বে প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ঘএর ঙর সহিত অনুপাত
গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর ;

এই হেতু ঘএর ঙর সহিত অনুপাত চএর ঙর সহিত
অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর ; [৫ম, ১৩, অনু ।

অতএব ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর । [৫ম, ১০ ।

দ্বিতীয়ত, ক রাশি গএর সমান হইলে ঘ রাশি চএর
সমান হইবে ।

ক——	খ——	গ——
ঘ——	ঙ——	চ——

ক রাশি গএর সমান ও খ অনা কোন রাশি বলিয়া,
কতে খতে যে রূপ, গতে খতে সেই রূপ ; [৫ম, ৭ ।

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ, [কল্পনা ।
এবং গতে খতে যে রূপ, চতে ঙতে সেই রূপ ;

[কল্পনা ; ৫ম, খ ।

এই হেতু ঘতে ঙতে যে রূপ, চতে ঙতে সেই রূপ,
[৫ম, ১১ ।

সুতরাং ঘ রাশি চএর সমান । [৫ম, ৯ ।

তৃতীয়ত, ক রাশি গ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে ঘ
রাশি চ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ;

ক——	খ——	গ——
ঘ—	ঙ——	চ——

গ রাশি ক অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে এই প্রতিজ্ঞার

প্রথম প্রকরণের ন্যায় উপপন্ন হইবে যে, গতে খতে যে রূপ, চতে ঙতে সেই রূপ ;

এই প্রকারে, খতে কতে যে রূপ, ঙতে ঘতে সেই রূপ ;
অতএব প্রথম প্রকরণ দ্বারা চ রাশি ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর,
অর্থাৎ ঘ রাশি চ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইতেছে ; অতএব
এক শ্রেণীতে তিনটি ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

$$\text{বীজঃ উপঃ। } \frac{ক}{খ} = \frac{ঘ}{ঙ} \text{ ও } \frac{খ}{গ} = \frac{ঙ}{চ} \therefore \frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} = \frac{ঘ}{ঙ} \times \frac{ঙ}{চ} ;$$

অর্থাৎ $\frac{ক}{গ} = \frac{ঘ}{চ}$ \therefore যদি $ক > গ$ হয়, তবে $ঘ > চ$; যদি $ক = গ$ হয়, তবে $ঘ = চ$; এবং যদি $ক < গ$ হয়, তবে $ঘ < চ$ হইবে ।

২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক শ্রেণীতে তিনটি ও অপর শ্রেণীতে আর তিনটি রাশি থাকিলে, যদি একের দুইটি দুইটি অপরের দুইটি দুইটির সহিত ব্যতিক্রমে সমানুপাতী হয়, তবে প্রথম রাশিটি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে চতুর্থ রাশি বষ্ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর ; সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

ক, খ, গ তিন রাশি ও ঘ, ঙ, চ অপর তিন রাশি ;
ইহারা ব্যতিক্রমে দুইটি দুইটি করিয়া সমানুপাতী ;
অর্থাৎ কতে খতে যে অনুপাত, ঙতে চতে সেই অনুপাত
এবং খতে গতে যে অনুপাত, ঘতে ঙতে সেই অনুপাত ;
তাহা হইলে যদি ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, ঘ

রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

ক ———	খ ———	গ ———
ঘ ———	ঙ ———	চ ———

প্রথমত, ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে ঘ রাশি চ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

ক রাশি গ অপেক্ষা বৃহত্তর ও খ অন্য কোন রাশি বলিয়া, কএর খএর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর ; [৫ম, ৮ ।

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ, [কল্পনা ।
অতএব ঙর চএর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর । [৫ম, ১৩ ।

আবার খতে গতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ হওয়াতে, [কল্পনা ।

বিলোমে, গতে খতে যে রূপ, ঙতে ঘতে সেই রূপ ; [৫ম, ৪ ।

এবং পূর্বে প্রতিপন্ন হইরাছে যে, ঙর চএর সহিত অনুপাত, গএর খএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর,

এই হেতু ঙর চএর সহিত অনুপাত, ঙর ঘএর সহিত অনুপাত অপেক্ষা বৃহত্তর ; [৫ম, ১৩, অনু ।

অতএব চ রাশি ঘ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; [৫ম, ১০ ।

অর্থাৎ চ অপেক্ষা ঘ বৃহত্তর ।

দ্বিতীয়ত, ক রাশি গএর সমান হইলে, ঘ রাশি চএর সমান হইবে ।

ক—— থ—— গ——
 ঘ—— ঙ—— চ——

ক রাশি গএর সমান ও থ অন্য কোন রাশি বলিয়া কতে থতে যে রূপ, গতে থতে সহিত সেই রূপ, [৫ম, ৭। কিন্তু কতে থতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ, [কম্পনা। এবং গতে থতে যে রূপ, ঙতে ঘতে সেই রূপ; [৫ম, ১১। অতএব ঘ রাশি চএর সমান। [৫ম, ৯।

তৃতীয়ত, ক রাশি গ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলে, ঘ রাশি চ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে;

ক—— থ—— গ——
 ঘ—— ঙ—— চ——

গ রাশি ক অপেক্ষা বৃহত্তর; এবং পূর্বের ন্যায়, গতে থতে যে রূপ, ঙতে ঘতে সেই রূপ হওয়াতে, ও ঐ প্রকারে, থতে কতে যে রূপ, চতে ঙতে সেই রূপ বলিয়া প্রথম প্রকরণ দ্বারা চ রাশি ঘ অপেক্ষা বৃহত্তর অর্থাৎ ঘ রাশি চ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর; অতএব এ শ্রেণীতে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উৎপাদ্য।

বীজঃ উপঃ । $\frac{ক}{থ} = \frac{ঙ}{চ}$; $\frac{খ}{গ} = \frac{ঙ}{চ}$ $\therefore \frac{ক}{থ} \times \frac{খ}{গ} = \frac{ঙ}{চ} \times \frac{ঙ}{চ}$;

অথবা $\frac{ক}{গ} = \frac{ঘ}{চ}$ \therefore যদি $ক > গ$ হয়, তবে $ঘ > চ$; যদি $ক = গ$ হয়, তবে $ঘ = চ$; এবং যদি $ক < গ$ হয়, তবে $ঘ < চ$ হইবে।

২২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কতকগুলি রাশি এক স্থানে ও আর কতকগুলি অপর স্থানে থাকিলে, যদি তাহারা দুইটী দুইটী যথাক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, তবে এক শ্রেণীর প্রথমের তাহার শেষ রাশির সহিত যে অনুপাত, অপর শ্রেণীর প্রথমের তাহার শেষ রাশির সহিত সেই অনুপাত হইবে ।

[ক্রম সমানুপাত এই কথা প্রয়োগ করিলেই সংক্ষেপে এ প্রতিজ্ঞা ব্যক্ত করা হয় ।]

প্রথমত, ক, খ, গ, এই তিনটী রাশি এক স্থানে ও ঘ, ঙ, চ আর তিনটী রাশি অপর স্থানে থাকিলে, যদি তাহারা দুইটী দুইটী করিয়া যথাক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, অর্থাৎ যদি কতে খতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ এবং খতে গতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ হয়, তবে কতে গতে যে রূপ, ঘতে চতে সেই রূপ হইবে ।

ছ—	ট—	ড—
ক—	খ—	গ—
ঘ—	ঙ—	চ—
জ—	ঠ—	ট—

ক ও ঘএর কোন সমগুণিত ছ ও জ, খ ও ঙএর কোন সমগুণিত ট ও ঠ এবং গ ও চএর কোন সমগুণিত ড ও চ কল্পনা কর ।

পরে কতে খতে যে রূপ, যতে ঙতে সেই রূপ বলিয়া,
[কম্পনা।

এবং ক ও ঘএর কোন সমগুণিত ছ ও জ আর খ ও ঙর
কোন সমগুণিত ট ও ঠ কম্পিত হওয়াতে, [অঙ্কন।

ছতে টতে যে রূপ, জতে ঠতে সেই রূপ ;

এই কারণে, টতে ডতে যে রূপ, ঠতে ঢতে সেই রূপ।

আবার এক শ্রেণীতে ছ, ট, ড এই তিনটি রাশি ও
অপর শ্রেণীতে জ, ঠ, ঢ আর তিনটি রাশি থাকাতে
ও তন্মধ্যে দুইটি দুইটি রাশি একই অনুপাত বিশিষ্ট
হইয়াছে বলিয়া, যদি ছ রাশি ড অপেক্ষা বৃহত্তর হয়,
তবে ডও ঢ অপেক্ষা বৃহত্তর; সমান হইলে সমান
এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে; [৫ম, ২০।

কিন্তু ছ ও জ রাশি ক ও ঘএর কোন সমগুণিত ;

এবং ড ও ঢ রাশি গ ও চএর কোন সমগুণিত ;

সুতরাং কতে গতে যে রূপ, যতে ঢতে সেই রূপ।

[৫ম, সং ৫।

অনন্তর, প্রত্যেক শ্রেণীতে ক, খ, গ, ঘ এবং ঙ, চ,
ছ, জ এই চারিটি চারিটি রাশি
থাকিলে, যদি তাহারা দুইটি
দুইটি করিয়া যথাক্রমে একই
অনুপাত বিশিষ্ট হয়, তবে কতে

ক, খ, গ, ঘ,

ঙ, চ, ছ, জ,

যতে যে অনুপাত, ঙতে জতে সেই অনুপাত হইবে ;
কারণ, ক, খ, গ ও ঙ, চ, ছ এই তিনটি তিনটি রাশি এক
এক শ্রেণীস্থ হওয়াতে ও তাহারা দুইটি দুইটি করিয়া

যথাক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট বলিয়া, [কল্পনা ।
প্রথম প্রকরণ দ্বারা কতে গতে যে রূপ, ঙতে ছতে সেই
রূপ ;

কিন্তু গতে ঘতে যে রূপ, ছতে জতে সেই রূপ ; [কল্পনা ।
এই হেতু, পুনর্যার ১ম প্রকরণ দ্বারা কতে ঘতে যে
রূপ, ঙতে জতে সেই রূপ ।

আর রাশি সংখ্যা যতই হউক না কেন, প্রতিজ্ঞা এই রূপে
সমপ্রমাণ হইবে । অতএব কতকগুলি ইত্যাদি । এখানে
ইহাই উপপাদ্য ।

বীজঃ উপঃ । যদি ক, খ, গ, ঘ এই চারিটি রাশি এবং ঙ, চ,
ছ, জ, আর চারিটি রাশি থাকে, তবে $\frac{ক}{খ} = \frac{ঙ}{চ}$; $\frac{খ}{গ} = \frac{চ}{ছ}$; $\frac{গ}{ঘ} = \frac{ছ}{জ}$;
 $\therefore \frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} \times \frac{গ}{ঘ} = \frac{ঙ}{চ} \times \frac{চ}{ছ} \times \frac{ছ}{জ}$ অথবা $\frac{ক}{ঘ} = \frac{ঙ}{জ}$ \therefore ক : ঘ :: ঙ : জ ।

২৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কতকগুলি রাশি এক স্থানে ও আর কতকগুলি
অপর স্থানে থাকিলে, যদি তাহারা দুইটি দুইটি
ব্যতিক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, তবে এক
শ্রেণীর প্রথমের তাহার শেষ রাশির সহিত যে অনুপাত,
অপর শ্রেণীর প্রথমের তাহার শেষ রাশির সহিত সেই
অনুপাত হইবে ।

[ব্যতিক্রম সমানুপাত এই কথা প্রয়োগ করিলেই সংক্ষেপে
এ প্রতিজ্ঞা ব্যক্ত করা হয় ।]

প্রথমত, ক, খ, গ এই তিনটী রাশি এক স্থানে ও ঘ, ঙ, চ এই তিনটী রাশি অপর স্থানে থাকিলে, যদি উহারা দুইটী দুইটী করিয়া ব্যতিক্রমে একই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, অর্থাৎ যদি কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ এবং খতে গতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ হয়, তবে কতে গতে যে রূপ, ঘতে চতে সেই রূপ হইবে।

ছ—	জ—	ঠ—
ক—	খ—	গ—
ঘ—	ঙ—	চ—
ট—	ড—	ঢ—

ক, খ ও ঘএর কোন সমগুণিত ছ, জ ও ট এবং গ, ঙ ও চএর কোন সমগুণিত ঠ, ড ও ঢ কল্পনা কর।

পরে, ছ ও জ এই দুই রাশি ক ও খএর সমগুণিত হওয়ায়, এবং রাশি সকল পরস্পর যে অনুপাত বিশিষ্ট, তাহাদের সমগুণিতেরাও পরস্পর সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইয়া থাকে বলিয়া, [৫ম, ১৫।

কতে খতে যে রূপ, ছতে জতে সেই রূপ ;

এই হেতু, ঙতে চতে যে রূপ ডতে ঢতে সেই রূপ ;

কিন্তু কতে খতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ ; [কল্পনা।

সুতরাং ছতে জতে যে রূপ, ডতে ঢতে সেই রূপ।

[৫ম, ১১।

আবার খতে গতে যে রূপ, ঘতে ঙতে সেই রূপ বলিয়া, [কল্পনা।

এবং খ ও ঘএর কোন সমগুণিত জ ও ট আর গ ও ঙর

কোন সমগুণিত ঠ ও ড কল্পিত হওয়াতে, [অঙ্কন ।
জ্ঞতে ঠতে যে রূপ, টতে ডতে সেই রূপ । [৫ম, ৪ ।
আর সপ্রমাণ হইয়াছে যে, ছতে জ্ঞতে যে রূপ, ডতে
চতে সেই রূপ ।

এক্ষণে এক শ্রেণীতে ছ, জ, ঠ এই তিনটি রাশি ও
অপর শ্রেণীতে ট, ড, চ আর তিনটি রাশি থাকাতে, ও
তদ্বাধ্যো ব্যতিক্রমে দুইটি দুইটি রাশি একই অনুপাত
বিশিষ্ট হইয়াছে বলিয়া,

দ ছ রাশি ঠ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তবে ট রাশি চ
অপেক্ষা বৃহত্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে
ক্ষুদ্রতর হইবে ; [৫ম, ২১ ।

কিন্তু ছ ও ট রাশি ক ও ঘএর কোন সমগুণিত,
এবং ঠ ও চ রাশি গ ও চএর কোন সমগুণিত ;
অতএব কতে গতে যে রূপ, ঘতে চতে সেই রূপ ।

অনন্তর, প্রত্যেক শ্রেণীতে ক, খ, গ, ঘ এবং ঙ, চ, ছ,

এই চারিটি চারিটি রাশি
ধাকিলে, যদি তাহারা দুইটি
দুইটি করিয়া ব্যতিক্রমে একই
অনুপাত বিশিষ্ট হয়, অর্থাৎ যদি

ক, খ, গ, ঘ,
ঙ, চ, ছ, জ,

কতে খতে যে রূপ, ছতে জ্ঞতে সেই রূপ ; খতে গতে
যে রূপ, চতে ছতে সেই রূপ এবং গতে ঘতে যে রূপ,
ঙতে চতে সেই রূপ হয়, তবে কতে ঘতে যে রূপ, ঙতে
জ্ঞতে সেই রূপ হইবে ।

এক্ষণে ক, খ, গ এবং চ, ছ, জ এই তিনটি তিনটি রাশি
ভিন্ন ভিন্ন শ্রেণীস্থ হওয়াতে,

ও তাহারা দুইটি দুইটি করিয়া ব্যতিক্রমে একই অনুপাত
বিশিষ্ট বলিয়া, [কল্পনা।

প্রথম প্রকরণ দ্বারা কতে গতে যে রূপ, চতে জতে
সেই রূপ ;

কিন্তু গতে ঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ ; [কল্পনা।

অতএব, পুনরবার প্রথম প্রকরণ দ্বারা কতে ঘতে যে
রূপ, ঙতে জতে সেই রূপ ;

আর রাশি সংখ্যা যতই ইউক না কেন, প্রতিজ্ঞা এই রূপে
সমপ্রমাণ হইবে ; অতএব কতকগুলি ইত্যাদি। এখানে
ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। চারিটি চারিটি রাশি লইলে, $\frac{ক}{খ} = \frac{চ}{জ}$;

$$\frac{খ}{গ} = \frac{চ}{ছ} \text{ এবং } \frac{গ}{ঘ} = \frac{ঙ}{ট} \therefore \frac{ক}{খ} \times \frac{খ}{গ} \times \frac{গ}{ঘ} = \frac{চ}{জ} \times \frac{চ}{ছ} \times \frac{ঙ}{ট} ;$$

$$\text{অতএব। } \frac{ক}{ঘ} = \frac{ঙ}{জ} ; \therefore ক : ঘ :: ঙ : জ।$$

২৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

প্রথমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, যদি তৃতীয়ে চতুর্থে
সেই অনুপাত হয় এবং পঞ্চমে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত,
যদি ষষ্ঠে চতুর্থে সেই অনুপাত হয়, তাহা হইলে প্রথম
ও পঞ্চমের সমষ্টিতে দ্বিতীয়েতে যে অনুপাত, তৃতীয়
ও ষষ্ঠের সমষ্টিতে চতুর্থেতে সেই অনুপাত হইবে।

প্রথম রাশি কথিতে দ্বিতীয় গতে যে রূপ, তৃতীয় রাশি
যজ্ঞতে চতুর্থ চতে সেই রূপ হইলে এবং পঞ্চম খছতে
দ্বিতীয় গতে যে রূপ, ষষ্ঠ ঙ্জতে চতুর্থ চতে সেই রূপ
হইলে, প্রথম ও পঞ্চমের সমষ্টি কছতে দ্বিতীয় গতে
যে রূপ তৃতীয় ও ষষ্ঠের সমষ্টি যজ্ঞতে চতুর্থ চতে সেই
রূপ হইবে ।

ক খ ছ

য ঙ জ

গ—

চ—

খছতে গতে যে রূপ, ঙ্জতে চতে সেই রূপ বলিয়া,

[কম্পনা ।

বিলোমে, গতে খছতে যে রূপ, চতে ঙ্জতে সেই রূপ ।

[৫ম, খ ।

আবার, কথিতে গতে যে রূপ, যজ্ঞতে চতে সেই রূপ,

[কম্পনা ।

এবং গতে খছতে যে রূপ, চতে ঙ্জতে সেই রূপ ;

অতএব ক্রম সমানুপাতে, কথিতে খছতে যে রূপ, যজ্ঞতে
ঙ্জতে সেই রূপ ;

[৫ম, ২২ ।

আর এই সৰল রাশি সমানুপাতী হওয়াতে এতদ্র কারিলেও
সমানুপাতী হইবে ;

[৫ম, ১৮ ।

অতএব কছতে খছতে যে রূপ, যজ্ঞতে ঙ্জতে সেই রূপ ;

আর খছতে গতে যে রূপ, ঙ্জতে চতে সেই রূপ, [কং ।

সুতরাং, ক্রম সমানুপাতে, কছতে গতে যে রূপ, যজ্ঞতে
চতে সেই রূপ ;

[৫ম, ২২ ।

অতএব প্রথমে দ্বিতীয়ে ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

১ম অনু। প্রতিজ্ঞায় যে রূপ কল্পনা করা গিয়াছে, সেই রূপ কল্পনা করিলে প্রথম ও পঞ্চমের অন্তরে দ্বিতীয়ে যে অনুপাত, তৃতীয় ও ষষ্ঠের অন্তরে চতুর্থে সেই অনুপাত হইবে।—যদি যোগ সমানুপাতের পরিবর্তে অন্তর সমানুপাত ব্যবহার করা যায়, তাহা হইলে প্রতিজ্ঞার উপপত্তির ন্যায় এই অনুমান সপ্রমাণ হইতে পারে।

২য় অনু। ইহা সহজেই প্রতীত হইবে যে, দুই স্থানে যত গুলি করিয়া রাশি থাকুক না কেন, প্রথম শ্রেণীস্থ কোন এক রাশির দ্বিতীয় রাশির সহিত সে অনুপাত, যদি দ্বিতীয় শ্রেণীস্থ সেই স্থানীয় রাশির চতুর্থ রাশির সহিত সেই অনুপাত হয়, তাহা হইলেও এই প্রতিজ্ঞা সপ্রমাণ হইবে।

বীজঃ উপঃ। ক, খ, গ, ঘ, ঙ, চ ছয়টি রাশি।

$$\therefore \frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ} \text{ ও } \frac{ঙ}{খ} = \frac{চ}{ঘ} \therefore \frac{ক}{খ} + \frac{ঙ}{খ} = \frac{গ}{ঘ} + \frac{চ}{ঘ} \text{ অথবা } \frac{ক+ঙ}{খ} = \frac{গ+চ}{ঘ};$$

$$\therefore ক+ঙ : খ :: গ+চ : ঘ।$$

অনুমান দুইটিও সহজেই এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে।

২৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি এক জাতীয় চারি রাশি সমানুপাতী হয়, তাহা হইলে বৃহত্তম ও লঘুতমের সমষ্টি অন্য দুইটির সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

কথ, গঘ, ঙ, চ এই চারি রাশি সমানুপাতী ; অর্থাৎ
কথতে গঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ । এই কয়টী
রাশির মধ্যে কথ যেন রূহত্তম ; সূতরাং চ সর্বাপেক্ষা
লঘুতম ; [৫ম, ক ও ১৪ ।
কথ ও চএর সমষ্টি, গঘ ও ঙর সমষ্টি অপেক্ষা রূহত্তর
হইবে ।

ক ছ থ

গ জ ঘ

ঙ—

চ—

ঙর সমান কছ এবং চএর সমান গজ রাশি কল্পনা
কর ।

পরে কথতে গঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ
বলিয়া, [কল্পনা ।
এবং কছ রাশি ঙর সমান ও গজ রাশি চএর সমান
হওয়াতে, [অঙ্কন ।
কথতে গঘতে যে রূপ, কছতে গজতে সেই রূপ ;

[৫ম, ৭ ও ১১ ।

আর কথ পূর্ণ রাশিতে গঘ পূর্ণ রাশিতে যে রূপ
কছতে গজতে সেই রূপ হওয়াতে,
কথ পূর্ণ রাশিতে গঘ পূর্ণ রাশিতে যে রূপ, অবশিষ্ট ছথতে
অবশিষ্ট জঘতে সেই রূপ ; [৫ম, ১২ ।
কিন্তু কথ রাশি গঘ অপেক্ষা রূহত্তর ; [কল্পনা ।
এই হেতু ছথ রাশি জঘ অপেক্ষা রূহত্তর । [৫ম, ক ।

আর কছ রাশি ঙুর সমান ও গজ রাশি চএর সমান
বলিয়া, [অঙ্কন।

কছ ও চএর সমষ্টি গজ ও ঙুর সমষ্টির সমান।

আবার ছথ রাশি জঘ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে যদি
এই দুই অনমান রাশিতে দুই সমান রাশি, অর্থাৎ
ছথ রাশিতে কছ ও চ এই দুইটা, এবং ঘজ রাশিতে, গজ
ও ঙ এই দুইটা যোগ করা যায়, তাহা হইলে কথ ও চএর
সমষ্টি, গঘ ও ঙুর সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে; অতএব
যদি এক জাতীয় ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

বীজঃ উপঃ। ক : খ :: গ : ঘ, অথবা $\frac{ক}{খ} = \frac{গ}{ঘ}$:

∴ কঘ = খগ, ∴ ঘ = $\frac{খগ}{ক}$ । ক + ঘ - (খ + গ) = ক - খ

- (গ - ঘ) = ক - খ - $\left(গ - \frac{খগ}{ক}\right) = \frac{(ক - খ)(ক - গ)}{ক}$

ক অথবা ঘ বৃহত্তম হইলে $\frac{(ক - খ)(ক - গ)}{ক}$ যুক্তরাশি হইবে।

এবং খ অথবা গ বৃহত্তম হইলে উহা বিযুক্ত রাশি হইবে।

∴ বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতমের সমষ্টি অন্য দুই রাশি অপেক্ষা বৃহত্তর।

৫ম অধ্যায় ।

বাখ্যা ও পরিণতি ।

ইউক্লিডের প্রথম চারি অধ্যায়ে জ্যামিতিক রাশি সকল কিরূপে হইলে পরস্পর সমান হয় আর কোন্ স্থলেই বা একত্র করা যায় না, তাহা নির্ণীত হইয়াছে । পঞ্চম অধ্যায়ে রাশি সকলের সমান নির্ণয়ের বিশেষ উপায় স্থিরীকৃত হইল । প্রথম চারি অধ্যায়ে রাশি শব্দে যাহার কেবল দৈর্ঘ্য অথবা দৈর্ঘ্য ও বিস্তার আছে, তাহাই বস্তুতে হইবে; কিন্তু ৫ম অধ্যায়ে যে কোন পদার্থের অপেক্ষা অথবা গুণিত কণ্ঠিত হইতে পারে, তাহাই রাশি বলিয়া কথিত হইয়াছে । অতএব এ স্থলে ইউক্লিড রাশি শব্দের ব্যাপক ভাব গ্রহণ করিয়াছেন ।

ইউক্লিড রাশি সকলের সমান নির্ণয় করিবার জন্য ৫ম অধ্যায়ে অনুপাত ও সমানুপাতের বিধি প্রকটন করিয়াছেন । তিনি যে প্রণালী অবলম্বন করিয়াছেন, তাহা পাটিক বা বৈজ্ঞানিক প্রণালী হইতে স্তম্ভ । জাহ্নবী সমানুপাতের বিধি শিক্ষা করিবার সময় এক দ্বারে জ্যামিতিক ও বৈজ্ঞানিক প্রণালী অভ্যাস করিলে সমধিক ফল লাভ করিতে পারিবে ।

১ম সঃ । ইউক্লিড অংশ শব্দ দুই অর্থে প্রয়োগ করিয়াছেন ; প্রথম চারি অধ্যায়ে কোন একটি রাশি সজাতীয় অথবা এক রাশি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইলেই প্রথমটি দ্বিতীয়ের অংশ বলিয়া বুঝিতে হইবে;—যথা, সমগ্র রাশিটি তাহার অংশ অপেক্ষা বৃহত্তর (সতঃ ১) । ৫ম অধ্যায়ে কোন ক্ষুদ্রতর রাশি বৃহত্তরের অংশ বলিলে বুঝিতে হইবে যে, বৃহত্তর রাশি কোন নির্দিষ্ট বার ক্ষুদ্রতর রাশি দ্বারা ব্যাপ্ত ।

৩য় সং । সিম্‌সন বলেন যে, ৫ম অধ্যায়ের তৃতীয় ও অষ্টম সংজ্ঞা ইউক্লিডের রচিত নহে ; অপর কোন টীকাকার লিখিয়া দিয়া থাকিবেন ।

৪র্থ সং । চতুর্থ সংজ্ঞার তাৎপর্য্য এই যে, অনুপাতের দুইটি রাশি অবশ্যই এক জাতীয় হইবে ।

৫ম সং । এই সংজ্ঞাটি ইউক্লিড লিখিত সমানুপাতের মূল সূত্র । বীজগণিতে লিখিত ও ইউক্লিডের প্রণীত সমানুপাতের সংজ্ঞা এক রূপ নহে ; বৈজ্ঞিক সংজ্ঞাতে সমানুপাতের একটি রাশি অপরের কোন নির্দিষ্ট গুণিত বা অংশ, অর্থাৎ এক রাশিকে অপর রাশি দ্বারা ভাগ করিলে যে সংখ্যা বা ভগ্ন রাশি উৎপন্ন হয়, তাহা কোন নির্ণেয় সংখ্যা বা ভগ্ন রাশি হইয়া থাকে ; এই রূপ রাশি ও পরস্পর দৃঢ় রাশি* এ উভয় বিধ রাশিরই অনুপাত জ্যামিতিতে কল্পিত হইতে পারে ;—যথা, বর্গক্ষেত্রের ভুজ ও কর্ণ রেখা অথবা বৃত্তের ব্যাস ও পরিধি, ইহাদিগের সম্বন্ধ কোন পরিমিত পূর্ণ বা ভগ্ন রাশি দ্বারা প্রকাশ করা যাইতে পারে না ; কিন্তু ইউক্লিডের ধারানুসারে ইহাদের অনুপাত প্রকাশিত হইতে পারে ও আসন্নতর মান নির্ণীত হইয়া থাকে ।

বিদ্যার্থীরা ষষ্ঠ অধ্যায়ের প্রথম প্রতিজ্ঞা পাঠ করিলে, ইউক্লিড যে কি রূপে এই সংজ্ঞার প্রয়োগ করিয়াছেন তাহা বুঝিতে পারিলে ও জ্যামিতির রীত্যনুসারে সমানুপাতের বিধি উত্তম রূপে তাহাদের হৃদয়ঙ্গম হইবে ।

২য় সং । নবম সংজ্ঞাতে লিখিত হইয়াছে যে, সমানুপাতে অন্তত তিনটি রাশি থাকে ; অর্থাৎ একরূপ সমানুপাতে দ্বিতীয় রাশিটি দুইবার গৃহীত হয় ; একবার উহা প্রথম অনুপাতের পরবর্ত্তী অন্যায় দ্বিতীয় অনুপাতের পূর্ববর্ত্তী হইয়া থাকে । তিনটি রাশি সমানুপাতী হইলে স্পষ্টই বুঝা যাইতেছে যে,

* Incommensurable Quantities.

পরস্পরং ভাজিতযোর্ব্যযোর্ব্যঃ শেষন্তযোঃ স্যাদপবর্ত্তনং সং ।

তেনাপবর্ত্তেন বিভাজিতৌ যৌ তৌ ভাজ্যহারৌ দৃঢ়সংজ্ঞকৌ স্তঃ ।

ভাস্করাচার্য্যঃ ।

উহারা এক জাতীয় রাশি । এই তিনটির মধ্যে দ্বিতীয় রাশিকে প্রথম ও তৃতীয়ের মধ্যসমানুপাতী এবং তৃতীয় রাশিকে প্রথম ও দ্বিতীয়ের তৃতীয়সমানুপাতী বলে ।

এই তিনটি সংজ্ঞা বিদ্যার্থীদিগের জানিয়া রাখা আবশ্যিক ;—

(১) তিনটি রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরের দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অন্তরের সহিত যে অনুপাত, প্রথমের প্রথমের সহিত সেই অনুপাত হইলে পূর্বোক্ত তিনটি রাশিকে সমান্তর সমানুপাতী বলে ।

(২) তিনটি রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরের দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অন্তরের সহিত যে অনুপাত, প্রথমের দ্বিতীয়ের সহিত সেই অনুপাত হইলে পূর্বোক্ত তিনটি রাশিকে সমগুণ সমানুপাতী বলে ।

(৩) তিনটি রাশির মধ্যে প্রথম ও দ্বিতীয়ের অন্তরের দ্বিতীয় ও তৃতীয়ের অন্তরের সহিত যে অনুপাত, প্রথমের তৃতীয়ের সহিত সেই অনুপাত হইলে পূর্বোক্ত তিনটি রাশিকে লয় সমানুপাতী বলে ।

১১শ সং । প্রত্যেক অনুপাতের পরবর্তী রাশি ও তাহার অব্যবহিত পরস্থিত অনুপাতের পূর্ববর্তী রাশি একই হইলে রাশি গুলিকে ক্রমাগত সমানুপাতী বলে ।

সম্মিলিত অনুপাত । এই পারিভাষিক শব্দ ইউক্লিডের লিখিত নহে ; ইহা ইংলণ্ডীয় গণিতবেত্তা সিম্‌সন সাহেব ব্যবহার করিয়াছেন । দ্বিঘাত, ত্রিঘাত ইত্যাদি অনুপাত গুলি প্রত্যেকেই সম্মিলিত অনুপাত ; কেননা, দুইটি সমান অনুপাতের সম্মিলনে দ্বিঘাত, তিনটির সম্মিলনে ত্রিঘাত প্রভৃতি অনুপাত উৎপন্ন হয় ।

পঞ্চম অধ্যায়ের সংজ্ঞার পর যে স্বতঃসিদ্ধ গুলি লিখিত হইয়াছে, তাহা সিম্‌সন সাহেবের রচিত ।

পঞ্চম অধ্যায়ের প্রতিজ্ঞা গুলি চারি অংশে বিভক্ত করা যাইতে পারে । প্রথম ছয়টি প্রতিজ্ঞাতে রাশি সকলের সম-গুণিতের বিষয় লিখিত হইয়াছে । ৭ম হইতে ১০ম ও ১৩শ এবং

১৪শ প্রতিজ্ঞাতে সমান ও অসমান রাশিগুলির পরস্পরের এবং অপর কোন রাশির সহিত কিরূপ অনুপাত, তাহা নির্ণয় হইয়াছে। ১১শ, ১২শ, ১৫শ, ও ১৬শ প্রতিজ্ঞা দ্বারা স্থির হইয়াছে যে, চারি রাশি সমানুপাতী হইলে একান্তরেও তাহার সমানুপাতী হইবে; অবশিষ্ট প্রতিজ্ঞাগুলিতে যোগ, অন্তর ও সমদূর সমানুপাতের বিধি লিখিত হইয়াছে।

ক, খ, গ, ঘ ও ঙ প্রতিজ্ঞা সিম্‌সন সাহেবের রচিত।

১ম, ২য়, ৩য়, ৪র্থ, ৫ম, ৬ষ্ঠ প্র। এই কয়টি প্রতিজ্ঞা পাঠ করিলে স্পষ্ট প্রতীয়মান হইবে যে, ইহাদের দ্বারা পাটীগণিত সম্বন্ধীয় কতকগুলি অনায়াস সাধ্য বিষয় উপপন্ন হইয়াছে। ইদানীন্তন সুবিখ্যাত গণিত বেত্তা ডিমর্গান সাহেব বলেন যে, ১ম প্রতিজ্ঞা দ্বারা এই মাত্র উপপন্ন হইতেছে যে, এক বিঘা ও এক কাঠা যত খানি, ১০ বিঘা ও ১০ কাঠা তাহার দশ গুন।

ইউক্লিড ৬ষ্ঠ অধ্যায়ের নবম প্রতিজ্ঞায় একটা রেখার কোন নির্দিষ্ট অংশ স্থির করিবার উপায় লিখিয়াছেন; কিন্তু ৫ম অধ্যায়ের ৫ম প্রতিজ্ঞার অঙ্কন কালে এই বিষয়টী স্বীকার করিয়াছেন; এই দোষ দেখিয়া সিম্‌সন সাহেব এই প্রতিজ্ঞার চিত্র ভিন্ন রূপে অঙ্কিত করিয়াছেন।

১৮শ প্র। অষ্টাদশ প্রতিজ্ঞা ইউক্লিডের মূল গ্রন্থানুসারে লিখিত হইয়াছে। সিম্‌সন ইহা ভিন্ন রূপে উপপন্ন করিয়াছেন। তিনি বলেন যে, প্রমাণ স্থলে ইউক্লিড স্বীকার করিয়াছেন যে, তিনটি রাশির চতুর্থ সমানুপাতী আর একটা রাশি স্থির হইতে পারে কিন্তু তিনি ৬ষ্ঠ অধ্যায়ের দ্বাদশ প্রতিজ্ঞায় চতুর্থ সমানুপাতী স্থির করিবার উপায় উদ্ভাবন করিয়াছেন; অতএব ইহা পূর্বে স্বীকার করিয়া লওয়া বিধেয় নহে।

সিম্‌সন লিখিত সম্মিলিত সমানুপাত সংক্রান্ত চ, ছ, জ ও ঝ প্রতিজ্ঞা কোন বিদ্যালয়েই পাঠিত হয় না ও ইহাদের বিশেষ আবশ্যকতাও দৃষ্ট হয় না; এ জন্য মূল গ্রন্থে এই সকল লিখিত হইল না।

৬ষ্ঠ অধ্যায় ।

সংজ্ঞা ।

১। যে সকল সরল ঠিকখিক ক্ষেত্রের কোণ গুলি যথাক্রমে পরস্পর সমান, এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী তাহা-
দিগকে সদৃশ বা সমপ্রকৃতিক ক্ষেত্র বলা যায় ।



২। যদি দুই ত্রিভুজ বা সমান্তর ক্ষেত্রের সমান সমান দুইটি কোণের পার্শ্বস্থ বাহুগুলি এক্রূপে সমানুপাতী হয় যে, প্রথম ক্ষেত্রের একটি বাহুতে দ্বিতীয় ক্ষেত্রের একটি বাহুতে যে অনুপাত, দ্বিতীয় ক্ষেত্রের অবশিষ্ট বাহুতে প্রথম ক্ষেত্রের অবশিষ্ট বাহুতে সেই অনুপাত, তাহা হইলে ক্ষেত্র গুলিকে বিহীন ভাবাপন্ন ক্ষেত্র বলে । (যষ্ঠ অধ্যায়ের পরিশিষ্ট দেখ ।)

৩। কোন সরল রেখা অন্ত্য ও মধ্য অনুপাতী রূপে বিভক্ত হইয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, সমস্ত রেখাতে উহার রূহত্তর অংশেতে যে অনুপাত, রূহত্তর অংশেতে ক্ষুদ্রতর অংশেতে সেই অনুপাত । (পরিশিষ্ট দেখ ।)

৪। কোন ক্ষেত্রের শৃঙ্গ হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত লম্বকে ঐ ক্ষেত্রের উন্নতি বলা যায় ।

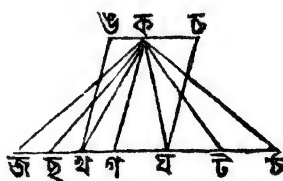


১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

ত্রিভুজ ও সমান্তর ক্ষেত্র সকলের একই উন্নতি হইলে, ত্রিভুজ গুলির অনুপাত ও সমান্তর ক্ষেত্র গুলির অনুপাত, ভূমির অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে ।

কথগ ও কগঘ ত্রিভুজের এবং ঙ্গ ও গচ সমান্তর ক্ষেত্রের একই উন্নতি, অর্থাৎ ক বিন্দু হইতে খগএর উপর লম্ব রেখা উহাদের সাধারণ উন্নতি ; তাহা হইলে খগ ভূমিতে গঘ ভূমিতে যে অনুপাত, কথগ ত্রিভুজে কগঘ ত্রিভুজে সেই অনুপাত এবং ঙ্গ সমান্তর ক্ষেত্রে গচ সমান্তর ক্ষেত্রেও সেই অনুপাত হইবে ।

খঘ রেখার উভয় প্রান্ত বৃদ্ধি কর, ও খছ, ছজ কতিপয় রেখা খগ ভূমির সমান কর ; এবং ঘট, টট আর কতকগুলি



রেখা গঘ ভূমির সমান কর ;

[১ম, ৩।

এবং কছ, কজ, কট, কচ সংযুক্ত করিয়া দাও ।

পরে, গখ, খছ, ছজ পরস্পর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।
কথগ, কছখ, কজছ ত্রিভুজ গুলি পরস্পর সমান ;

[১ম, ৩৮।

এই হেতু জগ ভূমি খগ ভূমির যে পরিমাণে গুণিত, কজগ ত্রিভুজ ও কখগ ত্রিভুজের সেই পরিমাণে গুণিত । এই রূপে, গঠ ভূমি গঘ ভূমির যে গুণিত, কগঠ ত্রিভুজ ও কগঘ ত্রিভুজের সেই গুণিত ;

আর জগ ভূমি গঠ ভূমির সমান হইলে কজগ ত্রিভুজ কগঠ ত্রিভুজের সমান, জগ ভূমি গঠ অপেক্ষা রহস্তর হইলে কজগ ত্রিভুজ কগঠ ত্রিভুজ অপেক্ষা রহস্তর, এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে । [১ম, ৩৮ ।

অতএব এ স্থলে খগ ও গঘ ভূমি এবং কখগ ও কগঘ ত্রিভুজ এই চারি রাশির মধ্যে, প্রথম ও তৃতীয় রাশির অর্থাৎ খগ ভূমির ও কখগ ত্রিভুজের কোন সমগুণিত জগ ভূমি ও কজগ ত্রিভুজ কল্পিত হইয়াছে ; আর দ্বিতীয় ও চতুর্থ রাশির অর্থাৎ গঘ ভূমির ও কগঘ ত্রিভুজের কোন সমগুণিত গঠ ভূমি ও কগঠ ত্রিভুজ কল্পিত হইয়াছে ; এবং উপপন্ন হইয়াছে যে, গজ ভূমি গঠ অপেক্ষা রহস্তর হইলে কজগ ত্রিভুজ কগঠ ত্রিভুজ অপেক্ষা রহস্তর, সমান হইলে সমান ও ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ; সুতরাং খগ ভূমিতে গঘ ভূমিতে যে রূপ, কখগ ত্রিভুজে কগঘ ত্রিভুজে সেই রূপ । [৫ম, সং ৫ ।

আবার, গও সমান্তর ক্ষেত্র কখগ ত্রিভুজের এবং গচ সমান্তর ক্ষেত্র কগঘ ত্রিভুজের দ্বিগুণ হওয়াতে, [১ম, ৪১ । এবং রাশি সকল যে অনুপাত বিশিষ্ট, তাহাদের সম-গুণিতেরাও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হয় বলিয়া, [৫ম, ১৫ ।

ঔগ সমান্তর ক্ষেত্রে গচ সমান্তর ক্ষেত্রে যে রূপ, কথগ
ত্রিভুজে কগঘ ত্রিভুজে সেই রূপ ;

কিন্তু পূর্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, কথগ ত্রিভুজে কগঘ
ত্রিভুজে যে রূপ, থগতে গঘতে সেই রূপ ;

সুতরাং ঔগ সমান্তর ক্ষেত্রে গচ সমান্তর ক্ষেত্রে যে রূপ,
থগ ভূমিতে গঘ ভূমিতে সেই রূপ । [৫ম, ১১।

অতএব ত্রিভুজ ও সমান্তর ক্ষেত্র ইত্যাদি। এখানে
ইহাই উপপাদ্য ।

অনু । ইহা হইতে স্পষ্টই বোধ হইবে যে, ত্রিভুজ ও
সমান্তর ক্ষেত্র সকলের উন্নতি সমান হইলে ত্রিভুজ সকলের
অনুপাত ও সমান্তর ক্ষেত্র সকলের অনুপাত ভূমির অনু-
পাত অনুসারে হইয়া থাকে ।

ত্রিভুজ ও সমান্তর ক্ষেত্র গুলি একরূপ করিয়া স্থাপন কর.
যেন তাহাদের ভূমি এক সরল রেখায় থাকে ; পরে ত্রিভুজ
দ্বয়ের শৃঙ্গ হইতে তাহাদের ভূমির উপর লম্ব টানিলে,
সেই লম্বদ্বয় সমান ও সমান্তর হওয়াতে শৃঙ্গদ্বয় সংযোজক
রেখা ভূমির সমান্তর হইবে ; [১ম, ৩৩।

অনন্তর, পূর্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত করিলে উপপত্তিও তদ্রূপ
হইবে।

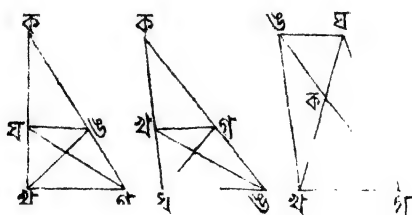
অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা-১। সমান সমান ভূমি বিশিষ্ট
ত্রিভুজ গুলির অনুপাত ও সমান্তর ক্ষেত্র সকলের অনুপাত
তাহাদের উন্নতির অনুপাত অনুসারে হইয়া থাকে ।

ষষ্ঠ অধ্যায় ।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন ত্রিভুজের এক বাহুর সমান্তর একটী রেখা গনিলে, তাহা অন্য দুই বাহুকে বা বর্দ্ধিত অন্য দুই বাহুকে সমানুপাতী রূপে ছেদ করিবে; আবার ত্রিভুজের দুই বাহু বা বর্দ্ধিত দুই বাহু সমানুপাতী রূপে ছিন্ন হইলে, ছেদ বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখা অবশিষ্ট বাহুর সমান্তর হইবে ।

কথগ ত্রিভুজের খগ বাহুর সমান্তর করিয়া ঘঙ রেখা টান; তাহা হইলে খঘতে যকতে যে অনুপাত, গঙতে কঙতে সেই অনুপাত হইবে ।



খঙ, গঘ সংযুক্ত কর ;

তাহা হইলে খঘঙ ত্রিভুজ গঘঙ ত্রিভুজের সমান হইবে ;
 . কেননা, উভয়েই ঘঙ ভূমির উপরিস্থ এবং ঘঙ ও খগ
 এই দুই পরস্পর সমান্তর রেখার মধ্যস্থ হইয়াছে; [১ম, ৩৭।

আর, কঘঙ অন্য একটী ত্রিভুজ ;

অতএব, সমান সমান রাশির অন্য কোন রাশির সহিত

অনুপাত একই হইয়া থাকে বলিয়া, [৫৪, ৭।

খঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে যে রূপ, গঘঙ ত্রিভুজে
কঘঙ ত্রিভুজে সেই রূপ ;

কিন্তু খঘতে ঘকতে যে রূপ, খঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে
সেই রূপ,

কেননা, এই দুই ত্রিভুজের উন্নতি, অর্থাৎ ঙ শীর্ষ বিন্দু
হইতে কখএর উপর লম্ব একই রেখা হওয়াতে, ত্রিভুজ
দ্বয়ের অনুপাত তাহাদের ভূমির অনুপাত অনুসারে
হইবে। [৬৪, ১।

এই কারণে, গঙতে ঙকতে যে রূপ, গঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ
ত্রিভুজে সেই রূপ ;

অতএব খঘতে ঘকতে যে রূপ, গঙতে ঙকতে সেই রূপ।

[৫৫, ১১।

অনন্তর যেন খঘতে ঘকতে যে রূপ, গঙতে ঙকতে
সেই রূপ হইল ; ঘঙ সংযুক্ত কর ; তাহা হইলে ঘঙ
রেখা খগএর সমান্তর হইবে।

পূর্ব প্রকার চিত্র অঙ্কিত কর।

এক্ষণে, খঘতে ঘকতে যে রূপ, গঙতে ঙকতে সেই রূপ
বলিয়া,

এবং খঘতে ঘকতে যে রূপ, খঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে
সেই রূপ হওয়াতে, [৬৪, ১।

ও গঙতে ঙকতে যে রূপ, গঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে
সেই রূপ হওয়ায় ; [৬৪, ১।

খঘঙ ত্রিভুজে কঘঙ ত্রিভুজে যে রূপ, গঘঙ ত্রিভুজে
কঘঙ ত্রিভুজে সেই রূপ ; [৫ম, ১১ ।

অর্থাৎ খঘঙ ও গঘঙ এই দুই ত্রিভুজের প্রত্যেকেই কঘঙ
ত্রিভুজের সহিত এক অনুপাত বিশিষ্ট ;

অতএব খঘঙ ত্রিভুজ গঘঙ ত্রিভুজের সহিত সমান ;
[৫ম, ৯ ।

কিন্তু সমান সমান ত্রিভুজ এক ভূমির উপর এক পার্শ্বে
থাকিলে পরস্পর সমান্তর দুই রেখার মধ্যস্থ হইবে ;

[১ম, ৩৯ ।

সুতরাং ঘঙ রেখা খগএর সমান্তর ।

অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২ । কোন ত্রিভুজের ভূমির সমান্তর একটা রেখা
টানিলে, তাহা যদি অপর দুই বাহুকে ছেদ করে, তবে বাহুদ্বয়
যে অনুপাত বিশিষ্ট, যথাক্রমে তাহাদের এক একটা খঙও
সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে ।

৩ । কগখ, কঘখ এই দুই ত্রিভুজের সাধারণ ভূমিস্থ ও বিন্দু
হইতে কগ ও কঘএর সমান্তর দুইটা রেখা টান ; এই দুই রেখা
যথাক্রমে গখ ও সখএর সহিত যেন চ ও ছ বিন্দুতে সংলগ্ন
হইল । প্রমাণ কর যে, চছ, গঘএর সমান্তর ।

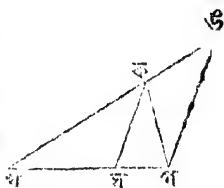
৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ কোণ যদি এক সরল রেখা
দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং সেই সরল রেখা যদি ভূমিকে
ছেদ করে, তবে ত্রিভুজের অন্য দুই বাহু যে অনুপাত

বিশিষ্ট, ভূমির দুই খণ্ডও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে; আবার ত্রিভুজের দুই বাহুর যে অনুপাত, ভূমির দুই খণ্ডের সেই অনুপাত হইলে, ভূমির ছেদ বিন্দুর ও শীর্ষ কোণের যোজক রেখা শীর্ষ কোণকে দ্বিখণ্ড করিবে ।

কয সরল রেখা যেন কখগ ত্রিভুজের থকগ শৃঙ্গস্থ কোণ দ্বিখণ্ড করিয়া য বিন্দুতে ভূমিকে ছেদ করিয়াছে ; থক ও কগ যে অনুপাত বিশিষ্ট, থঘ ও ঘগ সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে ।

গ বিন্দু দিয়া যকএর সমান্তর গঙ রেখা টান ; [১ম, ৩১ ।
থক বাহু বর্দ্ধিত করিলে তাহা যেন ও বিন্দুতে গঙের সহিত মিলিত হইল ।



পরে, কয ও ওগ সমান্তর রেখা ছয়ের সহিত কগ রেখা সংলগ্ন হইয়াছে বলিয়া,

কগঙ ও গকয একান্তর কোণ দ্বয়ঃ পরস্পর সমান ;

[১ম, ২৯ ।

কিন্তু গকয কোণ থকয কোণের সমান কম্পিত হইয়াছে ;

এই হেতু থকয কোণ কগঙ কোণের সমান ; [স্বতঃ ১ ।

আবার কয, ওগ সমান্তর রেখার উপর থকঙ রেখার পাত হওয়াতে, বহিস্থ থকয কোণ অন্তরস্থ কঙগ কোণের সমান ;

[১ম, ২৯ ।

The two alternate angles.

কিন্তু উপপন্ন হইয়াছে যে, খকষ কোণ কগঙ কোণের সমান ;

এই হেতু কগঙ কোণ কঙগ কোণের সমান ; [স্বতঃ ১।

অতএব কগ রেখা কঙুর সমান । [১ম, ৬।

পরে, কষ রেখা, ঙখগ ত্রিভুজের ঙগ বাহুর সমান্তর বলিয়া, [অঙ্কন ।

খকতে কঙতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ২।

কিন্তু কঙ রেখা কগএর সমান ;

সুতরাং খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ ।

অনন্তর যেন খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হইল ; কষ সংযুক্ত কর । খকষ কোণ কঘ রেখা দ্বারা দ্ব্যখণ্ডিত হইবে ।

পূর্ব প্রকার চিত্র অঙ্কিত কর ।

পরে, খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হওয়ায়,

আর কঘ রেখা ঙগএর সমান্তর বলিয়া, খকতে কঙতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হওয়াতে ; [৬ষ্ঠ, ২।

খকতে কগতে যে রূপ, খকতে কঙতে সেই রূপ ;

[৫ম, ১১।

এই হেতু কগ রেখা কঙুর সমান ; [৫ম, ৯।

অতএব কঙগ কোণ কগঙ কোণের সমান ; [১ম, ৫।

কিন্তু কঙগ কোণ বহিস্থ খকঘ কোণের সমান ; এবং কগঙ কোণ তাহার একান্তর গকঘ কোণের সমান ; [১ম, ২৯।

সুতরাং, থকঘ কোণ গকঘ কোণের সমান ; [স্বতঃ ১।
অর্থাৎ থকগ কোণ কঘ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে ।
অতএব কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৪ । একটি সরল রেখা কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গস্থ
কোণ দ্বিখণ্ড করিয়া ভূমি ছেদ করিলে, ত্রিভুজের দুই বাহুর যে
অনুপাত, শীর্ষ কোণ দ্বিখণ্ডকারক রেখা দ্বারা উৎপন্ন ত্রিভুজ
দ্বয়ও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে ।

ক প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ যদি এক সরল রেখার
দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং সেই রেখা যদি বর্দ্ধিত ভূমিকে
ছেদ করে, তবে ত্রিভুজের অন্য দুই বাহুর যে অনুপাত
বিশিষ্ট, ভূমির এক এক প্রান্ত ও দ্বিখণ্ডকারক রেখার
মধ্যস্থিত রেখাদ্বয়ও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে ;
আর ত্রিভুজের দুই বাহুর যে অনুপাত, যদি সমস্ত
বর্দ্ধিত ভূমি ও বর্দ্ধিত অংশের সেই অনুপাত হয়, তবে
শৃঙ্গ হইতে ছেদিন্দু পর্য্যন্ত অঙ্কিত রেখা, ত্রিভুজের
বহিস্থ কোণকে দ্বিখণ্ড করিবে ।

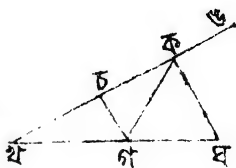
কথগ ত্রিভুজের থক বাহু ও পর্য্যন্ত বর্দ্ধিত কর এবং
বহিস্থ গকও কোণকে কঘ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড কর । কঘ
রেখা যেন ঘ বিন্দুতে বর্দ্ধিত ভূমির সহিত সংলগ্ন হইল ;

তাহা হইলে থকতে কগতে যে রূপ, থঘতে ঘগতে সেই রূপ হইবে ।

গ বিন্দু দিয়া ঘকএর
সমান্তর গচ রেখা টান ;

[১ম, ৩১।

থ কএর উপর চ বিন্দুতে যেন থ' গ' ঘ
গচ রেখার সম্পাত হইল ;



তাহা হইলে কগ রেখা কঘ, চগ সমান্তর রেখাদ্বয়ের
সহিত সংলগ্ন হইয়াছে বলিয়া কগচ কোণ তাহার
একান্তর গকঘ কোণের সমান ;

[১ম, ২৯।

কিন্তু গকঘ কোণ ঘকঙ কোণের সমান কল্পিত হইয়াছে ;
অতএব ঘকঙ কোণ কগচ কোণের সমান ।

[স্বতঃ ১।

আবার কঘ, চগ সমান্তর রেখাদ্বয়ের উপর চকঙ রেখার
পাত হওয়াতে, বহিস্থ ঘকঙ কোণ অন্তরস্থ কচগ কোণের
সমান ;

[১ম, ২৯।

কিন্তু ঘকঙ কোণ কগচ কোণের সমান উপপন্ন হইয়াছে ;

এই হেতু কগচ কোণ কচগ কোণের সমান ;

[স্বতঃ ১।

সুতরাং কগ রেখা কচ রেখার সমান ।

[১ম, ৬।

পরে, কঘ রেখা থচগ ত্রিভুজের চগ ভূমির সমান্তর
হওয়াতে,

[অঙ্কন।

থকতে কচতে যে রূপ, থঘতে ঘগতে সেই রূপ ;

[৬ষ্ঠ, ২।

কিন্তু কচ রেখা কগএর সমান ;

সুতরাং থকতে কগতে যে রূপ, থঘতে ঘগতে সেই রূপ ।

[৫ম, ৭।

অনন্তর যেন খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হইল ; যক সংযুক্ত কর ; তাহা হইলে বহিস্থ গকঙ কোণ যক রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে ।

পূৰ্ব্ব রূপ চিত্র অঙ্কিত কর ।

এক্ষণে, খকতে কগতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ হওয়াতে, [কম্পনা ।

ও খকতে কচতে যে রূপ, খঘতে ঘগতে সেই রূপ বলিয়া, [৬ষ্ঠ, ২ ।

খকতে কগতে যে রূপ, খকতে কচতে সেই রূপ ; [৫ম, ১১ ।

এই হেতু কগ রেখা কচ রেখার সমান, [৫ম, ৯ ।

সুতরাং কচগ কোণ কগচ কোণের সমান ; [১ম, ৫ ।

কিন্তু কচগ কোণ বহিস্থ ঙকঘ কোণের সমান ; [১ম, ২৯ ।

এবং কগচ কোণ তাহার একান্তর গকঘ কোণের সমান ; [১ম, ২৯ ।

সুতরাং গকঘ কোণ যকঙ কোণের সমান, [স্বতঃ ১ ।

অর্থাৎ গকঙ কোণ যক রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে ।

অতএব কোন ত্রিভুজের বহিস্থ কোণ ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

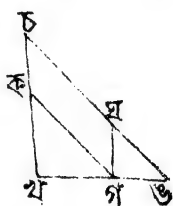
অঃ প্রঃ—৫ । এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি খকগ কোণ কহ রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ড করা যায়, তবে খঘ রেখা গ ও ছ বিন্দুতে লয় বিভাগ অনুসারে বিভক্ত হইবে ; অর্থাৎ সমস্ত রেখাতে এক পার্শ্বের ংশেতে যে অনুপাত, অপর পার্শ্বের ংশে মধ্য ংশে সেই অনুপাত হইবে ।

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

পরস্পর সমান কোণী ত্রিভুজ সকলের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহুগুলি সমানুপাতী, এবং যে যে বাহু সমান সমান কোণের সম্মুখীন, তাহারা সবর্গীয় অর্থাৎ অনুপাত গুলির পূর্ববর্তী বা পরবর্তী হইবে ।

কথগ, ঘগঙ যেন দুইটি পরস্পর সমান কোণী ত্রিভুজ ; ইহাদের কোণ গুলির মধ্যে কথগ কোণ ঘগঙ কোণের সমান ও কগথ কোণ গঙগ কোণের সমান ; সুতরাং থকগ কোণ গঘঙ কোণের সমান ; [১ম, ৩২ ।

তাহা হইলে কথগ, ঘগঙ ত্রিভুজের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু সমানুপাতী এবং যে সকল বাহু সমান সমান কোণের সম্মুখীন, তাহারা সবর্গীয় হইবে ।



ঘগঙ ত্রিভুজ এক্রূপে স্থাপিত কর, যেন গঙ বাহু থগ বাহুর সহিত সংলগ্ন এবং এক রেখাস্থ হয় । [১ম, ২২-।

পরে, থগক কোণ গঙঘ কোণের সমান বলিয়া, [কং । প্রত্যেকের সহিত কথগ কোণ যোগ করিলে, একত্রকৃত কথগ ও থগক কোণ, একত্রকৃত কথগ ও গঙঘ কোণের সমান হইবে ; [স্বতঃ ২ ।

কিন্তু কথগ ও থগক কোণ দুই সমকোণের হান ; [১ম, ১৭ । এই হেতু কথগ ও গঙঘ এই দুই কোণ একত্র যোগে দুই

সমকোণ অপেক্ষা নূন ; অতএব ঋক, ওঘ বর্দ্ধিত করিলে
সংলগ্ন হইবে । [স্বতঃ ১২ ।

তাহারা বর্দ্ধিত হইয়া যেন চ বিন্দুতে সংলগ্ন হইল ।

পরে, কখগ কোণ ঘগঙ কোণের সমান হওয়াতে,
[কল্পনা ।

খচ রেখা গঘএর সমান্তর ; [১ম, ২৮ ।

আর কগখ কোণ ঘঙগ কোণের সমান বলিয়া, [কল্পনা ।

কগ রেখা চঙর সমান্তর ;

এই হেতু চকগঘ একটি সমান্তর ক্ষেত্র ;

অতএব কচ রেখা গঘএর এবং কগ, চঘএর সমান ।

[১ম, ৩৪ ।

আবার কগ রেখা চখঙ ত্রিভুজের চঙ বাহুর সমান্তর
বলিয়া,

খকতে কচতে যে রূপ, খগতে গঙতে সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ২ ।

কিন্তু কচ রেখা গঘএর সমান ;

অতএব খকতে গঘতে যে রূপ, খগতে গঙতে সেই রূপ,

[৫ম, ৭ ।

এবং একান্তরে, কখতে খগতে যে রূপ, ঘগতে গঙতে সেই
রূপ । [৫ম, ১৬ ।

পুনরায়, গঘ রেখা খচএর সমান্তর হওয়াতে,

খগতে গঙতে যে রূপ, চঘতে ঘঙতে সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ২ ।

কিন্তু চঘ রেখা কগএর সমান ;

এ জন্য, খগতে গঙতে যে রূপ, কগতে ঘঙতে সেই রূপ ;

[৫ম, ৭ ।

এবং একান্তরে, খগতে গকতে যে রূপ, গঙতে উঘতে সেই রূপ । [৫ম, ১৬ ।

পরে, কথতে খগতে যে রূপ, ঘগতে গঙতে সেই রূপ প্রতিপন্ন হইয়াছে বলিয়া,

এবং খগতে গকতে যে রূপ, গঙতে উঘতে সেই রূপ হওয়াতে,

ক্রম সমানুপাতে, খকতে কগতে যে রূপ, গঘতে ঘঙতে সেই রূপ । [৫ম, ২২ ।

অতএব পরস্পর সমান কোণী ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩ । ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে একটি সরল রেখা টানিলে, উহা যদি ভূমিকে দ্বিখণ্ড করে, তবে ভূমির সমান্তর ও দুই ভুজ দ্বারা সীমা বদ্ধ যাবতীয় রেখা, প্রথমোক্ত রেখা দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে ।

৭ । সমান কোণী ত্রিভুজ সকলের শৃঙ্গ হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে, ভূমি সকল পরস্পর যে অনুপাত বিশিষ্ট, লম্ব গুলিও পরস্পর সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে ।

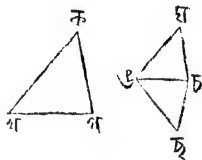
৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের প্রত্যেক কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি ক্রমে অন্যের প্রত্যেক কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলির সহিত সমানুপাতী হইলে, ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী হইবে এবং যে যে কোণ সর্বগাণ্য বাহুর সম্মুখীন, তাহারা পরস্পর সমান হইবে ।

কথগ, ঘঙচ ত্রিভুজের বাহু গুলি যেন সমানুপাতী অর্থাৎ কথতে খগতে যে অনুপাত, ঘঙতে উচতে সেই

অনুপাত এবং খণ্ডতে গণ্ডতে যে অনুপাত, ঔচতে চষতে সেই অনুপাত ; অতএব ক্রম সমানুপাতে, খণ্ডতে কণ্ডতে যে অনুপাত, ঔঘতে ঘচতে সেই অনুপাত ; তাহা হইলে, কখগ ও ঘগ্গচ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী হইবে এবং উহাদের যে যে কোণ সর্বগীয় বাহুর সম্মুখীন, তাহারা পরস্পর সমান হইবে ; অর্থাৎ কখগ কোণ ঘগ্গচ কোণের, খগক কোণ ঔচঘ কোণের এবং খকগ কোণ ঔঘচ কোণের সমান হইবে।

ঔচ সরল রেখার ঔ বিন্দুতে কখগ কোণের সমান চগ্গচ কোণ এবং চ বিন্দুতে খগক কোণের সমান ঔচঘ কোণ কর : [১ম, ২৩।



অতএব অবশিষ্ট ঔচঘ কোণ অবশিষ্ট খকগ কোণের সমান হইবে। [১ম, ২৩।

সুতরাং, কখগ ও ঔচঘ ত্রিভুজ সমান কোণী ; এবং তাহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহুগুলি সমানুপাতী ; [৬ষ্ঠ, ৪।

অতএব কখতে খগতে যে রূপ, চ্গতে ঔচতে সেই রূপ, আর কখতে খগতে যে রূপ, ঘগ্গতে ঔচতে সেই রূপ : [কল্পনা।

এই হেতু, ঘগ্গতে ঔচতে যে রূপ, চ্গতে ঔচতে সেই রূপ ; [৫ম, ১১।

সুতরাং, ঘগ্গ রেখা চ্গের সমান। [৫ম, ৯

এই কারণে, ঘচ ও চ্চ রেখা দ্বয় পরস্পর সমান।

পরে, ঘণ্টা ও ছণ্টা এই দুই ত্রিভুজের ঘণ্টা বাহু ছণ্টা বাহুর সমান এবং ণ্টা সামান্য বাহু বলিয়া,

ঘণ্টা, ণ্টা এই দুই বাহু ক্রমে ছণ্টা, ণ্টা বাহু দ্বয়ের সমান ;
এবং ঘাচ ভূমি ছাচ ভূমির সমান ;

অতএব ঘণ্টা কোণ ছণ্টা কোণের সমান ; [১ম, ৮ ।

এবং সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ গুলিও যথা-
ক্রমে সমান ; [১ম, ৪ ।

অতএব ঘাচ কোণ ছাচ কোণের ও ণ্টা ঘাচ কোণ ণ্টাচ কোণের সমান ।

আবার ঘণ্টা কোণ ছণ্টা কোণের সমান বলিয়া,

এবং ছণ্টা কোণ কথগ কোণের সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।
কথগ কোণ ঘাচ কোণের সমান । [স্বতঃ ১ ।

এই কারণে, কগথ কোণ ঘাচ কোণের সমান এবং ক কোণ
ঘ কোণের সমান ।

সুতরাং কথগ ও ঘাচ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী ।
অতএব দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৮ । এই প্রতিজ্ঞা প্রয়োগ দ্বারা প্রমাণ কর যে,
কোন ত্রিভুজের বাহু সকল দ্বিগুণ করিয়া খণ্ডন বিন্দু গুলি
পরস্পর সংযুক্ত করিলে যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহা প্রথম
ত্রিভুজের কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে ।

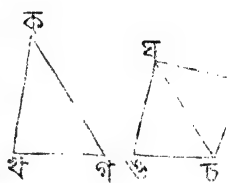
৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের একটী কোণ
অন্যের একটী কোণের সমান হয় এবং সমান সমান
কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী হয়, তবে

ত্রিভুজ দুইটী পরস্পর সমান কোণী হইবে এবং সমান সমান কোণ গুলি সবগীয় বাহুর সম্মুখে থাকিবে।

কথগ, ঘঙচ এই দুই ত্রিভুজের একের থকগ কোণ অন্যের ঙঘচ কোণের সমান এবং এই কোণ দুয়ের পাশ্বে স্থ বাহু গুলি সমানুপাতী, অর্থাৎ থকতে বগতে যে অনুপাত, ঙঘতে ঘচতে সেই অনুপাত ; তাহা হইলে কথগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে অর্থাৎ কথগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং থকক কোণ ঙচঘ কোণের সমান হইবে।

থকগ অথবা ঙঘচ কোণের সমান করিয়া, ঘচ রেখার ঘ বিন্দুতে চঘছ কোণ কর, আর ঐ রেখার চ বিন্দুতে কগথ কোণের সমান ঘচছ কোণ কর ;



[১ম,

এই হেতু অবশিষ্ট থ কোণ অবশিষ্ট ছ কোণের সমান।

[১ম, ১২

অতএব কথগ ও ঘচচ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী এজনা থকতে বগতে যে রূপ, ছঘতে ঘচতে সেই রূপ।

[৬ষ্ঠ, ৪

বিস্তৃত থকতে বগতে যে রূপ, ঙঘতে ঘচতে সেই রূপ।

[কল্পনা।

এই হেতু ঙঘতে ঘচতে যে রূপ, ছঘতে ঘচতে সেই রূপ।

[৫ম, ১১

সুতরাং ঔষ রেখা ছ্যএর সমান ; [৫ম, ৯।

আর ঘচ রেখা ঘচুচ ও ঘচুচ ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ বাহু ;
অতএব ঔষ, ঘচ এই দুই বাহু যথাক্রমে ছ্য, ঘচ বাহুর
সমান ;

এবং ঔষচ কোণ ছ্যচ কোণের সমান ; [অঙ্কন।

এই হেতু ঔচ ভূমি ছচ ভূমির সমান ও ঘচুচ ত্রিভুজ
ঘচুচ ত্রিভুজের সমান,

এবং সমান সমান বাহুর সম্মুখীন কোণ গুলি যথাক্রমে
পরস্পার সমান : [১ম, ৪।

অতএব ঘচুচ কোণ ঘচুচ কোণের এবং ছ কোণ ঔ
কোণের সমান ।

কিন্তু ঘচুচ কোণ কগথ কোণের সমান : [অঙ্কন।

অতএব কগথ কোণ ঘচুচ কোণের সমান : [স্বতঃ ১।

আর থকগ কোণ ঔষচ কোণের সমান ; [কংপনা।

সুতরাং অবশিষ্ট থ কোণ অবশিষ্ট ঔ কোণের সমান ।

অতএব যদি দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে উইই
উপপাদ্য।

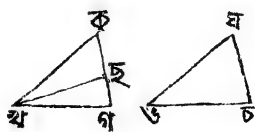
অঃ প্রঃ-৯। কথ সরল রেখা গ ও ঘ বিন্দুতে একতাপ
বিন্দু হইয়াছে যে, কথ : কগ : : কগ : কঘ । যদি ক বিন্দু
হইতে কথএর সহিত একটি কোণ করিয়া কগ রেখা টানা যায়
'ও' তাহা যদি কগএর সমান হয়, তবে কগ কোণ গ রেখা দ্বারা
বিশিষ্ট হইবে ।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যদি দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের একটি কোণ অন্যের একটি কোণের সমান হয় এবং আর এক একটি কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী হয়, তবে অবশিষ্ট এক একটি কোণ প্রত্যেকে এক সমকোণের তুল্য বা অনুল্যন হইলে কিম্বা তাহাদের কোনটী সমকোণ হইলে, ত্রিভুজ দুইটী পরস্পর সমান কোণ বিনিম্বিত হইবে এবং যে যে কোণের পার্শ্বস্থ বাহু অনুপাতী, সেই সেই কোণ সমান হইবে।

কথগ, ঘঙচ এই দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের একটি কোণ অন্যের একটি কোণের সমান, অর্থাৎ কথগ কোণ ঙ্ঘচ কোণের সমান এবং কথগ, ঘঙচ এই দুই কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী অর্থাৎ কথতে থগতে যে অনুপাত, ঘঙতে ঙ্ঘচতে সেই অনুপাত । প্রথমতঃ অবশিষ্ট গ ও চ কোণ প্রত্যেকে এক সমকোণের তুল্য হইলে, কথগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দুইটী পরস্পর সমান কোণী হইবে, অর্থাৎ কথগ কোণ ঘঙচ কোণের এবং অবশিষ্ট গ কোণ অবশিষ্ট চ কোণের সমান হইবে।

কথগ কোণ যদি ঘঙচ কোণের সমান না হয়, তবে তাহাদের মধ্যে অবশ্যই একটি অনাপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ;



কথগ যেন রহন্তর হইল ।

কথ রেখার থ বিন্দুতে ঘণ্টচ কোণের সমান কথছ
কোণ কর । [১ম, ২৩ ।

পরে, ক কোণ ঘ কোণের সমান হওয়াতে, [কম্পনা ।
এবং কথছ কোণ ঘণ্টচ কোণের সমান বলিয়া, [অঙ্কন ।
অবশিষ্ট কথখ কোণ, অবশিষ্ট ঘচঙ কোণের সমান ;
এই হেতু, কথছ ও ঘণ্টচ এই দুইটা ত্রিভুজ সমান কোণী ;
অতএব কথতে থছতে যে রূপ, ঘণ্টতে ঙ্চতে সেই রূপ ।
[১৪, ৪ ।

কিন্তু কথতে থগতে যে রূপ, ঘণ্টতে ঙ্চতে সেই রূপ ; [কথ ।
অতএব কথতে থগতে যে রূপ, কথতে থছতে সেই রূপ ।
[৫ম, ১১ ।

এই হেতু থগ রেখা থছগর সমান ; [৫ম, ৯ ।
তজ্জনা, থগছ কোণ থছগ কোণের সমান ; [১ম, ৫ ।
কিন্তু থগছ কোণ এক সম কোণ অপেক্ষা নূন ; [কম্পনা ।
এই হেতু থছগ কোণ এক সম কোণ অপেক্ষা নূন ;
অতএব সন্নিহিত কথখ কোণ অবশ্যই এক সম কোণ
অপেক্ষা রহন্তর হইবে ; [১ম, ১৩

কিন্তু প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, কথখ কোণ চ কোণের সমান,
এই হেতু চ কোণ এক সম কোণ অপেক্ষা রহন্তর ;
কিন্তু চ কোণ এক সম কোণ অপেক্ষা নূন কম্পিত
হইয়াছে ;

সুতরাং, এরূপ হওয়া যুক্তি বিরুদ্ধ ।

অতএব কথগ ও ঘণ্টচ কোণ অসমান নহে অর্থাৎ তাহারা

পরস্পর সমান ;

আর ক কোণ ঘ কোণের সমান ; [কম্পনা ।

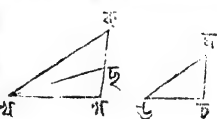
এই হেতু অবশিষ্ট গ কোণ অবশিষ্ট চ কোণের সমান ;

অতএব কখগ ও ঘঙচ এই দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান
কোণী ।

দ্বিতীয়ত, গ ও চ কোণ প্রত্যেকে এক সম কোণ
অপেক্ষা অস্থান হইলে, কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর
সমান কোণী হইবে । পূর্ব

প্রকরণের ন্যায় চিত্র আঙ্কিত

করিলে, সেই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, খগ রেখা খছ এর সমান ;



এই হেতু খগছ কোণ খছগ কোণের সমান : [১ম, ৫ ।

কিন্তু খগছ কোণ এক সম কোণের স্থান নহে : [কম্পনা ।

সুতরাং খছগ কোণ এক সম কোণের স্থান নহে ;

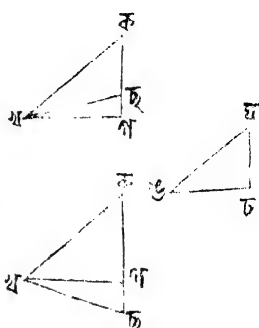
অর্থাৎ খগছ ত্রিভুজের দুইটা কোণের সমষ্টি দুই সম-
কোণের স্থান নহে ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব । [১ম, ১৭ ।

অতএব প্রথম প্রকরণের ন্যায় সপ্রমাণ হইবে যে, কখগ
ও ঘঙচ এই দুই ত্রিভুজ সমান কোণী ।

তৃতীয়ত, গ ও চ এই দুই কোণের মধ্যে গ কোণ সম
কোণ হইলে, কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী
হইবে ।

কথগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ
দ্বয় যদি সমান কোণী না
হয়, তবে ঘঙচ কোণের
সমান করিয়া কথ রেখার
খ বিন্দুতে কথছ কোণ
অঙ্কিত কর । [১ম, ২৩।



তাহা হইলে, প্রথম প্রক-

রণের ন্যায় সমপ্রমাণ হইবে যে, খগ রেখা খছএর সমান :

এই হেতু খগছ কোণ খছগ কোণের সমান ; [১ম, ৫।

কিন্তু খগছ কোণ এক সম কোণ ; [কম্পনা।

এই হেতু খছগ কোণ এক সম কোণ ;

অর্থাৎ খগছ ত্রিভুজের দুই কোণের সমষ্টি দুই সম কোণের
সমান ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব । [১ম, ১৭।

সুতরাং কথগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী।
অতএব যদি দুই ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

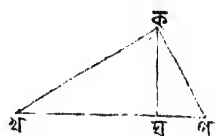
ত: প্রঃ—১০। এই প্রতিজ্ঞায় লিখিত দুইটি ত্রিভুজের
তদ্বিশিষ্ট কোণগুলি যদি এক জাতীয় না হয়, তবে
প্রমাণ কর যে, তাহাদের যোগ ফল দুই সম কোণের সমান
হইবে। (ত্রিকোণমিতি পাঠের সময় ৭ম ও এই অনুশীলনার্থ
প্রতিজ্ঞাটির বিশেষ আবশ্যকতা দৃষ্ট হইবে।)

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন সম কোণী ত্রিভুজের সম কোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে, লম্বের দুই পার্শ্বস্থ ত্রিভুজ দ্বয় সমুদয় ত্রিভুজের এবং পরস্পরের সদৃশ হইবে ।

কথগ ত্রিভুজের খকগ কোণ সম কোণ ; ক বিন্দু হইতে ভূমির উপর কখ লম্ব টান ; তাহা হইলে যকথ, যকগ ত্রিভুজ দ্বয় সমুদয় কথগ ত্রিভুজের ও পরস্পরের সদৃশ হইবে ।

খকগ ও যকথ এই দুই কোণ,
প্রত্যেকে সম কোণ হওয়াতে,
পরস্পর সমান, [স্বতঃ ১১ ।
আর খ কোণ কথগ ও যকথ
ত্রিভুজ দ্বয়ের সামান্য কোণ ;



এই হেতু অবশিষ্ট কগথ কোণ, অবশিষ্ট যকথ কোণের সমান । [১ম, ৩২ ।

সুতরাং কথগ ও যকথ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সমান কোণী ;
এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী
হইয়া থাকে ; [৬ষ্ঠ, ৪ ।

অতএব ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ । [৬ষ্ঠ, সং ১ ।

এই রূপে উপপন্ন হইবে যে, যকগ ও কথগ ত্রিভুজ দ্বয়
পরস্পর সমান কোণী ও সদৃশ ;

আর যকথ ও যকগ এই দুই ত্রিভুজ প্রত্যেকে কথগ

ত্রিভুজের কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট ও তাহার সদৃশ হওয়াতে, পরস্পর সমান কোণী ও সদৃশ হইয়াছে ।

অতএব কোন সম কোণী ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অনুমান । এই প্রতিজ্ঞা হইতে সহজেই প্রতিপন্ন হইবে যে, কোন সম কোণী ত্রিভুজের সম কোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব, ভূমির দুই খণ্ডের মধ্য সমানুপাতী এবং ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু, ভূমির ও সেই বাহু সম্বিহিত ভূমি খণ্ডের মধ্য সমানুপাতী ।

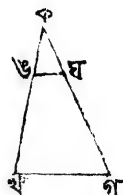
যথাক ও যকগ ত্রিভুজ পরস্পর সমান কোণী হওয়াতে, থযতে যকতে যে রূপ, যকতে যগতে সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ৪ ।
আবার কথগ ও যথক ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী বলিয়া,
থগতে থকতে যে রূপ, থকতে থযতে সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ৪ ॥
আর কথগ ও যকগ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী হওয়ায়,
থগতে গকতে যে রূপ, গকতে গযতে সেই রূপ । [৬ষ্ঠ, ৪ ।

অঃ প্রঃ—১১ । কোন দুই বৃত্ত যদি পরস্পর বহির্দিকে স্পর্শ করে, তবে তাহাদের সাধারণ স্পর্শক রেখার দুই স্পর্শ বিন্দুর মধ্যস্থ খণ্ড, বৃত্ত দুয়ের ব্যাসের মধ্য সমানুপাতী হইবে ।

৯ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

এক নির্দিষ্ট সরল রেখার কোন নির্দিষ্ট অংশ ছেদ করিতে হইবে ।

কথ যেন এক নির্দিষ্ট সরল রেখা ;
ইহার কোন নির্দিষ্ট অংশ ছেদ
করিতে হইবে ।



ক বিন্দু হইতে কগ রেখা একরূপ করিয়া
টান, যেন তাহা কথএর সহিত একটি
কোণ উৎপন্ন করে ; কগ রেখার যে কোন
স্থানে ঘ বিন্দু কম্পনা কর ; এবং কথ রেখা প্রস্তাবিত
অংশের যে পরিমাণে গুণিত, কগ রেখাকে কঘএর সেই
পরিমাণে গুণিত কর ; খগ সংযুক্ত কর এবং গথএর
সমান্তর ঘঙ রেখা টান ।

কঙ, কথ রেখার সম্পাদ্য অংশ ।

ঙঘ রেখা কথগ ত্রিভুজের খগ বাহুর সমান্তর বলিয়া,
[অঙ্কন ।

গযতে ঘকতে যে সম্বন্ধ, খঙতে ঙকতে সেই সম্বন্ধ ; [৬৪, ২ ।
এবং যোগ সমানুপাতে, গকতে কঘতে যে সম্বন্ধ, খকতে
কঙতে সেই সম্বন্ধ । [৫ম, ১৮ ।

কিন্তু কগ রেখা কঘএর কোণ গুণিত ; [অঙ্কন ।
এই হেতু খক রেখা কঙর সেই গুণিত ; [৫ম, ঘ ।
অর্থাৎ কঘ রেখা কগএর যে অংশ, কঙ রেখা কথএর সেই
অংশ ।

অতএব নির্দিষ্ট কথ রেখার প্রস্তাবিত অংশ ছেদ করা
হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১২ । কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজের শৃঙ্গ হইতে ভূমি
য্যাস্ত একটি রেখা একরূপে টানিতে হইবে, যেন তদ্বারা নির্দিষ্ট
ত্রিভুজের পঞ্চমাংশ একটি ত্রিভুজ ছেদ করা হয় ।

୧୦ ଅତିଛବି—ସମ୍ଭାଷଣ ।

এক নির্দিষ্ট সরল রেখাকে অন্য কোন নির্দিষ্ট বিভক্ত সরল রেখার সদৃশ করিয়া ভাগ করিতে হইবে ; অর্থাৎ, বিভক্ত সরল রেখার অংশ গুলি পরস্পর যে যে অনুপাত বিশিষ্ট, বিভাজ্য রেখার অংশ গুলিকেও সেই সেই অনুপাত বিশিষ্ট করিতে হইবে ।

কথ নির্দিষ্ট বিভাজ্য সরল রেখা ও কণ নির্দিষ্ট
বিভক্ত সরল রেখা : কথকে কণের সদৃশ করিয়া ভাগ
করিতে হইবে।

কর্ণ সরল রেখা যেন ঘ ও ঙ বিন্দুতে
 বিভক্ত হইয়াছে; কখ, কগ রেখা দ্বয়কে
 এরূপে স্থাপন কর, যেন তাহাদের
 সম্মাতে কোন একটা কোণ উৎপন্ন
 হয়; খগ সংযুক্ত কর এবং ঘ ও ঙ বিন্দু দিয়া ঘচ ও
 ঙচ রেখা গঠন কর সমান্তর করিয়া টান। [১ম, ৩১।



তাহা হইলে, চ ও ছ বিন্দুতে কথ রেখা, কগএর সদৃশ রূপে বিভক্ত হইবে।

ঘ বিন্দু দিয়া কথের সমান্তর ঘট রেখা টান ;

[১নং, ৩১।]

তবে চজ, জখ এই দুইএর প্রত্যেক সমান্তর ক্ষেত্র হইবে ;
অতএব ঘজ, চডএর ও জট, চখএর সমান ; [১ম, ৩৪।

পূরে, জঙ রেখা ঘটগ ত্রিভুজের টগ বাহুর সমান্তর
বলিয়া, [অঙ্কন।

টজতে জঘতে যে রূপ, গঙতে ঙঘতে সেই রূপ।

[৬ষ্ঠ, ২।

আর টজ রেখা খছএর ও জঘ রেখা ছচএর সমান ;

অতএব খছতে ছচতে যে রূপ, গঙতে ঙঘতে সেই রূপ।

[৫ম, ৭।

আবার চঘ রেখা কছঙ ত্রিভুজের ছঙ বাহুর সমান্তর
বলিয়া,

ছচতে চকতে যে রূপ, ঙঘতে ঘকতে সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ২।

আর পূর্বে উপপন্ন হইয়াছে যে, খছতে ছচতে যে রূপ,

গঙতে ঙঘতে সেই রূপ ;

সুতরাং, খছতে ছচতে যে রূপ, গঙতে ঙঘতে সেই রূপ

এবং ছচতে চকতে যে রূপ, ঙঘতে ঘকতে সেই রূপ।

অতএব কথ রেখা কগএর সদৃশ রূপে বিভক্ত হইল।

এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—১১। একটা নির্দিষ্ট সরল রেখাকে একরূপে বর্দ্ধিত
করিতে হইবে, যেন সমস্ত বর্দ্ধিত সরল রেখা ও বর্দ্ধিত অংশ
কোন নির্দিষ্ট অনুপাতী হয়।

১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

দুই নির্দিষ্ট সরল রেখার তৃতীয় সমানুপাতী স্থির
করিতে হইবে।

কথ, কগ যেন দুই নির্দিষ্ট সরল রেখা ; কথ ও কগএর
তৃতীয় সমানুপাতী স্থির করিতে হইবে।

কথ, কগকে একরূপে স্থাপন কর, যেন তাহাদের
সম্পাতে একটি কোণ উৎপন্ন হয় ;
কথ ও কগকে যথাক্রমে ঘ ও ঙ
পর্যন্ত বর্দ্ধিত কর ; এবং খঘকে কগএর
সমান কর ; [১ম, ৩।



খগ সংযুক্ত কর এবং ঘ বিন্দু দিয়া ঘঙ রেখা খগএর
সমান্তর করিয়া টান । [১ম, ৩১।

গঙ রেখা কথ ও কগএর তৃতীয় সমানুপাতী হইবে ।

খগ রেখা কঘঙ ত্রিভুজের ঘঙ বাহুর সমান্তর বলিয়া,
[অঙ্কন ।

কথতে খঘতে যে রূপ, কগতে গঙতে সেই রূপ ; [১ষ্ঠ, ২ ।

আর খঘ রেখা কগএর সমান ; [অঙ্কন ।

সুতরাং কথতে কগতে যে রূপ, কগতে গঙতে সেই রূপ ।
[৫ম, ৭।

অতএব কথ ও কগ এই দুই রেখার তৃতীয় সমানুপাতী
গঙ রেখা নির্ণীত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

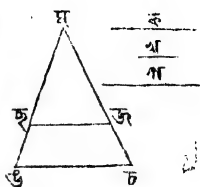
অঃ প্রঃ—১৪। এই প্রকৃতির চিত্রে কগ রেখাকে কগএর
সমান কম্পনা করিয়া প্রমাণ কর যে, কঙ রেখা কথ ও কগএর
তৃতীয় সমানুপাতী ।

১২ প্রকৃতি—সম্পাদ্য ।

তিনটি নির্দিষ্ট সরল রেখার চতুর্থ সমানুপাতী স্থির
করিতে হইবে ।

ক, খ, গ যেন তিনটি নির্দিষ্ট সরল রেখা ; ক, খ ও
গএর চতুর্থ সমানুপাতী স্থির করিতে হইবে ।

যঙ, যচ কোন দুই সরল
রেখা কল্পনা করিয়া একপে
স্থাপন কর, যেন তাহাদের
সম্পাতে একটি কোণ উৎপন্ন
হয় ; এবং এই দুই রেখা হইতে
কএর সমান করিয়া ঘছ, খএর



সমান করিয়া ছঙ ও গএর সমান করিয়া ঘজ ছেদ কর ;

[১ম, ৩।

ছজ সংযুক্ত কর এবং ঙ বিন্দু দিয়া ছজএর সমান্তর ঙচ
রেখা টান ।

[১ম, ৩১।

জচ রেখা সম্পাদ্য চতুর্থ সমানুপাতী ।

ছজ রেখা ঘঙচ ত্রিভুজের ঙচ বাহুর সমান্তর বলিয়া।

[অঙ্কন ।

ঘছতে ছঙতে যে রূপ, ঘজতে জচতে সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ২।

আর ঘছ রেখা কএর, ছঙ রেখা খএর ও ঘজ রেখা গএর
সমান ;

[অঙ্কন ।

সুতরাং কতে খতে যে রূপ, গতে জচতে সেই রূপ ।

[৫ম, ৭।

অতএব ক, খ, গ এই তিনটি নির্দিষ্ট সরল রেখার চতুর্থ
সমানুপাতী জচ রেখা নির্ণীত হইল । এখানে ইহাই
সম্পাদ্য ।

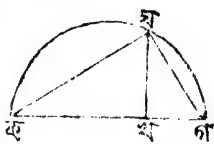
অঃ প্রঃ—১৫। প্রমাণ কর যে, কোন সম কোণী ত্রিভুজের
সম কোণ হইতে কর্ণের উপর লম্ব, কর্ণ ও অন্য দুই ভুজ এই
তিন রাশির চতুর্থ সমানুপাতী হইবে ।

১৩ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

দুই নির্দিষ্ট সরল রেখার মধ্য সমানুপাতী স্থির করিতে হইবে ।

কথ, খগ যেন দুই নির্দিষ্ট সরল রেখা ; এই দুই রেখার মধ্য সমানুপাতী স্থির করিতে হইবে ।

কথ ও খগকে এক রেখাতে স্থাপন কর, এবং কগএর উপর কঘগ অর্ধ বৃত্ত অঙ্কিত কর ; খ বিন্দু হইতে কগ বেষার সহিত



সম কোণ করিয়া খঘ রেখা টান ।

[১ম, ১১ ।

খঘ রেখা কথ ও খগএর মধ্য সমানুপাতী হইবে ।

কঘ, ঘগ সংযুক্ত কর ।

পরে, কঘগ কোণ অর্ধ বৃত্তস্থ হওয়ায় একটি সম কোণ হইয়াছে ।

[৩য়, ৩১ ।

আবার, কঘগ সম কোণী ত্রিভুজের সম কোণ হইতে ভূমির উপর ঘখ লম্ব টানা হইয়াছে বলিয়া,

খঘ রেখা ভূমির দুই খও কথ ও খগএর মধ্য সমানুপাতী হইবে ।

[৬ষ্ঠ, ৮, অঙ্ক ।

অতএব কথ ও খগ রেখার মধ্য সমানুপাতী খঘ রেখা নির্ণীত হইল । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১৬ । দুই নির্দিষ্ট সরল রেখার সমান্তর, সমগুণ ও লম্ব মধ্য স্থির করিতে হইবে । (প্রমাণিত দেখ ।)

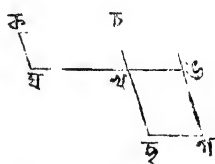
১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সমান সমান সমান্তর ক্ষেত্রের এক এক কোণ সমান হইলে, সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিরুদ্ধ ভাবে সমানুপাতী হইবে ; আর যে যে সমান্তর ক্ষেত্রের এক এক কোণ সমান এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিরুদ্ধ ভাবে সমানুপাতী, তাহারা পরস্পর সমান । (পরিশিষ্টের ২য় সংজ্ঞা দেখ) ।

কথ, খগ সমান সমান সমান্তর ক্ষেত্রের চখঘ ও ঙখছ কোণ দ্বয় পরস্পর সমান ; এই দুই ক্ষেত্রের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিরুদ্ধ ভাবে সমানুপাতী হইবে, অর্থাৎ, যথতে খঙতে যে রূপ, ছথতে খচতে সেই রূপ হইবে ।

সমান্তর ক্ষেত্র দুইটী একরূপে স্থাপন কর, যেন যথ ও খঙ এক রেখাস্থ হয় ; সুতরাং ছথ, খচও এক রেখাস্থ হইবে । [১ম, ১৪ ।

চঙ সমান্তর ক্ষেত্র অঙ্কিত কর ।



পরে, কথ সমান্তর ক্ষেত্র, খগ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান হওয়াতে, [বস্পনা ।

এবং চঙ অন্য একটী সমান্তর ক্ষেত্র বলিয়া,

কথতে চঙতে যে রূপ, খগতে চঙতে সেই রূপ ; [৫ম, ৭ ।

এবং কথতে চঙতে যে রূপ, যথতে খঙতে সেই রূপ, [৬ষ্ঠ, ১ ।

আর খগতে চণ্ডতে যে রূপ, ছখ ভূমিতে খচ ভূমিতে
সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ১ ।

এই হেতু যথতে খণ্ডতে যে রূপ, ছখতে খচতে সেই রূপ ।
[৫ম, ১১ ।

অনন্তর, সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি
বিবর্ত্ত ভাবে সমানুপাতী হইলে, অর্থাৎ, যথতে খণ্ডতে
যে রূপ, ছখতে খচতে সেই রূপ হইলে, কথ সমান্তর
ক্ষেত্র, খগ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান হইবে ।

পূর্ব্ব নত ক্ষেত্র অঙ্কিত কর ।

পরে, যথতে খণ্ডতে যে রূপ, ছখতে খচতে সেই রূপ
হওয়াতে, [কল্পনা ।

আর যথতে খণ্ডতে যে রূপ, কথ ক্ষেত্রে চণ্ড ক্ষেত্রে সেই
রূপ বলিয়া, [৬ষ্ঠ, ১ ।

এবং ছখতে খচতে যে রূপ, খগ ক্ষেত্রে চণ্ড ক্ষেত্রে সেই
রূপ হওয়ায়, [৬ষ্ঠ, ১ ।

কথতে চণ্ডতে যে রূপ, খগতে চণ্ডতে সেই রূপ ; [৫ম, ১১ ।
সুতরাং কথ সমান্তর ক্ষেত্র খগ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান ।

[৫ম, ১ ।

অতএব সমান সমান ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

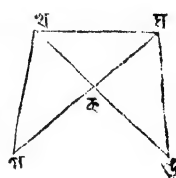
অঃ প্রঃ—১৭ । কথগণ সমান্তর ক্ষেত্রের কগ কর্ণের ও বিশ্ব
দিয়া কথ এবং কগ বাহুর সমান্তর চণ্ডছ এবং জঙট রেখা
টানিয়া প্রমাণ কর যে, কচ : চঘ :: কজ : কখ ।

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সমান সমান ত্রিভুজের এক এক কোণ সমান হইলে, সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃত্ত ভাবে সমানুপাতী হইবে ; আর যে যে ত্রিভুজের এক এক কোণ সমান এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃত্ত ভাবে সমানুপাতী, তাহারা পরস্পর সমান ।

কথগ ও কঘঙ সমান সমান ত্রিভুজের যেন খকগ কোণ ঘকঙ কোণের সমান ; এই দুই ত্রিভুজের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃত্ত ভাবে সমানুপাতী হইবে, অর্থাৎ, গকতে কঘতে যে রূপ, ঙকতে কথতে সেই রূপ হইবে ।

ত্রিভুজ দুইটা এরূপে স্থাপন কর,
যেন গক, কঘ এক রেখাংশ হয় ;
সুতরাং ঙক, কথও এক রেখাংশ
হইবে ; [১ম, ১৪ ।
খঘ সংযুক্ত কর ।



পরে, কথগ ত্রিভুজ কঘঙর সমান বলিয়া, [কল্পনা ।
এবং কথঘ অন্য একটা ত্রিভুজ হওয়াতে,
কথগ ত্রিভুজে কথঘ ত্রিভুজে যে রূপ, কঘঙ ত্রিভুজে
কথঘ ত্রিভুজে সেই রূপ ; [৫ম, ৭।
আর কথগ ত্রিভুজে কথঘ ত্রিভুজে যে রূপ, গক ভূমিতে

কথ ভূমিতে সেই রূপ ; [৬৪, ১।

আবার কথও ত্রিভুজে কথখ ত্রিভুজে যে রূপ, ঙক ভূমিতে
কথ ভূমিতে সেই রূপ ; [৬৪, ১।

অতএব গকতে কথতে যে রূপ, ঙকতে কথতে সেই রূপ।

[৫ম, ১১।

অনন্তর, সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি
বিবৃদ্ধ ভাবে সমানুপাতী হইলে অর্থাৎ, গকতে কথতে
যে রূপ, ঙকতে কথতে সেই রূপ হইলে, কথগ ত্রিভুজ
কথও ত্রিভুজের সমান হইবে।

পূর্ব নত চিত্র অঙ্কিত কর।

পরে, গকতে কথতে যে রূপ, ঙকতে কথতে সেই রূপ
হওয়াতে, [কল্পনা।

আর গকতে কথতে যে রূপ, কথগ ত্রিভুজে কথখ ত্রিভুজে
সেই রূপ বলিয়া, [৬৪, ১।

এবং ঙকতে কথতে যে রূপ, কথও ত্রিভুজে কথখ ত্রিভুজে
সেই রূপ হওয়ায়, [৬৪, ১।

কথগ ত্রিভুজে কথখ ত্রিভুজে যে রূপ, কথও ত্রিভুজে
কথখ ত্রিভুজে সেই রূপ ; [৫ম, ১১।

সুতরাং কথগ ত্রিভুজ কথও ত্রিভুজের সমান। [৫ম, ২।

অতএব সমান সমান ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৮। সমান সমান ত্রিভুজের এক একটী কোণের
পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃদ্ধ ভাবে সমানুপাতী হইলে, সেই সেই
কোণ পরস্পর সমান অথবা তাহাদের যোগ ফল দুই সম
কোণের সমান হইবে।

১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যদি চারি সরল রেখা সমানুপাতী হয়, তবে তাহাদের
আদি ও অন্ত রেখার অন্তর্গত আয়ত, দুই মধ্য রেখার
অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে ; আর আদি ও অন্তের
অন্তর্গত আয়ত যদি দুই মধ্য রেখার অন্তর্গত আয়তের
সমান হয়, তবে ঐ চারি রেখা সমানুপাতী হইবে ।

কথ, গঘ, ঙ ও চ এই চারি রেখা সমানুপাতী, অর্থাৎ,
কথতে গঘতে যে রূপ, ঙতে চতে সেই রূপ ; তাহা
হইলে কথ ও চএর অন্তর্গত আয়ত গঘ ও ঙএর অন্তর্গত
আয়তের সমান হইবে ।

ক ও গ বিন্দু হইতে কথ ও গঘ রেখার সহিত সম কোণ
করিয়া কছ ও গজ রেখা টান । [১ম, ১১ ।

কছকে চএর সমান এবং গজকে
ঙএর সমান কর । [১ম, ৩ ।

চ————— জ
চ

এবং খছ, ঘজ সমান্তর ক্ষেত্র
দ্বয় অঙ্কিত কর । [১ম, ৩১ ।

পরে, কথতে গঘতে যে রূপ, ক খ গ ঘ
ঙতে চতে সেই রূপ হওয়াতে,
এবং ঙ রেখা গজএর সমান হওয়ায় ও চ রেখা কছএর
সমান বলিয়া, [অঙ্কন ।

কথতে গঘতে যে রূপ, গজতে কছতে সেই রূপ ; [৩ম, ৭ ।
অর্থাৎ, খছ ও ঘজ সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান সমান
কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃত্ত ভাবে সমানুপাতী ;

অতএব খচ্ সমান্তর ক্ষেত্র ঘজ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান ।

[উট, ১৪ ।

আর কচ্ রেখা চএর সমান হওয়াতে, খচ্ আয়ত কথ ও চএর অন্তর্গত বলিতে হইবে,

এবং গজ রেখা ঙুর সমান হওয়াতে, ঘজ আয়ত গঘ ও ঙুর অন্তর্গত বলিতে হইবে ;

অতএব কথ ও চএর অন্তর্গত আয়ত গঘ ও ঙুর অন্তর্গত আয়তের সমান ।

অনন্তর, কথ ও চএর অন্তর্গত আয়ত গঘ ও ঙুর অন্তর্গত আয়তের সমান হইলে, এই চারি রেখা সমানু-
পাতী হইবে ; অর্থাৎ, কথতে গঘতে যে রূপ, ঙুতে চতে
সেই রূপ হইবে ।

পূর্ব মত চিত্র অঙ্কিত কর ।

পরে, কচ্ রেখা চএর সমান এবং গজ রেখা ঙুর সমান
হওয়াতে,

খচ্ আয়ত কথ ও চএর অন্তর্গত এবং ঘজ আয়ত গঘ ও
ঙুর অন্তর্গত বলিতে হইবে ।

আর কথ ও চএর অন্তর্গত আয়ত গঘ ও ঙুর অন্তর্গত
আয়তের সমান ;

[কম্পনা ।

অতএব খচ্ সমান্তর ক্ষেত্র ঘজ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান ;

[স্বতঃ ১ ।

এবং এই দুইটি ক্ষেত্র সমান কোণ বিশিষ্ট হওয়ার,
ইহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিবৃত
ভাবে সমানুপাতী হইবে ;

[উট, ১৪ ।

অতএব কথতে গযতে যে রূপ, গজতে কছতে সেই রূপ।
 আর গজ রেখা ঙ্র ও কছ রেখা চএর সমান। [অঙ্কন।
 সুতরাং কথতে গযতে যে রূপ, ঙ্রতে চতে সেই রূপ।
 অতএব যদি চারি সরল রেখা ইত্যাদি। এখানে ইহাই
 উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—১৯। কখ, গদ দুই সরল রেখা পরস্পর ও
 বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে। কখ, গদ সংযুক্ত করিলে কগঙ
 ত্রিভুজের বাহু সকল যথা ক্রমে যদি কখ ও ত্রিভুজের বাহু সকলের
 সমানুপাতী হয়, তবে ক, খ, গ, ঘ এক বৃত্ত পরিবৃত্ত হইবে।

১৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

যদি তিন সরল রেখা সমানুপাতী হয়, তবে আদি
 ও অন্ত রেখার অন্তর্গত আয়ত, মধ্য রেখার উপর
 অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে; আর আদি ও
 অন্তের অন্তর্গত আয়ত যদি মধ্য রেখার উপর অঙ্কিত
 সমচতুর্ভুজের সমান হয়, তবে এই তিন রেখা সমানুপাতী
 হইবে।

ক, খ, গ, এই তিনটি রেখা সমানুপাতী, অর্থাৎ,
 কতে খতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ; তাহা হইলে
 ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খএর উপর অঙ্কিত সম-
 চতুর্ভুজের সমান হইবে।

খএর সমান করিয়া য ক ———

রেখা টান। খ ———

পরে, কতে খভে যে য ———

রূপ, খতে গতে সেই রূপ গ ———

বলিয়া, [কম্পনা ।

এবং খ রেখা যএর সমান গ —
ক খ

কতে খতে যে রূপ, যতে গতে সেই রূপ ; [৫ম, ৭ ।

আর চারি রেখা যদি সমানুপাতী হয়, তবে আদি ও অন্তের অন্তর্গত আয়ত দুই মধ্য রেখার অন্তর্গত আয়তের সমান হইয়া থাকে ; [৬ষ্ঠ, ১৬ ।

অতএব ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খ ও যএর অন্তর্গত আয়তের সমান ;

এবং খ রেখা যএর সমান হওয়াতে, খ ও যএর অন্তর্গত আয়ত ও খএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ একই ক্ষেত্র হইবে ; [অঙ্কন ।

অতএব ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান ;

অনন্তর, ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইলে, কতে খতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ হইবে ।

পূর্ব মত চিত্র অঙ্কিত কর ।

পরে, খ রেখা যএর সমান বলিয়া খএর উপর সমচতুর্ভুজ

খ ও ঘএর অন্তর্গত আয়তের সমান বলিতে হইবে ;
 আর ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খএর উপর অঙ্কিত সম-
 চতুর্ভুজের সমান, [কম্পনা।
 অতএব ক ও গএর অন্তর্গত আয়ত খ ও ঘএর অন্তর্গত
 আয়তের সমান ।

আবার আদি ও অন্ত রেখা দ্বয়ের অন্তর্গত আয়ত দুই মধ্য
 রেখার অন্তর্গত আয়তের সমান হইলে, ঐ চারি রেখা
 সমানুপাতী হয়, [৬ষ্ঠ, ১৬ ।

অতএব কতে খতে যে রূপ, ঘতে গতে সেই রূপ ;
 আর খ রেখা ঘএর সমান ;
 সুতরাং কতে খতে যে রূপ, খতে গতে সেই রূপ । [৫ম, ৭।
 অতএব যদি তিন সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই
 উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২০। নির্দিষ্ট ভূমি ও উন্নতি বিশিষ্ট কোন
 ত্রিভুজের সমান একটি সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে ।

২১। কখগঘ একটি সমান্তর ক্ষেত্র ; খ বিন্দু হইতে কোন
 রেখা এক্রূপে টান যেন তাহা কগ কর্ণকে, ঘগ বাহুকে ও বর্জিত
 কখ বাহুকে যথাক্রমে চ, ছ ও ও বিন্দুতে ছেদ করে ; তাহা হইলে
 ওচ ও চছএর অন্তর্গত আয়ত খচএর উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের
 সমান হইবে ।

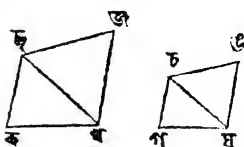
১৮ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ও এক
 রূপে স্থাপিত অন্য একটি সরল রৈখিক ক্ষেত্র কোন
 নির্দিষ্ট সরল রেখার উপর অঙ্কিত করিতে হইবে ।

কখ যেন একটি নির্দিষ্ট সরল রেখা এবং গঘওচ

নির্দিষ্ট সরল রৈখিক চতুর্ভুজ ক্ষেত্র ; গঘঙচএর সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত অন্য একটি সরল রৈখিক ক্ষেত্র কথ রেখার উপর অঙ্কিত করিতে হইবে ।

ঘচ সংযুক্ত কর ; এবং ঘগচ কোণের সমান করিয়া কথ রেখার ক বিন্দুতে থকছ কোণ অঙ্কিত কর ; আর গঘচ কোণের



সমান করিয়া কথ রেখার থ বিন্দুতে কথছ কোণ অঙ্কিত কর ;

[১ম, ২৩।

অতএব অবশিষ্ট কছথ কোণ অবশিষ্ট গচঘ কোণের সমান,

[১ম, ৩২।

এবং কছথ ও গচঘ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী।

আবার চঘঙ কোণের সমান করিয়া থছ রেখার থ বিন্দুতে ছথজ কোণ কর, এবং ঘচঙ কোণের সমান করিয়া থছ রেখার ছ বিন্দুতে থছজ কোণ কর ;

[১ম, ২৩।

অতএব অবশিষ্ট ছজথ কোণ অবশিষ্ট চঙঘ কোণের সমান,

[১ম, ৩২।

এবং থছজ ও ঘচঙ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী।

পরে, কছথ কোণ গচঘ কোণের ও থছজ কোণ ঘচঙ কোণের সমান বলিয়া,

[অঙ্কন।

সমস্ত কছজ কোণ সমস্ত গচঙ কোণের সমান । [স্বতঃ ২।

এ ই কারণে, কথজ কোণ গঘঙ কোণের সমান ;

এবং থকছ কোণ ঘগচ কোণের সমান ও থজছ কোণ ঘঙচ কোণের সমান ;

অতএব কখজছ ও গঘঙচ সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র দ্বয় পরস্পর সমান কোণী।

আর, এই দুই ক্ষেত্রের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী হইবে ;

কেননা, খকছ ও ঘগচ ত্রিভুজ সমান কোণ বিশিষ্ট হওয়ায়, খকতে কছতে যে রূপ, ঘগতে গচতে সেই রূপ। [৬ষ্ঠ, ৪।

এই কারণে, কছতে ছখতে যে রূপ, গচতে চঘতে সেই রূপ ; এবং খছতে ছজতে যে রূপ, ঘচতে চঙতে সেই রূপ।

অতএব ক্রম সমানুপাতে, কছতে ছজতে যে রূপ, গচতে চঙতে সেই রূপ। [৫ম, ২২।

এই প্রকারে উপপন্ন হইবে যে, কখতে খজতে যে রূপ, গঘতে ঘঙতে সেই রূপ ;

আর, ছজতে জখতে যে রূপ, চঙতে ঙঘতে সেই রূপ।

[৬ষ্ঠ, ৪।

অতএব কখজছ ও গঘঙচ ক্ষেত্র দ্বয় পরস্পর সমান কোণী ও তাহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী ;

সুতরাং তাহারা সদৃশ ক্ষেত্র। [৬ষ্ঠ, সং ১।

অনন্তর, গঘটঙচ সরল ত্রৈখিক পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত অন্য একটী সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র কখ রেখার উপর অঙ্কিত করিতে হইবে।

ঘঙ সংযুক্ত কর এবং পূর্ব প্রকরণানুসারে গঘঙচ সরল ত্রৈখিক চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত

কখজছ ক্ষেত্র কখ রেখার উপর অঙ্কিত কর ; ঙঘট কোণের

সমান করিয়া খজ রেখার

খ বিন্দুতে জখঠ কোণ

কর, এবং ঘঙট কোণের

সমান করিয়া খজ রেখার

জ বিন্দুতে খজঠ কোণ কর ;

[১ম, ২৩।

অতএব অবশিষ্ট ঠ কোণ অবশিষ্ট ট কোণের সমান ।

পরে, কখজছ ও গঘঙচ ক্ষেত্র সদৃশ হওয়াতে,

কখজ কোণ গঘঙ কোণের সমান ;

[৬ষ্ঠ, সং ১।

আর জখঠ কোণ ঙঘট কোণের সমান,

[অঙ্কন।

অতএব সমুদায় কখঠ কোণ সমুদায় গঘট কোণের

সমান ।

[স্বতঃ, ২।

এই কারণে, সমুদায় ছজঠ কোণ সমুদায় চঙট কোণের

সমান ।

অতএব কখঠজছ ও গঘটঙচ এই দুই পঞ্চভুজ ক্ষেত্র

পরস্পর সমান কোণী ।

আর কখজছ ও গঘঙচ এই দুই ক্ষেত্র সদৃশ হওয়াতে,

কখতে খজভে যে রূপ, গঘতে ঘঙতে সেই রূপ ;

[৬ষ্ঠ, সং ১।

এবং খজতে খঠতে যে রূপ, ঘঙতে ঘটতে সেই রূপ ;

[৬ষ্ঠ, ৪।

এই হেতু ক্রম সমানুপাতে, কখতে খঠতে যে রূপ, গঘতে

ঘটতে সেই রূপ ।

[৫ম, ২২।

এই কারণে, ছজতে জঠতে যে রূপ, চঙতে টটতে সেই রূপ ;

আর খঠতে ঠজতে যে রূপ, ঘটতে টঙতে সেই রূপ । [৬ষ্ঠ, ৪।

অতএব কখঠজছ এবং গঘটঙচ এই দুই পঞ্চভুজ ক্ষেত্র পরস্পর সমান কোণী এবং তাহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী ;

সুতরাং তাহারা পরস্পর সদৃশ ।

এই রূপে, কোন ষড়্ভুজ, সপ্তভুজ প্রভৃতি সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত অন্য সরল রৈখিক ক্ষেত্র কোন নির্দিষ্ট রেখার উপর অঙ্কিত করিতে পারা যায় ।

অতএব কোন নির্দিষ্ট ইত্যাদি । এখানে ইহাই সম্পাদ্য ।

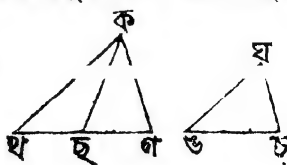
অঃ প্রঃ—২২। কোন নিয়মিত পঞ্চভুজ ক্ষেত্রের বাহু সকলের দ্বিগুণ কারক বিন্দুগুলি যথাক্রমে সংযুক্ত করিলে, তদ্বারা যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হইবে, তাহা পূর্বোক্ত পঞ্চভুজের সদৃশ আর একটি পঞ্চভুজ হইবে ।

১৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সদৃশ ত্রিভুজ গুলি তাহাদের সর্বগীয় বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইয়া থাকে ।

কখগ ও ঘঙচ এই দুই সদৃশ ত্রিভুজের খ কোণ যেন ঙ কোণের সমান এবং কখতে খগতে যে অনুপাত, ঘঙতে ঙচতে যেন সেই অনুপাত ; অতএব খগ ও ঙচ বাহু সর্বগীয় ; তাহা হইলে, কখগ ত্রিভুজ এবং ঘঙচ ত্রিভুজ খগ ও ঙচ বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইবে ।

খগ ও ঙচএর তৃতীয়



সমানুপাতী খছ কম্পনা কর ; [৬ষ্ঠ, ১১ ।

তাহা হইলে, খগতে উচতে যে রূপ, উচতে খছতে সেই রূপ হইবে ;

কছ সংযুক্ত কর ।

পরে, কথতে খগতে রূপ, ঘঙতে উচতে সেই রূপ বলিয়া, [কম্পনা ।

একান্তরে, কথতে ঘঙতে যে রূপ, খগতে উচতে সেই রূপ, [৫ম, ১৬ ।

আর খগতে উচতে যে রূপ, উচতে খছতে সেই রূপ ; [অঙ্কন ।

অতএব কথতে ঘঙতে যে রূপ, উচতে খছতে সেই রূপ ; [৫ম, ১১ ।

অর্থাৎ কথছ, ঘঙচ ত্রিভুজ দ্বয়ের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি বিরক্ত ভাবে সমানুপাতী হইয়াছে, আর ত্রিভুজ দ্বয়ের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু-গুলি বিরক্ত ভাবে সমানুপাতী হইলে পরস্পর সমান হইয়া থাকে, [৬ষ্ঠ, ১৫ ।

এই হেতু কথছ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান ।

আবার, খগতে উচতে যে রূপ, উচতে খছতে সেই রূপ বলিয়া,

খগএর খছএর সহিত অনুপাত, খগএর উচএর সহিত অনুপাতের দ্বিঘাত ; [৫ম, সং ১০ ।

আর কথগ ত্রিভুজে কথছ ত্রিভুজে যে অনুপাত, খগতে খছতে সেই অনুপাত ; [৬ষ্ঠ, ১

অতএব কখগ ত্রিভুজের কখছ ত্রিভুজের সহিত অনুপাত,
খগএর ঔচএর সহিত অনুপাতের দ্বিঘাত ;

আর কখছ ত্রিভুজ ঘঙচ ত্রিভুজের সমান উপপন্ন
হইয়াছে ;

সুতরাং কখগ ও ঘঙচ ত্রিভুজ খগ ও ঔচ বাহুর অনু-
পাতের দ্বিঘাত অনুপাতী । [৫ম, ৭।

অতএব সদৃশ ত্রিভুজ ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অনু । এই প্রতিজ্ঞা দ্বারা স্পষ্টই বোধ হইবে যে, তিন
রেখা সমানুপাতী হইলে, প্রথমে তৃতীয়ে যে অনুপাত,
প্রথমের উপর অঙ্কিত ত্রিভুজে দ্বিতীয়ের উপর অঙ্কিত
তৎসদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত ত্রিভুজে সেই অনুপাত ।

অঃ প্রঃ—২৩। ঘঙচ একটি ত্রিভুজ একরূপে কখগ অন্য একটি
ত্রিভুজের অন্তর্গত হইয়াছে যে, চঙ এবং খগ বাহু পর-
স্পর সমান্তর । প্রমাণ কর যে, ঘঙচ ত্রিভুজে কখগ ত্রিভুজে
যে অনুপাত, কচ ও চখএর অন্তর্গত আয়ত্রে কখএর উপর সম-
চতুর্ভুজে সেই অনুপাত ।

২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সদৃশ বহুভুজ ক্ষেত্রগুলি কতিপয় সমান সংখ্যক
সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে এবং বহুভুজ গুলি
যে অনুপাত বিশিষ্ট, এই সকল ত্রিভুজও পরস্পর সেই
অনুপাত বিশিষ্ট হইবে ; আর এই সকল বহুভুজ
ক্ষেত্র তাহাদের সবর্গীয় বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত
অনুপাতী হইবে ।

কখগঘঙ ও চছজটঠ এই দুইটি সদৃশ বহুভুজ ক্ষেত্র :

কখ ও চছ যেন তাহাদের দুই সবর্গীয় বাহু । কখগঘঙ ও চছজটঠ বহুভুজ ক্ষেত্র, কতিপয় সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইতে পারে এবং বহুভুজ দ্বয় যে অনুপাত বিশিষ্ট, ত্রিভুজ গুলিও পরস্পর সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে ; আর কখগঘঙ ও চছজটঠ বহুভুজ তাহাদের সবর্গীয় কখ ও চছ বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইবে ।

খঙ, ঙগ, ছঠ, ঠজ সংযুক্ত কর ।

পরে, কখগঘঙ ও চছজটঠ বহুভুজ দ্বয় পরস্পর সদৃশ বলিয়া, [কম্পনা ।

খকঙ কোণ ছচঠ কোণের সমান এবং খকতে কঙতে যে রূপ, ছচতে চঠতে সেই রূপ, [ঙঠ, সং. ১ ।

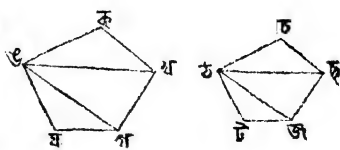
আর কখঙ ও চছঠ ত্রিভুজ দ্বয়ের এক একটা কোণ পরস্পর সমান এবং সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহুগুলি সমানুপাতী হওয়াতে ;

কখঙ ও চছঠ ত্রিভুজ

সমান কোণী, [ঙঠ, ৬ ।

ও তজ্জন্ম পরস্পর

সদৃশ ; [ঙঠ, ৩ ।



অতএব কখঙ কোণ চছঠ কোণের সমান ;

আর বহুভুজ দ্বয় সদৃশ হওয়াতে, [কম্পনা ।

সমস্ত কখগ কোণ সমস্ত চছজ কোণের সমান ; [ঙঠ, সং. ১ ।

সুতরাং অবশিষ্ট ঙখগ কোণ অবশিষ্ট ঠছজ কোণের সমান । [স্মৃত: ৩ ।

আবার কখঙ ও চছঠ ত্রিভুজ দ্বয় পরস্পর সদৃশ বলিয়া,
 ঙখতে থকতে যে রূপ, ঠছতে ছচতে সেই রূপ ;

আবার বহুভুজ দ্বয় সদৃশ হওয়াতে, [কম্পনা ।

কখতে থগতে যে রূপ, চছতে ছজতে সেই রূপ ;

[৬ঠ, সং ১১ ।

সুতরাং ক্রম সমানুপাতে, ঙখতে থগতে যে রূপ, ঠছতে
 ছজতে সেই রূপ ; [৫ম, ২২ ।

অর্থাৎ ঙখগ ও ঠছজ ত্রিভুজের সমান সমান কোণের
 পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী ; এই হেতু ঙখগ ও
 ঠছজ ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী ; [৬ঠ, ৬ ।

অতএব এই দুই ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ । [৬ঠ, ৪ ।

এই কারণে, ঙগঘ ও ঠজট ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ ।

অতএব কখগঘঙ ও চছজটঠ সদৃশ বহুভুজ ক্ষেত্র দ্বয়
 সমান সংখ্যক সদৃশ ত্রিভুজে বিভক্ত হইল ।

আর বহুভুজ দ্বয় যে অনুপাত বিশিষ্ট, ত্রিভুজ গুলিও
 যথা ক্রমে পরস্পর সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে এবং
 কখঙ, ঙখগ, ঙগঘ ত্রিভুজ এই সকল অনুপাতের পূর্ববর্তী
 রাশি এবং চছঠ, ঠছজ ও ঠজট ত্রিভুজ পরবর্তী রাশি
 হইবে ; এবং কখগঘঙ ও চছজটঠ বহুভুজ, তাহাদের
 সবর্গীয় কখ ও চছ বাহু দ্বয়ের অনুপাতের দ্বিঘাত
 অনুপাতী হইবে ।

কখঙ ও চছঠ ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ হওয়াতে,
 ঙখ ও ঠছ এর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইবে ।

[৬ঠ, ১২ ।

এই কারণে, ঙ্খগ ও ঠছজ ত্রিভুজ ঙ্খ ও ঠছএর
অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী ।

অতএব কখঙ ত্রিভুজে চছঠ ত্রিভুজে যে রূপ, ঙ্খগ
ত্রিভুজে ঠছজ ত্রিভুজে সেই রূপ । [৫ম, ১১ ।

আবার, ঙ্খগ ও ঠছজ ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ হওয়ায়,
ঙগ ও ঠজএর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইবে ।

[৬ষ্ঠ, ১২ ।

এই কারণে, ঙ্গঘ ও ঠজট ত্রিভুজ, ঙ্গ ও ঠজএর অনু-
পাতের দ্বিঘাত অনুপাতী ;

অতএব ঙ্খগ ত্রিভুজে ঠছজ ত্রিভুজে যে রূপ, ঙ্গঘ
ত্রিভুজে ঠজট ত্রিভুজে সেই রূপ । [৫ম, ১১ ।

আর উপপর হইয়াছে যে, ঙ্খগ ত্রিভুজে ঠছজ ত্রিভুজে
যে রূপ, কখঙ ত্রিভুজে চছঠ ত্রিভুজে সেই রূপ ।

সুতরাং কখঙ ত্রিভুজে চছঠ ত্রিভুজে যে রূপ, ঙ্খগ
ত্রিভুজে ঠছজ ত্রিভুজে সেই রূপ আর ঙ্গঘ ত্রিভুজে
ঠজট ত্রিভুজেও সেই রূপ ; [৫ম, ১১ ।

তাহা হইলে, একটা পূর্ববর্তীতে তাহার পরবর্তীতে যে
অনুপাত, সমস্ত পূর্ববর্তী গুলিতে সমস্ত পরবর্তী গুলিতে
সেই অনুপাত হইবে । [৫ম, ১২ ।

অর্থাৎ কখঙ ত্রিভুজে চছঠ ত্রিভুজে যে রূপ, কখগঘঙ বহু
ভুজে চছজট্ট বহু ভুজে সেই রূপ ।

আর কখঙ ও চছঠ ত্রিভুজ কখ ও চছ সর্বগৌর বাহুর
অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী । [৬ষ্ঠ, ১২ ।

সুতরাং কখগঘঙ ও চছজট্ট পঞ্চ ভুজ কখ ও চছ সর্বগৌর

বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী ।

অতএব সদৃশ বহুভুজ ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অনু—১। এই রূপে সপ্রমাণ হইবে যে, সদৃশ চতুর্ভুজ বা অন্য কোন বহুভুজ গুলি তাহাদের সবর্গীয় বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হইয়া থাকে । ত্রিভুজ সম্বন্ধে পূর্বে এই রূপ উপপন্ন হইয়াছে ; অতএব ব্যাপক ভাবে বলা যাইতে পারে যে, সদৃশ সরল টেরিক ক্ষেত্র গুলি তাহাদের সবর্গীয় বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতী হয় ।

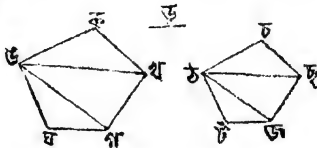
অনু—২। যদি কথ ও চছ দুই সবর্গীয় বাহুর তৃতীয় সমানুপাতী ড কম্পনা করা যায়, [৬৪, ১১।

তবে কথ ও ড, কথ

ও চছএর অনুপাতের

দ্বিঘাত অনুপাতী

হইবে । [৫ম, সং ১০।



কিন্তু কথএর উপর অঙ্কিত যে কোন সরল টেরিক ক্ষেত্রের চছএর উপর তৎ সদৃশ ও এক রূপে অঙ্কিত ক্ষেত্রের অনুপাত, কথ ও চছএর অনুপাতের দ্বিঘাত, [অনু ১।

সুতরাং কথতে ডতে যে রূপ, কথএর উপর অঙ্কিত ক্ষেত্রে চছএর উপর অঙ্কিত ক্ষেত্রে সেই রূপ ;

আর ত্রিভুজ সম্বন্ধে পূর্বে এই বিষয় সপ্রমাণ হইয়াছে† বলিয়া, [৬৪, ১২, অনু ।

ব্যাপক ভাবে এরূপ বলা যাইতে পারে যে, তিন রেখা সমানুপাতী হইলে প্রথমে তৃতীয়ে যে অনুপাত প্রথমে

উপর অঙ্কিত কোন সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রে দ্বিতীয়ের উপর তজ্জপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত ।

অঃ প্রঃ—২৪ । কোন বৃত্ত তাহার দ্বিগুণ ব্যাস বিশিষ্ট অন্য কোন বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করিলে, যদি স্পর্শ বিন্দু হইতে দুই বৃত্তের কতিপয় জ্যা টানা যায়, তবে এই সকল জ্যার প্রান্ত বিন্দু গুলি যথাক্রমে দুইটি দুইটি করিয়া সংযুক্ত করিলে, উভয় বৃত্তে যে এক একটি বহু ভুজ অঙ্কিত হইবে, তাহা দের একটি অন্যটির চতুর্গুণ হইবে ।

২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যে যে সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র অন্য এক সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ, তাহারা পরস্পর সদৃশ ।

ক ও খ এই দুই সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের প্রত্যেকে যেন গ ক্ষেত্রের সদৃশ ; তাহা হইলে ক ক্ষেত্র খ ক্ষেত্রের সদৃশ হইবে ।

ক ক্ষেত্র গ ক্ষেত্রের
সদৃশ বলিয়া, [কল্পনা ।
তাহারা পরস্পর সমান
কোণী এবং তাহাদের



সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু সকল সমানুপাতী ।

[৬ষ্ঠ, সং ১ ।

আবার খ ক্ষেত্র গ ক্ষেত্রের সদৃশ বলিয়া, [কল্পনা ।
তাহারা সমান কোণী এবং তাহাদের সমান সমান
কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী । [৬ষ্ঠ, সং ১ ।

এই হেতু, ক ও খ ক্ষেত্র উভয়েই গ ক্ষেত্রের কোণের সমান কোণ বিশিষ্ট এবং প্রত্যেকের ও গএর সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী ;

অতএব ক ও খ ক্ষেত্র সমান কোণী, [স্বতঃ ১।

এবং তাহাদের সমান সমান কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী ; [৫ম, ১১।

সুতরাং ক ক্ষেত্র খ ক্ষেত্রের সদৃশ । [৬ষ্ঠ, সং ১।

অতএব যে যে সরল রৈখিক ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

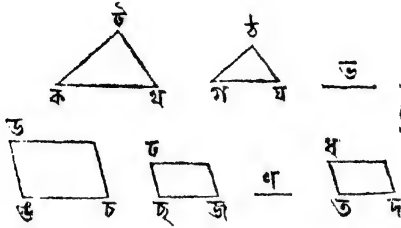
অঃ প্রঃ—২৫। দুইটী সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র নির্দিষ্ট আছে; এই দুই ক্ষেত্রের প্রত্যেকের সদৃশ ও উভয়ের মধ্য সমানুপাতী আর একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে ।

২২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

চারি সরল রেখা যদি সমানুপাতী হয়, তবে তাহাদের উপর এক রূপে অঙ্কিত সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র গুলি সমানুপাতী হইবে; আর চারি রেখার উপর এক রূপে অঙ্কিত সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্রগুলি যদি সমানুপাতী হয়, তবে রেখা গুলিও সমানুপাতী হইবে ।

কথ, গঘ, গুচ, ছজ যেন চারি সমানুপাতি রেখা অর্থাৎ কথতে গঘতে যে অনুপাত, গুচতে ছজতে সেই অনুপাত; কথ ও গঘএর উপর টকথ, ঠগঘ সদৃশ সরল রৈখিক ক্ষেত্র এক রূপে অঙ্কিত করিলে এবং গুচ ও ছজএর

উপর ডচ ও ঢজ সদৃশ সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র এক রূপে
অঙ্কিত করিলে টকথ ক্ষেত্রে ঠগঘ ক্ষেত্রে যে সম্বন্ধ, ডচ
ক্ষেত্রে ঢজ ক্ষেত্রে সেই সম্বন্ধ হইবে ।



কথ ও গঘএর তৃতীয় সমানুপাতী ভ রেখা এবং ঙ্চ ও
ছজএর তৃতীয় সমানুপাতী ণ রেখা কল্পনা কর । [৬৪, ১১।

পরে, কথতে গঘতে যে রূপ, ঙ্চতে ছজতে সেই রূপ
হওয়াতে, [কল্পনা ।

এবং কথতে গঘতে যে রূপ, গঘতে ভতে সেই রূপ
বলিয়া, [অঙ্কন ।

আর ঙ্চতে ছজতে যে রূপ, ছজতে ণতে সেই রূপ
হওয়ার, [অঙ্কন ।

গঘতে ভতে যে রূপ, ছজতে ণতে সেই রূপ ; [৫ম, ১১ ।

আবার কথতে গঘতে যে রূপ, ঙ্চতে ছজতে সেই রূপ ;

অতএব ক্রম সমানুপাতে, কথতে ভতে যে রূপ, ঙ্চতে
ণতে সেই রূপ ; [৫ম, ২২ ।

আর কথতে ভতে যে রূপ, টকথ ক্ষেত্রে ঠগঘ ক্ষেত্রে সেই
রূপ ; [৬৪, ২০, অনুরূ ২ ।

এবং উচতে গতে যে রূপ, ডচ ক্ষেত্রে ঢজ ক্ষেত্রে সেই রূপ ;

[৬ষ্ঠ, ২০, অনু ২ ।

অতএব টকখ ক্ষেত্রে ঠগঘ ক্ষেত্রে যে রূপ, ডচ ক্ষেত্রে ঢজ ক্ষেত্রে সেই রূপ ।

[৫ম, ১১ ।

অনন্তর, টকখ ক্ষেত্রে ঠগঘ ক্ষেত্রে যে রূপ, ডচ ক্ষেত্রে ঢজ ক্ষেত্রে সেই রূপ হইলে, কখতে গঘতে যে রূপ, উচতে ছজতে সেই রূপ হইবে ।

কখতে গঘতে যে রূপ, উচতে তদতে সেই রূপ কম্পন কর ;

[৬ষ্ঠ, ১২ ।

এবং ডচ বা ঢজের সদৃশ ও এক রূপে অঙ্কিত খদ ক্ষেত্র তদ রেখার উপর অঙ্কিত কর ।

[৬ষ্ঠ, ১৮ ।

পরে, কখতে গঘতে যে রূপ, উচতে তদতে সেই রূপ বলিয়া,

আর টকখ ও ঠগঘ সদৃশ ক্ষেত্র কখ ও গঘের উপর এক রূপে অঙ্কিত হওয়াতে,

এবং ডচ ও খদ সদৃশ ক্ষেত্র কখ ও গঘের উপর এক রূপে অঙ্কিত হওয়ায়,

এই প্রতিজ্ঞার পূর্ব প্রকরণ দ্বারা টকখতে ঠগঘতে যে রূপ, ডচতে খদতে সেই রূপ ।

আর টকখতে ঠগঘতে যে রূপ, ডচতে ঢজতে সেই রূপ কম্পিত হইয়াছে ;

সুতরাং, ডচ ক্ষেত্রে খদ ক্ষেত্রে যে রূপ, ডচ ক্ষেত্রে ঢজ ক্ষেত্রে সেই রূপ ;

[৫ম, ১১ ।

অতএব ধদ ক্ষেত্র তজ ক্ষেত্রের সমান ; [৫ম, ১।

আর ধদ ও তজ ক্ষেত্র দ্বয় সদৃশ ও এক রূপে অঙ্কিত
হইয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।

তদ রেখা ছজএর সমান ।

আবার কথতে গঘতে যে রূপ, উচতে তদতে সেই রূপ
হওয়ায়,

এবং তদ, ছজএর সমান বলিয়া,

কথতে গঘতে যে রূপ, উচতে ছজতে সেই রূপ ।

অতএব চারি সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২৬। কোন দুই সদৃশ ত্রিভুজের এক এক বাহুর
মধ্য বিন্দু হইতে ভূমির সমান্তর এক একটা রেখা টানিলে,
যে দুইটা বিহম চতুর্ভুজ হইবে, সেই দুই ক্ষেত্র ও নির্দিষ্ট
দুই ত্রিভুজ, এই চারি রাশি সমানুপাতী ।

২৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

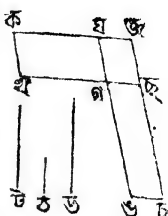
সমান কোণী সমান্তর ক্ষেত্র সকল, বাহুগুলির অনু-
পাতের সম্মিলিত অনুপাত বিশিষ্ট হইবে ।

কগ ও গচ ননান কোণী সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয়ের ঋগঘ ও
ঔগছ কোণ পরস্পর সমান ; তাহা হইলে, কগ ও গচ
ক্ষেত্র দ্বয় বাহুগুলির অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত
বিশিষ্ট হইবে ।

ঋগ ও গছকে এক রেখায় স্থাপন কর ;

তাহা হইলে, গয ও গঙ এক রেখাস্থ
হইবে ; [১ম, ১৪।

যছ সমান্তর ক্ষেত্র অঙ্কিত কর ; এবং
ট রেখা টানিয়া, খগতে গছতে যেরূপ,
টতে ঠতে সেইরূপ আর ঘগতে গঙতে
যে রূপ, ঠতে ডতে সেইরূপ কল্পনা



কর ; [৬ষ্ঠ, ১২।

তাহা হইলে, টএর ঠএর সহিত অনুপাত এবং ঠএর ডএর
সহিত অনুপাত বাছ গুলির অনুপাতের অর্থাৎ খগএর
গছএর সহিত এবং ঘগএর গঙএর সহিত অনুপাতের সমান ;
আর টএর ডএর সহিত অনুপাত টএর সহিত ঠএর এবং ঠএর
সহিত ডএর অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত ; [৫ম, সং ক।
এই হেতু ট ও ড রেখা, ক্ষেত্র দ্বয়ের বাছগুলির অনুপাতের
সম্মিলিত অনুপাত বিশিষ্ট।

এক্ষণে কগ ক্ষেত্রে গজ ক্ষেত্রে যে রূপ, খগতে গছতে
সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ১।

আর খগতে গছতে যেরূপ, টতে ঠতে সেই রূপ ; [অঙ্কন।
এই হেতু কগ ক্ষেত্রে গজ ক্ষেত্রে যে রূপ, টতে ঠতে সেই
রূপ ; [৫ম, ১১।

আবার, গজ ক্ষেত্রে গচ ক্ষেত্রে যে রূপ, ঘগতে গঙতে
সেই রূপ ; [৬ষ্ঠ, ১।

আর ঘগতে গঙতে যে রূপ, ঠতে ডতে সেই রূপ ; [অঙ্কন।
এই হেতু গজ ক্ষেত্রে গচ ক্ষেত্রে যে রূপ, ঠতে ডতে সেই
রূপ ; [৫ম, ১১।

অতএব সপ্রমাণ হইল যে, কগ ক্ষেত্রে গজ ক্ষেত্রে
যে রূপ, টতে ঠতে সেই রূপ,

এবং গজ ক্ষেত্রে গচ ক্ষেত্রে যে রূপ, ঠতে ডতে সেই রূপ ;
তাহা হইলে ক্রম সমানুপাতে, কগ সমান্তর ক্ষেত্রে গচ
সমান্তর ক্ষেত্রে যে রূপ, টতে ডতে সেই রূপ । [৫ম, ২২ ।

কিন্তু ট ও ড রেখা, ক্ষেত্র দ্বয়ের বাহু গুলির অনুপাতের
সম্মিলিত অনুপাত বিশিষ্ট ;

সুতরাং কগ ও গচ সমান্তর ক্ষেত্র, বাহু গুলির অনুপাতের
সম্মিলিত অনুপাত বিশিষ্ট ।

অতএব সমান কোণী ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

তাঃ প্রঃ—২৭ । যদি ক কোণ কঙচ ও কখগ এই দুই
ত্রিভুজের সাধারণ কোণ হয়, তবে প্রমাণ কর যে, কখগ
ত্রিভুজ : কঙচ ত্রিভুজ :: কখ:কগ : কঙ:কচ ।

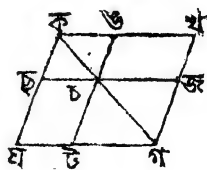
২৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন সমান্তর ক্ষেত্রের অভ্যন্তরীণ ও কর্ণের পরিভাষ্য
ক্ষেত্র গুলি সমুদয় ক্ষেত্রের ও পরস্পরের সদৃশ ।

কখগয কোন সমান্তর ক্ষেত্র ; কগ ইহার কর্ণ এবং
ঙঢ় ও জট কর্ণের পরিভাষ্য সমান্তর ক্ষেত্র ; ঙঢ় ও জট
ক্ষেত্র, সমুদয় ক্ষেত্রের ও পরস্পরের সদৃশ হইবে ।

যগ এবং ছচ রেখা দ্বয়
পরস্পর সমান্তর হওয়াতে,
কখগ কোণ কছচ কোণের
সমান । [১ম, ২৯ ।

আবার খগ এবং ঙঢ় রেখা দ্বয়



পরস্পর সমান্তর হওয়ায়,

কখগ কোণ কঙচ কোণের সমান ; [১ম, ২৯।

আর খগঘ ও ঙচছ এই দুই কোণ প্রত্যেকে খকঘ কোণের
সম্মুখীন হওয়াতে পরস্পর সমান ; [১ম, ৩৪।

অতএব কখগঘ ও কঙচছ সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয় সমান কোণী।

আবার কখগ কোণ কঙচ কোণের সমান বলিয়া এবং
খকগ ও ঙকচ ত্রিভুজের খকগ সাধারণ কোণ হওয়ায়,
এই দুইটা ত্রিভুজ সমান কোণী ;

এবং তজ্জনা কথতে খগতে যে রূপ, বঙতে ঙচতে সেই
রূপ : [৬ষ্ঠ, ৪।

আর সমান্তর ক্ষেত্রের সম্মুখীন বাহু গুলি পরস্পর সমান
হওয়াতে, [১ম, ৩৪।

কথতে কঘতে যে রূপ, কঙতে কছতে সেই রূপ,
ও ঘগতে গথতে যে রূপ, ছচতে চঙতে সেই রূপ,
এবং গঘতে ঘকতে যে রূপ, চছতে ছকতে সেই রূপ ;
[৫ম, ৭।

অতএব কখগঘ, কঙচছ সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান সমান
কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী ;

এবং এজন্য তাহারা পরস্পর সদৃশ। [৬ষ্ঠ, সং ১।

এই কারণে, কখগঘ ও চজগট সমান্তর ক্ষেত্র দ্বয় পরস্পর
সদৃশ ;

অতএব ঙুছ ও জট এই দুই সমান্তর ক্ষেত্রের প্রত্যেকে
খগ ক্ষেত্রের সদৃশ ;

আর যে যে সরল রৈখিক ক্ষেত্র অন্য এক সরল রৈখিক

ক্ষেত্রের সদৃশ তাহার। পরস্পর সদৃশ। [৬ষ্ঠ, ২১।

মুতরাং ওছ সমান্তর ক্ষেত্র, জট সমান্তর ক্ষেত্রের সদৃশ।

অতএব কোন সমান্তর ক্ষেত্রের ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

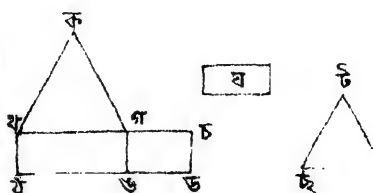
অঃ প্রঃ—২৮। এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে ওছ এবং জট সংযুক্ত করিয়া প্রমাণ কর যে, তাহার। পরস্পর সমান্তর রেখা।

২৫ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য। -

কোন নির্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ও অন্য এক সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সমান একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

কথগ নির্দিষ্ট সরল রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ও য ক্ষেত্রের সমান একটী সরল রৈখিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে।

কথগ ত্রিভুজের
সমান করিয়া থগ
রেখার উপর থঙ
সমান্তর ক্ষেত্র
অঙ্কিত কর।



[১ম, ৪৫, অনু।

গথট কোণের সমান একটী কোণবিশিষ্ট এবং য ক্ষেত্রের সমান, গড সমান্তর ক্ষেত্র, গঙ রেখার উপর অঙ্কিত কর ; [১ম, ৪৫, অনু।

অতএব খগ ও গচ এক রেখাস্থ এবং ঠঙ ও ঙড এক রেখাস্থ হইবে ।

খগ রেখা ও গচ রেখার মধ্য সমানুপাতী ছজ রেখা
কম্পনা কর, [৬ঠ, ১৩।

এবং কখগ ক্ষেত্রের সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত টছজ ক্ষেত্র
ছজ রেখার উপর অঙ্কিত কর । [৬ঠ, ১৮।

টছজ সম্পাদ্য সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র ।

খগতে ছজতে যে রূপ, ছজতে গচতে সেই রূপ
হওয়াতে, [অঙ্কন।

আর, তিন সরল রেখা সমানুপাতী হইলে, প্রথমে তৃতীয়ে
যে রূপ, প্রথমের উপর অঙ্কিত ক্ষেত্রে দ্বিতীয়ের উপর
তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্রে সেই রূপ হইয়া থাকে
বলিয়া, [৬ঠ, ২০, অনু।

খগতে গচতে যে রূপ, কখগ ক্ষেত্রে টছজ ক্ষেত্রে সেই রূপ ;
আর খগতে গচতে যে রূপ, খঙ ক্ষেত্রে গড ক্ষেত্রে সেই
রূপ ; [৬ঠ, ১।

সুতরাং কখগ ক্ষেত্রে টছজ ক্ষেত্রে যে রূপ, খঙ সমান্তর
ক্ষেত্রে ঙচ সমান্তর ক্ষেত্রে সেই রূপ , [৫ম, ১১।

ও কখগ সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্র খঙ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান
বলিয়া, [অঙ্কন।

টছজ ক্ষেত্র ঙচ সমান্তর ক্ষেত্রের সমান ; [৫ম, ১৪"।

আর ঙচ ক্ষেত্র ঘএর সমান ; [অঙ্কন।

সুতরাং টছজ ক্ষেত্র ঘ ক্ষেত্রের সমান, [স্বতঃ ১।

আর ইহা কখগএর সদৃশ । [অঙ্কন।

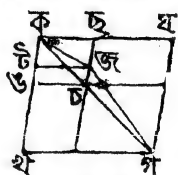
অতএব কখগ সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশ ও ঘ ক্ষেত্রের সমান টজ ক্ষেত্র অঙ্কিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—২১। কোন নির্দিষ্ট সমচতুর্ভুজের সমান একটি নিয়মিত ষড়্ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

২৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

সদৃশ ও এক কাপে অঙ্কিত দুই সমান্তর ক্ষেত্রের যদি একটি সমান্য কোণ থাকে, তবে তাহাদের কর্ণ দ্বয় একই রেখাস্থ হইবে।

কখগঘ, কঙচছ দুই সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত সমান্তর ক্ষেত্রের যকথ যেন সামান্য কোণ; কখগঘ এবং কঙচছএর কর্ণ একই রেখাস্থ হইবে।



যদি না হয়, তবে থঘ ক্ষেত্রের কর্ণ টজ ক্ষেত্রের কর্ণ হইতে ভিন্ন রেখাস্থ হইয়া যেন কজগ হইল; জ বিন্দুতে কজগএর সহিত যেন চছ সংলগ্ন হইল; এবং জ বিন্দু দিয়া কঘএর বা থগএর সমান্তর জট রেখা টান;

[১ম, ৩১।

তাহা হইলে কখগঘ ও কটজছ একই কর্ণ রেখার পরিতঃস্থ হওয়াতে পরস্পর সদৃশ হইবে;

[৬ষ্ঠ, ২৪।

অতএব যকতে কখতে যে রূপ, ছকতে কটতে সেই রূপ; আর কখগঘ ও কঙচছ ক্ষেত্র সদৃশ হওয়ায়,

[কম্পনা।

যকতে কথতে যে রূপ, ছকতে কঙতে সেই রূপ :

[৬ষ্ঠ, সং ১]

অতএব ছকতে কটতে যে রূপ, ছকতে কঙতে সেই রূপ,

[৫ম, ১১]

অর্থাৎ কট, কঙ প্রত্যেকের সহিত কছএর একই সম্বন্ধ,

অতএব কট রেখা কঙর সমান,

[৫ম, ৯]

অর্থাৎ ক্ষুদ্রতর রহত্তরের সমান ; কিন্তু এরূপ হওয়া
অসম্ভব ।

সুতরাং কথগণ্য, কঙচছ ক্ষেত্র দ্বয়ের কর্ণ অবশ্যই এর
রেখাস্থ হইবে ।

অতএব সদৃশ ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩০ । সদৃশ ও এক রূপে অঙ্কিত দুই সমান্তর
ক্ষেত্র একাকারে অঙ্কিত তাহাদের কর্ণ দ্বয়ের অনুপাতের বিষয়
অনুপাতী হইবে ।

[২৭—২৯ প্রতিজ্ঞা । *]

৩০ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট সরল রেখাকে অন্ত্য ও মধ্য অনু-
পাত্তি রূপে ছেদ করিতে হইবে ।

কথ যেন নির্দিষ্ট রেখা ; ইহাকে অন্ত্য ও মধ্য অনু-
পাত্তি রূপে ছেদ করিতে হইবে ।

* এই কএকটি প্রতিজ্ঞার বিশেষ ফলোপধায়কতা নাই
বলিয়া, এ দেশের বা ইংলণ্ডের কোন অমিত্র বিদ্যালয়ে এই
গুলি পঠিত হয় না ; এজন্য পরিত্যক্ত হইল ।

কথকে এ রূপে ভাগ কর, যেন কথ

৭ খণ্ডের অন্তর্গত আয়ত কণ্ডের ক গ খ
উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয়। [২য়, ১১]

পরে, কথ ও খগের অন্তর্গত আয়ত কগের উপর সম-
চতুর্ভুজের সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।

কথতে কগতে যে রূপ, কগতে গথতে সেই রূপ। [৫ম, ১৭।

যতএব কথা রেখা গা বিন্দুতে অন্তা ও মন্য অনুপাতি রূপে
 ছেদিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩১। প্রমাণ কর যে, দ্বিতীয় অধ্যায়ের ১১শ
প্রতিজ্ঞার চিত্রে কথ রেখা। যে রূপে বিভক্ত হইয়াছে, আর
৮টি বোঝাও সেই রূপে বিভক্ত হইয়াছে।

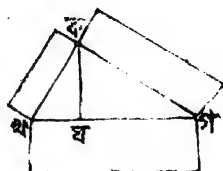
৩১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সম কোণী ত্রিভুজের সম্মুখীন বাহুর উপর অঙ্কিত কোন সরল রৈখিক ক্ষেত্র সম কোণের পার্শ্বস্থ দুই বাহুর উপর তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান।

কখনও সম কোণী ত্রিভুজের থাকবে কোণ সম কোণ ;
 খণ্ডের উপর অঙ্কিত সরল রেখিক ক্ষেত্র থাকবে ও কণ্ডের
 উপর তদ্রূপ অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান
 হইবে।

কয় লক্ষ টান । ১৫, ১২ ।

পরে, কথগ ত্রিভুজের
ক সম কোণ হইতে খগ
ভূমির উপর কঘ লম্ব টানা
হইয়াছে বলিয়া, কথঘ ও



কগঘ এই দুইটা ত্রিভুজ সমস্ত কথগ ত্রিভুজের ও পরস্পরের
সদৃশ ; [৬ষ্ঠ, ৮ ।

আর গথক ও কথঘ ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ বলিয়া,
গথতে থকতে যে রূপ, থকতে খঘতে সেই রূপ ;

[৬ষ্ঠ, সং ১ ।

এবং তিন সরল রেখা সমানুপাতী হইলে প্রথমে তৃতীয়ে
যে অনুপাত, প্রথমের উপর অঙ্কিত ক্ষেত্রে দ্বিতীয়ের উপর
তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইয়া
থাকে ; [৬ষ্ঠ, ২০, অনু ২ ।

এই হেতু, গথতে খঘতে যে অনুপাত, থগএর উপর
অঙ্কিত ক্ষেত্রে, থকএর উপর তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ
ক্ষেত্রে সেই অনুপাত ;

এবং বিলোমে, খঘতে থগতে যে অনুপাত, থকএর
উপরিস্থ ক্ষেত্রে থগএর উপরিস্থ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত ;

[৫ম, থ ।

এই প্রকারে গঘতে গথতে যে অনুপাত, গকএর উপরিস্থ
ক্ষেত্রে গথএর উপরিস্থ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত ;

অতএব একত্র রূত থঘ ও গঘএর থগএর সহিত যে অনুপাত,
থক ও কগএর উপর অঙ্কিত একত্র রূত ক্ষেত্র দ্বয়ের থগএর
উপরিস্থ ক্ষেত্রের সহিত সেই অনুপাত । [৫ম, ২৪ ।

আর একত্র রূত থঘ ও গঘ, থগএর সমান ;

সুতরাং থগএর উপর অঙ্কিত ক্ষেত্র, থক এবং কগএর উপর
তদ্রূপে অঙ্কিত ও তৎ সদৃশ ক্ষেত্র দ্বয়ের সমান । [৫ম, ক ।
অতএব সম কোণী ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

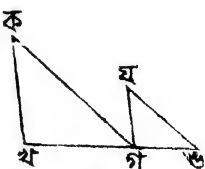
অঃ প্রঃ—৩১ । দুইটি নির্দিষ্ট সদৃশ সরল ত্রৈভুজিক ক্ষেত্রের সমষ্টির বা অন্তরের সমান ও উভয় ক্ষেত্রের সদৃশ আর একটা সরল ত্রৈভুজিক ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে হইবে ।

৩২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুইটি ত্রিভুজের মধ্যে একের দুই বাহু অন্যের দুই বাহুর সহিত সমানুপাতী হইলে, যদি সবর্ণীয় বাহুগুলি সমান্তর করিয়া ত্রিভুজ দুইটিকে কোণে কোণে সংযুক্ত করা যায়, তবে অবশিষ্ট বাহুগুলি এক রেখাতে থাকিবে ।

কখগ ত্রিভুজের খক ও কগ দুই বাহু যেন ঘগঙ ত্রিভুজের গঘ ও ঘঙ দুই বাহুর সহিত সমানুপাতী অর্থাৎ কখতে কগতে যে রূপ, ঘগতে ঘঙতে সেই রূপ ; এবং কখ যেন ঘগএর সমান্তর ও কগ, ঘঙএর সমান্তর ; তাহা হইলে খগ, গঙ এক রেখাতে থাকিবে ।

কখ রেখা ঘগ রেখার সমান্তর
বলিয়া, [কল্পনা ।
এবং কগ রেখা উহাদের উপর
পতিত হওয়াতে,



খকগ কোণ তাহার একান্তর কগঘ কোণের সমান ;

[১ম, ২৯ ।

এই কারণে, কগঘ কোণ গঘঙ কোণের সমান ;

সুতরাং খকগ কোণ গঘঙ কোণের সমান ; [স্বতঃ ১ ।

আর কথগ ত্রিভুজের ক কোণ যগঙ ত্রিভুজের য কোণের সমান হওয়ায় এবং এই দুই কোণের পার্শ্বস্থ বাহু গুলি সমানুপাতী বলিয়া অর্থাৎ থাকতে কগতে যে রূপ, গযতে যঙতে সেই রূপ হওয়াতে। [কম্পনা।

কথগ ও যগঙ ত্রিভুজ সমান কোণী ; [৬৪, ৬।

অতএব কথগ কোণ যগঙ কোণের সমান :

আর থকগ কোণ কগয কোণের সমান উপপন্ন হইয়াছে। সুতরাং সমুদয় কগঙ কোণ কথগ ও থকগ এই দুই কোণের সমান ; [স্মৃতঃ ২।

এই দুই সমান রাশির প্রত্যেকের সহিত কগথ কোণ যোগ করিলে কগঙ ও কগথ কোণ একত্র যোগে কথগ, থকগ ও কগথ এই তিন কোণের সমান হইবে।

আর কথগ, থকগ ও কগথ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান ; [১ম, ৩২।

অতএব কগঙ ও কগথ কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান।

এক্ষণে, থগ ও গঙ রেখা দ্বয় কগএর উভয় পার্শ্ব গ বিন্দুতে কগঙ ও কগথ কোণ উপপন্ন করিতেছে ও এই দুই সম্বিহিত কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণের সমান। সুতরাং থগ ও গঙ এক রেখাস্থ হইল।

অতএব দুইটা ত্রিভুজের ইত্যাদি। এখানে ইহার উপপাদ্য।

অঃ প্রঃ—৩৩। দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের দুই বাহু অন্যের দুই বাহুর সহিত সমানুপাতী হইলে, যদি ত্রিভুজ যদ্যে

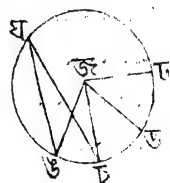
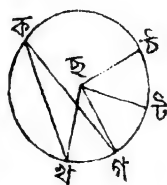
কোণে কোণে এক্রূপে সংযুক্ত করা যায় যে, এক একটি সর্বগোচর বাহু সমান্তর ও আর এক একটি সর্বগোচর বাহু এক রেখাংশ হয়, তবে দুইটি ত্রিভুজের অবশিষ্ট বাহু দ্বয় এক রেখাংশ বা সমান্তর হইবে ।

৩৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

সমান সমান বৃত্তের কেন্দ্রস্থ বা পরিধিস্থ কোণ গুলির অনুপাত, সম্মুখীন চাপের অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে ; বৃত্তক্ষেদক গুলিরও অনুপাত এই প্রকার হইবে ।

কথগ ও ঘঙচ যেন সমান সমান দুই বৃত্ত এবং খছগ ও ঙ্জচ কেন্দ্রস্থ কোণ আর থকগ ও উঘচ পরিধিস্থ কোণ ; তাহা হইলে থগ চাপে উচ চাপে যে রূপ, খছগ কোণে ঙ্জচ কোণে সেই রূপ এবং থকগ কোণে উঘচ কোণেও তক্রূপ ; আর বৃত্তক্ষেদক খছগ ও ঙ্জচএর অনুপাত এই প্রকার হইবে ।

গট, টঠ প্রভৃতি
কতিপয় চাপ প্র-
ত্যেকে থগএর সমান
এবং চড, ডচ
প্রভৃতি কতকগুলি



• চাপ প্রত্যেকে উচএর সমান কল্পনা কর ; এবং ছট, ছাট, জড, জচ সংযুক্ত কর ।

পরে থগ, গট, টঠ চাপ পরস্পর সমান বলিয়া, [অং ।
খছগ, গছট, টছঠ কোণ পরস্পর সমান ; [এং, ২৭ ।

এই হেতু, খঠ চাপ খগএর যে গুণিত, খছঠ কোণ খছগ
কোণের সেই গুণিত ।

এই কারণে, ওচ চাপ ওচএর যে গুণিত, ওজচ কোণ ওজচ
কোণের সেই গুণিত ;

আর খঠ চাপ ওচ চাপের সমান হইলে, খছঠ কোণ
ওজচ কোণের সমান হইবে ; [৩য়, ২৭ ।

ও খঠ চাপ ওচ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে খছঠ কোণ ওজচ
কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

অতএব খগ ও ওচ চাপ এবং খছগ ও ওজচ কোণ
এই চারি রাশির মধ্যে খগ চাপের ও খছগ কোণের কোন
সমগুণিত খঠ চাপ ও খছঠ কোণ কল্পিত হইয়াছে ;

এবং ওচ চাপের ও ওজচ কোণের কোন সমগুণিত ওচ
চাপ ও ওজচ কোণ কল্পিত হইয়াছে :

আর একরূপ উপপন্ন হইয়াছে যে, খঠ চাপ ওচ চাপ অপেক্ষা
বৃহত্তর হইলে খছঠ কোণ ওজচ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর,
সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে :

অতএব খগ চাপে ওচ চাপে যে রূপ, খছগ কোণে ওজচ
কোণে সেই রূপ ; [৫ম, সং ৫ ।

আর খছগ কোণে ওজচ কোণে যে রূপ, খকগ কোণে
ওঘচ কোণে সেই রূপ ; [৫ম, ১৫ ।

কেননা, প্রথম দুই কোণ যথাক্রমে অন্য দুই কোণের
দ্বিগুণ ; [৩য়, ১০ ।

সুতরাং খগ চাপে ওচ চাপে যে রূপ, খছগ কোণে ওজচ
কোণে সেই রূপ এবং খকগ কোণে ওঘচ কোণেও তদ্রূপ ।

আবার খগ চাপে ওচ চাপে যে রূপ, খছগ রত-
চ্ছেদকে ওজ্জচ রতচ্ছেদকে সেই রূপ হইবে ।

খগ, গট, সংযুক্ত কর এবং খগ ও গট চাপে ভ ও গ
বিন্দু কল্পনা কর, ও খভ, ভগ, গণ, গট সংযুক্ত কর ।

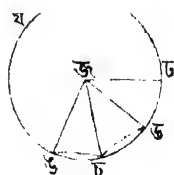
পরে খছগ, গছট ত্রিভুজের খছ, ছগ এই দুই বাহু
সমাপ্রকমে গছ, ছট বাহুর সমান হওয়ায়,

আর এই দুই দুই বাহুর অন্তর্গত কোণ গুলি পরস্পর সমান
বলিয়া ; [৩য়, ২৭ ।

খগ ভূমি গট ভূমির সমান এবং ছখগ ত্রিভুজ ছগট
ত্রিভুজের সমান ; [১ম, ৪ ।

আর খগ চাপ গট চাপের সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।
সমুদয় পরিধি হইতে খগ, গট এই দুই সমান অংশ
বিয়োগ করিলে, অবশিষ্ট পরিধি খগু দ্বয় পরস্পর সমান
হইবে ; [স্বতঃ ৩ ।

এই ভেতু, খভগ ক
কোণ গণট কোণের
সমান : [৩য়, ২০ ।
সুতরাং খভগ রত-
খগু গণট রতখগের
সদৃশ :



• ও তাহার খগ, গট এই দুই সমান সমান রেখার উপরিস্থ
হইয়াছে :

এবং সমান সমান রেখার উপরিস্থ সদৃশ রতখগ গুলি
• পরস্পর সমান হইয়া থাকে . [৩য়, ২৪ ।

অতএব খন্ডগ রত্নখণ্ড গণট রত্নখণ্ডের সমান ;

আর খন্ডগ ত্রিভুজ গছট ত্রিভুজের সমান উপপন্ন
হইয়াছে ;

সুতরাং সমস্ত খন্ডগ, রত্নচ্ছেদক সমস্ত গছট রত্নচ্ছেদকের
সমান । [স্বতঃ ২ ।

এই কারণে, টছট রত্নচ্ছেদক খন্ডগ ও গছট এই দুইএর
প্রত্যেকের সমান ।

এই রূপে উপপন্ন হইবে যে, ওজচ, চজড, ডজচ এই
রত্নচ্ছেদক গুলি পরস্পর সমান ।

অতএব খঠ চাপ খগএর যে গুণিত, খছট রত্নচ্ছেদক
খন্ডগ রত্নচ্ছেদকের সেই গুণিত ;

এবং এই রূপে ওচ চাপ ওচ চাপের যে গুণিত, ওজচ
রত্নচ্ছেদক ওজচ রত্নচ্ছেদকের সেই গুণিত ;

আর খঠ পরিধি খণ্ড ওচ পরিধি খণ্ডের সমান হইলে,
খছট রত্নচ্ছেদক ওজচ রত্নচ্ছেদকের সমান হইবে ;

ও খঠ পরিধি খণ্ড ওচ অপেক্ষা বৃহত্তর হইলে, খছট
রত্নচ্ছেদক ওজচ রত্নচ্ছেদক অপেক্ষা বৃহত্তর এবং ক্ষুদ্রতর
হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ।

অতএব খগ ও ওচ চাপ এবং খন্ডগ ও ওজচ রত্ন-
চ্ছেদক এই চারি রাশির মধ্যে খগ চাপ ও খন্ডগ রত্নচ্ছেদ-
কের কোন সমগুণিত খঠ চাপ ও খছট রত্নচ্ছেদক কল্পিত
হইয়াছে এবং ওচ চাপ ও ওজচ রত্নচ্ছেদকের কোন সম-
গুণিত ওচ চাপ ও ওজচ রত্নচ্ছেদক কল্পিত হইয়াছে
আর একরূপ প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, খঠ চাপ ওচ অপেক্ষা

রহস্তর হইলে, খচ্চর রত্নচ্ছেদক ওজচ রত্নচ্ছেদক অপেক্ষা
রহস্তর, সমান হইলে সমান এবং ক্ষুদ্রতর হইলে ক্ষুদ্রতর
হইবে ;

সুতরাং খগ চাপে ওচ চাপে যে রূপ, খচ্চর রত্নচ্ছেদকে
ওজচ রত্নচ্ছেদকে সেই রূপ । [৫ম, সং ৫ ।

অতএব সমান সমান রত্নের ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩৪ । সমান সমান দুই রত্ন পরস্পরকে একপে
ছেদ করিয়াছে যে, একের কেন্দ্র অন্যের পরিধিস্থ হইয়াছে ;
প্রমাণ কর যে, উভয় রত্ন পরিধির এক এক খণ্ড অন্য এক এক
খণ্ডের দ্বিগুণ ।

খ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন ত্রিভুজের শীর্ষ কোণ যদি একটি সরল রেখা
দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হয় এবং সেই রেখা যদি ভূমিকে ছেদ
করে, তবে ত্রিভুজের দুই বাহুর অন্তর্গত আয়ত
ভূমির দুই খণ্ডের অন্তর্গত আয়তের ও কোণ দ্বিখণ্ড
কারক রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

কখগ ত্রিভুজের শীর্ষ কোণ যেন কঘ রেখা দ্বারা
দ্বিখণ্ডিত হইয়াছে ; তাহা হইলে খক ও কগএর আয়ত
খঘ ও ঘগএর অন্তর্গত আয়তের এবং কঘএর উপর অঙ্কিত
সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

বর্জিত খগ ভূমিকে ও বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রমাণ কর যে, খঙ ও ঙগএর আয়ত, খক ও কগএর আয়ত এবং কঙ রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হইবে ।

গ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন ত্রিভুজের শীর্ষ কোণ হইতে ভূমির উপর লম্ব টানিলে, ত্রিভুজের দুই বাহুর অন্তর্গত আয়ত, লম্ব রেখা ও ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাস এই দুইএর অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে ।

খকগ ত্রিভুজের শীর্ষস্থ ক কোণ হইতে ভূমির উপর কঘ লম্ব টানিলে খক ও কগএর আয়ত, কঘ ও কখগ ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাস এই দুইএর অন্তর্গত আয়তের সমান হইবে ।

ত্রিভুজের উপর কগখ রূপে অঙ্কিত কর ;

[৪থ, ৫ ।

কঙ ব্যাস টান ও ঙগ সংযুক্ত কর ।

পরে খযক সম কোণ, অর্ধবৃত্তস্থ ঙগক সম কোণের সমান হওয়ায়, [৩য়, ৩১ ।

আর কখঘ ও কঙগ এই দুই কোণ এক বৃত্তখণ্ডস্থ বলিয়া পরস্পর সমান হওয়াতে,

[৩য়, ২১ ।

কখঘ ও কঙগ ত্রিভুজ সমান কোণী ;

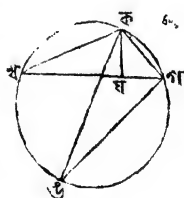
[১ম, ৩২ ।

অতএব খকতে কঘতে যে রূপ, ঙকতে কগতে সেই রূপ ;

[৬ষ্ঠ, ৪ ।

সুতরাং খক ও কগএর আয়ত, ঙক ও কঘএর আয়তের সমান ।

[৬ষ্ঠ, ১৬ ।



অতএব কোন ত্রিভুজের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১৬ . একটি ত্রিভুজের তিন বাহু ধারা বাহ্যিক রূপে কোন সমান্তর শ্রেণীর রাশি । যদি ক এবং খ, ত্রিভুজের বৃহত্তম এবং লঘুতম বাহু হয় আর ত্রিভুজের অন্তর্গত ও উপরি অঙ্কিত বৃত্তের ব্যাসার্ধ যদি অ এবং ই হয়, তবে প্রমাণ কর যে.
 $\text{কই} = \text{ক} \times \text{খ}$ ।

য প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

একটি বৃত্তের অন্তর্গত কোন চতুর্ভুজের দুই কর্ণের অন্তর্গত আয়ত ঐ ক্ষেত্রের সম্মুখীন দুই দুই বাহুর অন্তর্গত আয়তের সমান ।

কথগঘ একটি বৃত্তের অন্তর্গত কোন চতুর্ভুজ ; কগ, খঘ সংযুক্ত কর ; তাহা হইলে কগ ও খঘএর আয়ত কথ ও গঘএর আয়ত এবং কঘ ও খগএর আয়ত এই দুইএর সমান হইবে ।

যখগ কোণের সমান কথঙ

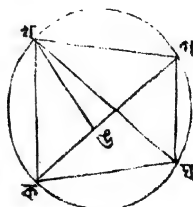
কোণ কর : [১ম, ২৩।

এই দুই সমান কোণে ঔখঘ

কোণ যোগ করিলে, সমস্ত কথঘ

কোণ সমস্ত ঔখগ কোণের সমান

হইবে ; [স্বতঃ ২।



আর খঘক ও খগঙ কোণ এক বৃত্তখণ্ডস্থ হওয়ায়, পরস্পর সমান ; [৩য়, ২১।

এই হেতু, কথঘ ও ঔখগ ত্রিভুজ সমান কোণী ;

সুতরাং কথ্যে যথ্যে যে রূপ, উগ্যে গথ্যে সেই রূপ,
[৬ষ্ঠ, ৪ ।

অতএব কথ্য ও গথ্যের আয়ত যথ্য ও উগ্যের আয়তের
সমান ; [৬ষ্ঠ, ১৬ ।

আবার কথ্যও কোণ যথ্য কোণের সমান হওয়ায়,
[অঙ্কন ।

এবং থক্য ও থয্য এক বৃত্তথক্য বলিয়া পরস্পর সমান
হওয়াতে, [৩য়, ২১ ।

কথ্য ও যথ্য ত্রিভুজ দ্বয় সমান কোণী ;

সুতরাং থক্যে কথ্যে যে রূপ, থয্যে যথ্যে সেই রূপ ;
[৬ষ্ঠ, ৪ ।

অতএব থক্য ও যথ্যের আয়ত, কথ্য ও থয্যের আয়তের
সমান ; [৬ষ্ঠ, ১৬ ।

আর কথ্য, গথ্যের আয়ত যথ্য, উগ্যের আয়তের সমান
উপপন্ন হইয়াছে ;

এই হেতু, কথ্য, গথ্যের আয়ত ও থক্য, যথ্যের আয়ত একত্র
যোগে থয্য, উগ্যের আয়ত ও থয্য, কথ্যের আয়তের সমান ;
অর্থাৎ থয্য, কথ্যের আয়তের সমান । [২য়, ১ ।

অতএব একটী বৃত্তের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩৭ । কোন বৃত্তের অন্তর্গত একটী চতুর্ভুজের
কোন রেখা বরাবর যদি পরস্পরকে লম্ব ভাবে ছেদ করে, তবে
পরস্পর সম্মুখীন দুইটি দুইটি বাহুর অন্তর্গত আয়তের যোগ
দুই চতুর্ভুজ ক্ষেত্রের দ্বিগুণ হইবে ।

৩৮। কোন দুই রেখার অন্তর্গত আরও তাহাদের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ দ্বয়ের মধ্য সমানুপাতী হইবে।

৩৯। কোন চতুর্ভুজের সম্মুখীন দুই কোণ হইতে তাহাদের অভিমুখীন কর্ণের উপর পাতিত দুইটি লম্ব রেখার পরিমাণ সমান; চতুর্ভুজের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে এক্রূপে দোরিটী রেখা টানিতে হইবে, যেন ক্ষেত্রটি চারি সমান সমান ত্রিভুজে বিভক্ত হয়।

৪০। কোন ত্রিভুজের একটি কোণ হইতে সম্মুখীন বাহুর মধ্য বিন্দু পর্য্যন্ত একটি রেখা টানিলে এবং আর একটি কোণ হইতে এই রেখার মধ্য বিন্দু দিয়া সম্মুখীন বাহু পর্য্যন্ত অন্য একটি রেখা টানিলে, দুইপ্রান্ত একেত্রে যে অনুপাত, শোষণক রেখার অংশদ্বয়েতেও সেই অনুপাত হইবে।

৪১। কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এক্রূপে একটি রেখা টানিতে হইবে, যেন আর দুইটি নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উহার উপর লম্ব টানিলে, প্রথমোক্ত বিন্দুর উভয় পার্শ্বস্থ লম্ব পর্য্যন্ত ঐ রেখার দুই খণ্ড পরস্পর সমান হয়।

৪২। কোন ত্রিভুজের কোণ সকল হইতে সম্মুখীন বাহু বা বর্দ্ধিত বাহু পর্য্যন্ত যদি সমান সমান তিনটি রেখা টানা যায় আর ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ কোন বিন্দু হইতে বাহু পর্য্যন্ত তাহাদের সমান্তর অন্য তিনটি রেখা টানা যায়, তবে শোষণক রেখা ত্রয়ের সমষ্টি প্রথমোক্ত কোন একটি রেখার সমান হইবে।

৪৩। তিনটি বৃত্ত যদি পরস্পর স্পর্শ করে, আর উহাদের মধ্যে দুইটি যদি সমান হয়, তবে স্পর্শ বিন্দু ত্রয় সংযুক্ত করিয়া দিলে, যে ত্রিভুজ হইবে, তাহার শীর্ষ কোণ, কেন্দ্র তিনটির সংযোগ দ্বারা উৎপন্ন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমি সংলগ্ন একটি কোণের সমান হইবে।

৪৪। কখনও একটি সমবাহু ত্রিভুজ; কণ রেখাও ও কোন এক বিন্দু; খণ্ডকে বর্দ্ধিত করিয়া ভাঙ্গা হইতে গক ও গএর সমান করিয়া গঘ ও গচ অংশ ছেদ কর। জ বিন্দুতে যেন কচ, ঘও রেখা দ্বয়ের পরস্পর সম্পাত হইল; প্রমাণ কর যে,
জগ : গগ :: কগ : কগ + গগ।

৪৫। কোন বৃত্তের অন্তর্গত একটি চতুর্ভুজের কণ, ঋষ কণ পরস্পর ও বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে; প্রতিপন্ন কর যে,
কথ.খগ : কঘ.ঘগ :: খঙ : ওঘ ।

৪৬। একটি বর্গক্ষেত্র এরূপে কোন সম কোনো ত্রিভুজের অন্তর্গত করা হইয়াছে যে, তাহার একটি বাহু ও ত্রিভুজের কণ এক রেখা হইয়াছে। প্রমাণ কর যে, কণের তিন অংশ ক্রমাগত সমানুপাতী হইবে।

৪৭। কথগ, কোন বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজ, যদি ক বিন্দু হইতে বৃত্ত স্পর্শক রেখা ও খ বিন্দু হইতে তাহার সমান্তর ঋষ রেখা টানা যায়, আর এই রেখা যদি ঘ বিন্দুতে কণ বা বর্জিত কণ বাহুকে ছেদ করে, তাহা হইলে কথ রেখা কণ ও কঘএর মধ্য সমানুপাতী হইবে।

৪৮। পরস্পর বহিস্ত দুই বৃত্তের কেন্দ্র হইতে প্রত্যেকের এক একটি স্পর্শিনী টানিলে, যদি উহার পরস্পর ছেদ করে, তবে উভয় বৃত্তের স্পর্শিনীর যে যে ভাগ দুই বৃত্তের বাহিরে থাকিবে, তাহাদের অংশ দ্বয়ের অন্তর্গত এক একটি আয়ত পরস্পর সমান হইবে।

৪৯। কোন বৃত্তের ব্যাসের দুই প্রান্ত ও পরিবিস্ত অন্য এক বিন্দু দিয়া এক একটি স্পর্শিনী টানিলে, তন্মধ্যে তৃতীয়টির যে ভাগ অন্য দুইটির মধ্য থাকিবে, তাহা স্পর্শ বিন্দুতে এরূপে বিভক্ত হইবে যে, বৃত্তের ব্যাসার্ধ তাহার দুই খণ্ডের মধ্য সমানুপাতী হইবে।

৫০। কোন বৃত্তের অন্তর্গত দুই জ্যা যদি পরস্পরকে এরূপে ছেদ করে যে, একের দুই খণ্ড যে অনুপাত বিশিষ্ট, অন্যের দুই খণ্ডও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হয়, তাহা হইলে সর্ব-গৌর খণ্ড দ্বয়ের অন্তর্গত কোণের দ্বিখণ্ডকারক রেখা, বৃত্তের কেন্দ্র দিয়া যাইবে।

৫১। একটি ত্রিভুজকে কোন অর্ধ বৃত্তের অন্তর্গত করিয়া, যদি ব্যাসের কোন বিন্দু হইতে একটি লম্ব রেখা টানা যায় ও তাহা যদি পরিবিস্ত ও ত্রিভুজের অন্য দুই বাহু ছেদ করে, তবে লম্বের তিন খণ্ড ক্রমাগত সমানুপাতী হইবে।

৫২। এক সমচতুর্ভুজ কোন ত্রিভুজের অন্তর্গত করিবে হইবে।

৫৩। যদি এক বৃত্ত পরিধির কোন বিন্দু দিয়া একটা স্পর্শিনী ও তথা হইতে কতকগুলি জ্যা টানা যায় এবং স্পর্শিনীর সমাধারে অন্য একটা জ্যা যদি পূর্বোক্ত জ্যা গুলিকে ছেদ করে, তবে তাহাদের এক একটীর সমদ্বয়ের ও সমান্তর রেখাদ্বয়ের মধ্যস্থিত অংশের অন্তর্গত আয়ত গুলি পরস্পর সমান হইবে।

৫৪। সদৃশ ত্রিভুজ দ্বয়ের সমান সমান এক একটা কোণ হইতে সরণীয় বাহুর সহিত সমান সমান কোণ করিয়া যদি এক একটা রেখা সম্মুখীন বাহু পর্য্যন্ত টানা যায়, তবে সম্মুখীন বাহু দ্বয় যে অনুপাত বিশিষ্ট, এই রেখা দ্বয়ও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে এবং সম্মুখীন বাহু দ্বয়কে সমানুপাতী রূপে ছেদ করিবে।

৫৫। ষষ্ঠ অধ্যায়ের ২য় প্রতিজ্ঞার প্রয়োগ দ্বারা প্রদর্শন করিতে হইবে যে, এক খণ্ড বৃত্তজুলিয়া কোন নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া এক নির্দিষ্ট রেখার সমান্তর আর একটা রেখা টানা যায়।

৫৬। কোন ত্রিভুজের ক কোণ সম কোণ; যদি গ কোণকে দ্বিখণ্ড করিয়া গঘ রেখা টানা যায়, তবে প্রমাণ কর যে,
কখ : কগ : : খগ — কগ : কঘ।

৫৭। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের একটা ব্যাসের দুই প্রান্ত হইতে কোন জ্যার উপর যদি দুইটা লম্ব টানা যায়, তবে দুইটা লম্ব কেন্দ্র হইতে সমদূরে জ্যার বা বর্ধিত জ্যার সহিত সংলগ্ন হইবে।

৫৮। কোন নির্দিষ্ট বর্গ ক্ষেত্রের সমান একটা সমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৫৯। খকগ সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের খক ও খগ বাহু পরস্পর সমান; খক বাহুস্থিত ও বিন্দু হইতে ঈচঘ সরল রেখা এক্ষেপে টান, যেন তাহা ভূমির চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড ও বর্ধিত কগ বাহুর সহিত ঘ বিন্দুতে সংলগ্ন হয়। প্রমাণ কর যে,
গঘ = কঙ।

৩০। কোন নির্দিষ্ট বর্গ ক্ষেত্রের সমান এক নিয়মিত অষ্ট-ভুজ অঙ্কিত করিতে হইবে।

৩১। একই ভূমির উপর কোন নির্দিষ্ট অনুপাতী দুই বাহু বিশিষ্ট যতগুলি বিষমবাহু ত্রিভুজ অঙ্কিত হইতে পারে, তাহাদের শীর্ষ বিন্দু দ্বারা একটি বৃত্ত পরিধি অঙ্কিত হইবে।

৩২। ভূমির উপর একটি লম্ব টানিয়া কোন নির্দিষ্ট ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে।

৩৩। ত্রিভুজের তিন কোণ হইতে সম্মুখীন বাহুত্রয়ের মধ্য বিন্দু পর্যন্ত তিন রেখা নির্দিষ্ট আছে ; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে ;

৩৪। এক বর্গক্ষেত্র কোন নির্দিষ্ট বৃত্তখণ্ডের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৩৫। কতকগুলি রেখা যদি কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে কোন নির্দিষ্ট বৃত্ত পরিধি পর্যন্ত টানা যায় এবং যদি ঐ রেখাগুলিকে একত্রে বিভক্ত করা যায় যে, অংশগুলি কোন নির্দিষ্ট অনুপাতী হয়, তবে ছেদ বিন্দুগুলি দ্বারা আর একটি বৃত্ত পরিধি উৎপন্ন হইবে।

৩৬। দুই নির্দিষ্ট বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিলে, একটি ছেদ বিন্দু দিয়া একত্রে এক রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহা উভয় বৃত্তকে ছেদ করে ও তাহার যে যে অংশ প্রত্যেক বৃত্তের জ্যা হইবে, তাহারা যেন কোন নির্দিষ্ট অনুপাত বিশিষ্ট হয়।

৩৭। কোন নির্দিষ্ট সমান্তর ক্ষেত্রের সদৃশ আর একটি সমান্তর ক্ষেত্র এক নির্দিষ্ট ত্রিভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে।

৩৮। যদি কোন ত্রিভুজের শৃঙ্গ ও ভূমির এক এক প্রান্ত দিয়া এক একটি বৃত্ত একত্রে অঙ্কিত করা যায় যে, তাহারা ভূমির বা বর্দ্ধিত ভূমির কোন বিন্দুতে পরস্পর ছেদ করে, তবে ত্রিভুজের বাহু দ্বয় যে অনুপাত বিশিষ্ট, বৃত্ত দ্বয়ের ব্যাসগুলিও সেই অনুপাত বিশিষ্ট হইবে।

৩৯। দুই অসমান বৃত্তের কেন্দ্র ক ও খ ; রূপ ও খক্ষ দুই সমান্তর ব্যাসার্ধ। প্রতিপাদন কর যে, পক্ষ রেখা টানিলে,

তাহা এমন এক অপরিবর্তনীয় বিন্দু দিয়া যাইবে, দুই কেন্দ্র হইতে যাহার দূরত্বের অনুপাত দুই বৃত্তের ব্যাসার্ধের অনুপাতের সমান হইবে ।

ইহা হইতে দুই বৃত্তের সাধারণ স্পর্শিনী টানিবার উপায় স্থির কর ।

৭০। দুই বৃত্তের এক পার্শ্বের সাধারণ স্পর্শিনী গম্য রেখা, কেন্দ্র সংযোজক কণা রেখাকে ও বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; চছজটঙ আর একটা রেখা দুই বৃত্তকে ছেদ করিতেছে । প্রতিপন্ন কর যে, $\text{ঙগ.ঙঘ} = \text{ঙচ.ঙট} = \text{ঙছ.ঙজ}$ ।

৭১। দুই নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে, এমন একটা বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, স্পর্শ বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখা এক অপরিবর্তনীয় বিন্দু দিয়া যাইবে ।

৭২। কণাগ ত্রিভুজের কণা বাহু = ২খগ ; কণা বাহুকে বর্দ্ধিত কর এবং খগক ও তাহার সম্মিহিত কোণকে গম ও গঘ রেখা দ্বারা ক্রমে দ্বিখণ্ড করিয়া প্রমাণ কর যে, গখঘ, কগস, কখগ ও গমঙ ত্রিভুজগুলি ১, ২, ৩ ও ৪এর অনুপাতী ।

৭৩। কোন নিয়মিত পঞ্চভুজের দুই কর্ণ রেখা যদি পরস্পর ছেদ করে, তবে তাহাদের বৃহত্তর অংশ গুলি প্রত্যেকে পঞ্চভুজের এক এক বাহুর সমান হইবে ও প্রত্যেক কর্ণ ছেদ বিন্দুতে অন্ত্য ও মধ্য অনুপাতী রূপে বিভক্ত হইবে ।

৭৪। কোন বৃত্তের এক নির্দিষ্ট চাপকে এক্রূপে দুই অংশে বিভক্ত করিতে হইবে, যেন তাহাদেয় জ্যা দুইটা, কোন নির্দিষ্ট অনুপাতী হয় ।

৭৫। প্রতিপাদন কর যে, কোন সমচতুর্ভুজের এক ভূজ ও কর্ণ রেখা পরস্পর দৃঢ় রাশি ।

৭৬। কোন স্থূল কোণী ত্রিভুজের স্থূল কোণ হইতে ভূমি পর্যন্ত এক্রূপে এক রেখা টানিতে হইবে, যেন তাহা ভূমির দুই খণ্ডের মধ্য সমানুপাতী হয় ।

৭৭। কোন ত্রিভুজের ক কোণ এক সম কোণ ; গঘ রেখা দ্বারা গ কোণ দ্বিখণ্ড করিয়া প্রমাণ কর যে,

$$২কগ^২ : কগ^২ - কঘ^২ :: কখ : কস ।$$

৭৮। দুই বাহুর অনুপাত, অন্য এক বাহু ও তাহার সম্মুখীন কোণ নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত করিতে হইবে।

৭৯। দুই ত্রিভুজের মধ্যে একের একটি কোণ যদি অপরের একটি কোণের সমান হয় ও উভয় ত্রিভুজের আর এক একটি কোণ একত্র করিলে যদি দুই সম কোণের সমান হয়, তবে এই চারি কোণের সম্মুখীন বাহুগুলি সমানুপাতী হইবে।

৮০। কোন নির্দিষ্ট কোণের দ্বিখণ্ড কারক রেখাঙ্ক কোন বিন্দু দিয়া একটি রেখা এক্রূপে টানিতে হইবে, যেন তাহা ঐ কোণের পার্শ্বস্থ দুই রেখার সহিত সমান সমান কোণ উৎপন্ন করে। প্রমাণ কর যে, ঐ বিন্দু দিয়া উল্লিখিত দুই রেখা পর্যন্ত যত রেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে প্রথম রেখাটি ক্ষুদ্রতম ও ইহা দ্বারা যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহাও ক্ষুদ্রতম।

৮১। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের অভ্যন্তরে সমান সমান ছয়টি বৃত্ত এক্রূপে অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন তাহারা পরস্পরকে ও নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে; আর প্রতিপাদন করিতে হইবে যে, এই ছয়টি বৃত্তকে স্পর্শ করে, এমন একটি বৃত্ত যদি তাহাদের মধ্যস্থ ক্ষেত্রে অঙ্কিত করা যায়, তবে সেইটি ইহাদের প্রত্যেকের সমান হইবে।

৮২। কথগ একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের ভূমির উপর কম লম্ব এবং কথ ও বর্জিত কগকে ছেদ করিয়া ওষচ রেখা টানিয়া প্রমাণ কর যে, $কঘ : ঘঙ :: কথ + কচ : কথ - কচ$ ।

৮৩। কোন বিন্দু হইতে চারি রেখা টানিলে যদি তাহারা অন্য এক রেখাকে লয় বিভাগানুসারে ভাগ করে, তবে অন্য কোন রেখাও প্রথমোক্ত চারি রেখা দ্বারা ছিন্ন হইলে, লয় বিভাগানুসারে বিভক্ত হইবে।

৮৪। কোন সমকোণী ত্রিভুজের খগ কর্ণের উপর কম লম্ব টানা হইয়াছে; যদি কথগ ত্রিভুজের অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাস ব হয় এবং কথঘ ও কগঘ ত্রিভুজের অন্তর্গত দুই বৃত্তের ব্যাস অ ও ই হয়, তাহা হইলে প্রমাণ কর যে, $ব^2 = অ^2 + ই^2$ ।

৮৫। কোন দ্বিবাহু ত্রিভুজের সমান একটি সমদ্বিবাহু

ত্রিভুজ একরূপে অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন উভয়ের শৃঙ্গস্থ কোণ সমান হয় ।

৮৬। কথগয় একটি আয়ত ক্ষেত্র ; গয় বাহুতে ও বিন্দু কম্পনা কর ও কঙ সংযুক্ত কর এবং তাহার উপর খ বিন্দু হইতে খচ লম্ব টানিয়া প্রতিপন্ন কর যে, খচ ও গঙএর অন্তর্গত আয়ত কথগয় আয়তের সমান ।

৮৭। কথগ কোন বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজ ; খ ও গ বিন্দু দিয়া বৃত্তের দুই স্পর্শিনী টান এবং ক বিন্দু হইতে উহাদের সমান্তর কয় ও কঙ রেখা তুমি পর্য্যন্ত টানিয়া প্রমাণ কর যে, কস = কঙ এবং খগ : গঙ :: কথ^২ : কগ^২ ।

৮৮। দুইটি বৃত্ত পরস্পর ছেদ করিয়াছে ; কথগখঙ রেখা এই দুই বৃত্তকে ক, খ, ঘ, ও বিন্দুতে ও তাহাদের সামান্য জ্যাকে গ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে । প্রমাণ কর যে, কথ : খগ :: গুস : ঘগ এবং কঙ^২ : খঘ^২ :: কগ.গঙ : খগ.গস ।

৮৯। কোন বৃত্তের অন্তর্গত একটি সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের উভয় বাহুই যদি ভূমির দ্বিগুণ হয়, তাহা হইলে ৪তে ১৫তে যে অনুপাত, ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রে ত্রিভুজের সমান দুই বাহুর একটির উপর অঙ্কিত বর্গক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইবে ।

৯০। কথগ ত্রিভুজের ক কোণ সম কোণ ও খ কোণ গ কোণের দ্বিগুণ ; খ কোণকে দ্বিখণ্ড করিয়া খঘ রেখা টান এবং খগএর উপর কঙ, ঘচ লম্ব টানিয়া প্রতিপন্ন কর যে,

$$\frac{১}{খঙ.ঘচ} - \frac{১}{কঙ.খচ} = \frac{১}{কঙ.খঙ}$$

৯১। একটা সমচতুর্ভুজ কোন নির্দিষ্ট নিয়মিত পঞ্চভুজের অন্তর্গত করিতে হইবে ।

৯২। কোন ত্রিভুজের একটি বাহুর সমান্তর এক রেখা, টানিয়া ত্রিভুজকে দ্বিখণ্ড করিতে হইবে ।

৯৩। কোন সমকোণী ত্রিভুজের একটি বাহু অন্যের দ্বিগুণ ; যদি শৃঙ্গ হইতে কর্ণের উপর লম্ব টানা যায়, তাহা হইলে কর্ণ রেখা ১ ও ৪এর অনুপাতী রূপে বিভক্ত হইবে ।

২৪। কোন নির্দিষ্ট সরল বৈখিক ক্ষেত্রের সমান এবং কোন নির্দিষ্ট সরল বৈখিক কোণের সমান এক কোণ বিশিষ্ট একটী রশ্মস অঙ্কিত করিতে হইবে।

২৫। কোন সমচতুর্ভুজের কর্ণ রেখার ও এক বাহুর অন্তর নির্দিষ্ট আছে ; সমচতুর্ভুজটী অঙ্কিত করিতে হইবে।

২৬। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা এক নির্দিষ্ট রেখা ও এক নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে এবং এক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

২৭। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা দুই নির্দিষ্ট বৃত্ত ও এক নির্দিষ্ট রেখাকে স্পর্শ করে।

২৮। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা দুই নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে ও এক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

২৯। এমন একটী বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা তিনটী নির্দিষ্ট বৃত্তকে স্পর্শ করে।

১০০। যদি তিনটী নির্দিষ্ট বৃত্তের দুইটী দুইটীর যুগ্ম যুগ্ম সাধারণ স্পর্শিনী টানা যায়, তবে ঐ যুগ্ম স্পর্শিনীগুলি বর্জিত হইলে যে যে বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে, তাহারা এক রেখা হইবে।

ষষ্ঠ অধ্যায় ।

ব্যাপ্য ও পরিমিষ্ট ।

ইউক্লিড রাশি সকলের সম্বন্ধ নির্ণয় করিবার জন্য পঞ্চম অধ্যায়ে যে অনুপাত ও সমানুপাতের বিধি প্রকটন করিয়াছেন, সদৃশ ও বিসদৃশ সরল বৈখিক ক্ষেত্র সকলের ও তাহাদিগের বাহুগুলির পরস্পর সম্বন্ধ স্থির করিবার জন্য ষষ্ঠ অধ্যায়ে সেই বিধি প্রয়োগ করিয়াছেন ।

৬ষ্ঠ, সং ১। কোন কোন টীকাকার লিখিয়াছেন যে, সদৃশ ক্ষেত্রের কোণগুলি পরস্পর সমান ও বাহুগুলি সমানুপাতী, এই উভয় বিধ বাক্য প্রয়োগের আবশ্যকতা নাই; কেননা, ত্রিকুজের কোণগুলি সমান হইলে বাহুগুলি সমানুপাতী ও বাহুগুলি সমানুপাতী হইলে, কোণগুলি পরস্পর সমান হইবে। ইউক্লিড ইহা ষষ্ঠ অধ্যায়ের ৪র্থ ও ৫ম প্রতিজ্ঞায় প্রমাণ করিয়াছেন; কিন্তু অন্যান্য সরল বৈখিক ক্ষেত্রের সদৃশতার লক্ষণ লিখিতে হইলে, কোণগুলির সমতা ও বাহুগুলির সমানুপাতিত্ব, এই দুইটি গুণেরই উল্লেখ আবশ্যিক; কেননা একটা উল্লেখ করিলে অপরটা সপ্রমাণ হয় না; যথা,—কোন আয়ত ও সমচতুর্ভুজ ক্ষেত্রের কোণগুলি পরস্পর সমান কিন্তু বাহুগুলি সমানুপাতী নহে; আবার কোন রম্বসের ও সমচতুর্ভুজের বাহুগুলি সমানুপাতী কিন্তু কোণগুলি পরস্পর সমান নহে।

সং ২। ইউক্লিড এই সংজ্ঞা ব্যতীত অন্য কোন স্থানে বিবৃ্ত্ত ভাবাপন্ন ক্ষেত্রের নাম উল্লেখ করেন নাই; এজন্য কোন কোন টীকাকার দ্বিতীয় সংজ্ঞাটী এইরূপে লিখিয়াছেন; যথা,—

দুইটি ক্ষেত্রের মধ্যে একের দুইটি বাহু যদি অন্যের দুই বাহুর সমিত একরূপে সমানুপাতী হয়, যে প্রথম ক্ষেত্রের একটি বাহুতে দ্বিতীয় ক্ষেত্রের একটি বাহুতে যে অনুপাত, দ্বিতীয় ক্ষেত্রের অবশিষ্ট বাহুতে প্রথম ক্ষেত্রের অবশিষ্ট বাহুতে সেই অনুপাত, তবে এরূপ বলিতে হইবে যে, প্রথমের দুই বাহু দ্বিতীয়ের দুই বাহুর সমিত বিবৃত ভাবে সমানুপাতী। (ষষ্ঠ অধ্যায়ের ১৩শ ও ১৫শ প্রতিজ্ঞায় এই সংজ্ঞার প্রয়োগ হইয়াছে।)

সং ৩। ইহার আনুষঙ্গিক এই সংজ্ঞাটি লেখা যাইতে পারে :—

কোন সরল রেখা লর বিভাগানুসারে বিভক্ত হইয়াছে বলিলে বুঝিতে হইবে যে, উহা তিন অংশে একরূপে বিভক্ত হইয়াছে যে, পূর্ণ রেখাতে এক দিকের অংশেতে যে অনুপাত, অপর দিকের অংশেতে মধ্য অংশেতে সেই অনুপাত।

সং ৪। উন্নতি ও লম্ব এই দুইটি একার্থ শব্দ। কেহ কেহ উন্নতির পরিবর্তে লম্ব শব্দ ব্যবহার করিয়াছেন। সম্রাট জগ-নাথ পণ্ডিত স্বকৃত রেখাগণিতে উন্নতির পরিবর্তে ক্ষেত্রলম্ব শব্দ প্রয়োগ করিয়াছেন : ইউক্লিডের এই সংজ্ঞা কেবল ত্রিভুজ লম্বকে প্রকৃত রূপে প্রয়োগ হইতে পারে ; কেননা, অন্য কোন সরল বৈশ্বিক ক্ষেত্রের এমন কোন নির্দিষ্ট বিন্দু নাই, যাহাকে শব্দ বলা যায়। সমান্তর ক্ষেত্রের ভূমির সম্মুখীন বাহুর যে কোন বিন্দু হইতে ভূমি পর্যন্ত অঙ্কিত লম্বকে উন্নতি বলিয়া থাকে।

৩৪, ২। এই প্রতিজ্ঞা যত প্রকার হইতে পারে, সেইগুলি ভিন্ন ভিন্ন তিনটি চিত্র দ্বারা প্রতিপাদিত হইয়াছে।

প্রথম চিত্রে সমান্তর রেখাটি শূঙ্গ ও ভূমির মধ্যে ত্রিভুজের দুই বাহুকে ছেদ করিয়াছে ;

দ্বিতীয় চিত্রে ভূমির নিম্নভাগে বর্জিত ভুজ দ্বয়কে ও তৃতীয় চিত্রে শূঙ্গের অপর পার্শ্বে বর্জিত ভুজ দ্বয়কে ছেদ করিয়াছে।

প্রতিজ্ঞায় লিখিত হইয়াছে যে, ত্রিভুজের দুই বাহু সমানুপাতী রূপে ছেদিত হইলে, ছেদ বিন্দু দ্বয় সংযোজক রেখা ভূমির

সমান্তর হইবে; যদি কখ, ঘগএর দ্বিগুণ হয় এবং গঙ, ঙকএর দ্বিগুণ হয়, তাহা হইলেও বাহু দ্বয় সমানুপাতী রূপে ছেদিত হইবে, কিন্তু ঘঙ, খগএর সমান্তর হইবে না। অতএব শৃঙ্গ হইতে ছেদ বিন্দু দ্বয় পর্য্যন্ত বাহুর দুই খণ্ড সমানুপাতের পার্থক্য বর্তী বা পরবর্তী রাশি হইবে একপ লিখিলে, এই প্রতিজ্ঞার আর কোন দোষ থাকে না।

৩৪, ক। এই প্রতিজ্ঞা সিমসন সাহেবের লিখিত। যদি কখগ ত্রিভুজ সমদ্বিবাহু হয়, তবে দ্বিগুণকারক রেখা ভূমিকে ছেদ না করিয়া তাহার সমান্তর হইবে।

৩৪, ৪। সদৃশ ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় এইটী প্রথম প্রতিজ্ঞা; ৩৪ অধ্যায়ের অনেকগুলি প্রতিজ্ঞাতেই ইহার উপযোগিতা দৃষ্ট হইবে। যদি কখ ও কগ বাহু হইতে ঘগ ও ঘঙর সমান অংশ ছেদ করিয়া ছেদ বিন্দুদ্বয় সংযুক্ত করা যায়, তবে দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞার সাহায্যে অনায়াসে এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তি করা যাইতে পারে।

৩৪, ৫। ষষ্ঠ অধ্যায়ের পঞ্চম প্রতিজ্ঞা চতুর্থের বিপরীত; প্রথম অধ্যায়ের অষ্টম প্রতিজ্ঞার সহিত ইহার সাদৃশ্য আছে। যদি ত্রিভুজের বাহুগুলি যথাক্রমে সমানুপাতী না হইয়া অন্য রূপে সমানুপাতী হয়, যথা,—কখতে খগতে যে রূপ ঘঙতে ঙকতে সেইরূপ ও খগতে গকতে যে রূপ, ঘকতে ঙকতে সেই রূপ এবং কখতে কগতে যে রূপ, ঘকতে ঙকতে সেই রূপ; তাহা হইলে, কখগ, ঘঙক দুই ত্রিভুজ যে নিশ্চয়ই সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে, এরূপ বলা যাইতে পারে না; অতএব এই প্রতিজ্ঞার ত্রিভুজ দ্বয়ের বাহু গুলি যথাক্রমে সমানুপাতী এরূপ বলা আবশ্যক ছিল; কিন্তু ইউক্লিড তাহা বলেন নাই।

৩৪, ৬। এইটী সদৃশ ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় তৃতীয় প্রতিজ্ঞা। প্রথম অধ্যায়ের ৪র্থ প্রতিজ্ঞার সহিত ইহার সাদৃশ্য আছে।

৩৪, ৭। ইহা সদৃশ ত্রিভুজ সম্বন্ধীয় চতুর্থ প্রতিজ্ঞা। ৩৪ প্রতিজ্ঞার ন্যায় ইহারও অসম্পূর্ণতা দোষ দৃষ্ট হয়; এক একটি কোণের পার্থক্য বাহু দ্বয় এরূপে সমানুপাতী হওয়া আবশ্যক, যেন সমান সমান কোণের সম্মুখীন বাহু সকল সর্বগায়

হয়; তাহা না হইলে ত্রিভুজ হয় যে পরস্পর সমান কোণ বিশিষ্ট হইবে, এমন বলা যায় না ।

৩৪, ৮। এই প্রতিজ্ঞার উপপত্তিতে লিখিত হইয়াছে যে, যখন ও যকগ এই দুই ত্রিভুজ প্রত্যেকে কখন ত্রিভুজের সদৃশ হওয়াতে পরস্পর সদৃশ। এই বাক্যটির সার্থকতা সম্পূর্ণরূপে হৃদয়ঙ্গম করিবার জন্য ষষ্ঠ অধ্যায়ের ২১এর প্রতিজ্ঞা বিদ্যার্থীদিগের পাঠ করা আবশ্যক কিন্তু তাহা না করিয়াও অনায়াসে প্রতিপাদন করা যাইতে পারে যে ঐ ত্রিভুজ দুইটি সদৃশ। কেননা সহজেই প্রতীত হইবে যে, তাহার পরস্পর সমান কোণ বিশিষ্ট; অতএব সদৃশ। [৩৪, ৮]

এই প্রতিজ্ঞার অনুমানে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, কখন লম্ব খন ও যগএর মধ্য সমানুপাতী ।

দ্বিতীয় অধ্যায়ের ১৪শ প্রতিজ্ঞাতে এই সিদ্ধান্ত ভিন্ন রূপে ও ভিন্ন আকারে প্রতিপন্ন হইয়াছে ।

৩৪, ৯। বিদ্যার্থীদিগের স্মরণ করিয়া রাখা আবশ্যক যে পঞ্চম অধ্যায়ের ১ম সংজ্ঞায় ইউক্লিড যে অর্থে অংশ শব্দ প্রয়োগ করিয়াছেন, এস্তলেও সেই অর্থ গ্রহণ করিতে হইবে ।

৩৪, ১১। এই প্রতিজ্ঞা ষষ্ঠ অধ্যায়ের ১২শ প্রতিজ্ঞার অন্তর্গত বলা যাইতে পারে; কেননা তাহাতে সমানুপাতের দ্বিতীয় ও তৃতীয় রাশি সমান হইলেই এই প্রতিজ্ঞার উদ্দেশ্য সিদ্ধ হইবে ।

৩৪, ১৩। এই প্রতিজ্ঞার আনুষঙ্গিক নিম্ন লিখিত বিষয়গুলি বিদ্যার্থীদিগের শিক্ষা করা আবশ্যক;—

(১) দুই রেখার সমষ্টির অর্ধেককে ভাহাদের সমান্তর মধ্য বলে ।

(২) তিন রেখা ক্রমাগত সমানুপাতী হইলে, মধ্য রেখাকে ১ম ও ২য়ের সমগুণ মধ্য বলে ।

(৩) তিন রেখা লয় সমানুপাতী হইলে দ্বিতীয়কে লয় মধ্য বলে; ইহাদের মধ্যে ১ম ও ৩য়ের সমষ্টির এবং ২য়ের অন্তর্গত ত্রয়ত, ১ম ও ৩য়ের দ্বিগুণিত ত্রয়তের সমান হইয়া থাকে ।

৩৪, ১৫। ষষ্ঠ অধ্যায়ের ১৪শ প্রতিজ্ঞার চিত্রে যচ, চঙ, ওছ

সংযুক্ত করিয়া দিলেই এই প্রতিজ্ঞার চিত্র অঙ্কিত হইবে এবং তাহা হইতে ইহা সহজেই সপ্রমাণ হইবে ; কেননা ত্রিভুজগুলি এক ভূমি ও এক উন্নতি বিশিষ্ট সমান্তর ক্ষেত্র সকলের অর্ধেক হইয়া থাকে ।

৬৪, ১৭। এই প্রতিজ্ঞা ১৬শ প্রতিজ্ঞার অন্তর্গত বলিলে বলা যায় ; বীজগণিতের দ্বারা এই দুইটি প্রতিজ্ঞা এই রূপে প্রমাণ করা যায় ; যথা,—

$$\text{ক : খ :: গ : ঘ ; অথবা } \frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} \therefore \frac{\text{ক}}{\text{খ}} \times \text{খঘ} = \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} \times \text{খঘ},$$

অথবা কঘ = খগ ; খ = গ হইলে, কঘ = খ^২ ।

$$\text{আবার কঘ = খগ হইলে, কঘ} \div \text{খঘ} = \text{খগ} \div \text{খঘ} \therefore \frac{\text{ক}}{\text{খ}} = \frac{\text{গ}}{\text{ঘ}} ;$$

অথবা ক : খ :: গ : ঘ ; খ = গ হইলে, ক : খ :: খ : ঘ ।

৬৪, ১৮। এই প্রতিজ্ঞা সংক্রান্ত নিম্ন লিখিত সংজ্ঞাটি জানিয়া রাখা আবশ্যিক ;—

এক বা সমান্তর দুই রেখার উপর সদৃশ ক্ষেত্র দ্বয় অঙ্কিত হইলে যদি তাহাদের সর্বগীয় বাহুগুলি যথাক্রমে সমান্তর হয়, তবে ক্ষেত্র দুইটি এক রূপে স্থাপিত বলিতে হইবে ।

ত্রিভুজের দুই বাহুর উপর অঙ্কিত সদৃশ ক্ষেত্র দ্বয় এক রূপে স্থাপিত বলিলে বুঝিতে হইবে যে, ঐ দুই বাহুকে যদি স্থানান্তরে সমান্তর করিয়া অঙ্কিত করা যায় তবে ক্ষেত্রগুলির বাহু সকল প্রকৌণিক রূপে সমান্তর হইবে ।

৬৪, ২১। এই প্রতিজ্ঞা সিদ্ধ করিবার জন্য তিনটি ত্রিভুজ অঙ্কিত হইয়াছে ; কিন্তু প্রতিজ্ঞাটি ন্যাপক হওয়াতে ত্রিভুজের পরিবর্তে অন্য কোন বহুভুজ অঙ্কিত করিয়া ইহা সিদ্ধ করা আবশ্যিক ।

৬৪, ২২। এই প্রতিজ্ঞার দ্বিতীয়াংশের উপপত্তি স্থলে লিখিত হইয়াছে যে ধদ ও ঢজ ক্ষেত্র পরস্পর সমান আর তাহারূপে সদৃশ ও এক রূপে স্থাপিত বলিয়া তদ রেখা ছজএর সমান ।

সমান ও সদৃশ ক্ষেত্রদ্বয় এক রূপে স্থাপিত হইলেই যে

তাহাদের দুইটী ভূমি পরস্পর সমান হয়, তাহা পূর্বে সপ্রমাণ হয় নাই অতএব এ স্থলে তাহা প্রতিপন্ন করা যাইতেছে ।

যদি তদ, ছজ্জএর সমান না হয় তবে উহা যেন ছজ্জ অপেক্ষা বৃহত্তর হইল ।

পরে, ধদ ও চজ্জ সদৃশ ক্ষেত্র হওয়াতে, তদতে তদতে যে রূপ, চজ্জতে ছজ্জতে সেই রূপ ;

আর তদ, ছজ্জ অপেক্ষা বৃহত্তর ; অতএব তদ, ছজ্জ অপেক্ষা বৃহত্তর (৫ম, ১৪) ; এই হেতু দতপ ত্রিভুজ জছচ ত্রিভুজ অপেক্ষা বৃহত্তর ; (১ম, ৪ ; স্বতঃ ৯) । আবার ধদ ও চজ্জ ক্ষেত্র পরস্পর সমান ও সদৃশ হওয়াতে, দতপ ত্রিভুজ জছচ ত্রিভুজের সমান (৩ষ্ঠ, ২০) ; সুতরাং একরূপ হওয়া অসম্ভব, অতএব তদ রেখা চজ্জএর সমান ।

৩ষ্ঠ, ২৩ । এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে খঘ ও চঙ সংযুক্ত করিলে সপ্রমাণ হইতে পারে যে, ত্রিভুজ ঘয়ের এক একটী কোণ সমান হইলে তাহারা বাহু গুলির অনুপাতের সম্মিলিত অনুপাত নির্দিষ্ট হইবে ।

৩ষ্ঠ, ২৪—২৬ । ষষ্ঠ অধ্যায়ের ২৪ ও ২৬এর প্রতিজ্ঞা পরস্পর বিপরীত ; অতএব ২৫শের প্রতিজ্ঞা তন্মধ্যে থাকিতে যথা স্থানে লিখিত হয় নাই একরূপ বলি যাইতে পারে ।

৩ষ্ঠ, ৩১ । প্রথম অধ্যায়ের ৪৭এর প্রতিজ্ঞা এই সাধারণ প্রতিজ্ঞার একটী বিশেষ প্রকরণ মাত্র ।

৩ষ্ঠ, ৩২ । এই প্রতিজ্ঞার বিশেষ আবশ্যকতা দৃষ্ট হয় না আর ইহার উদ্দেশ্য অসম্পূর্ণ ; কেননা ঙঘকে চ পর্য্যন্ত বৃদ্ধি করিয়া যদি ঘচকে ঘঙর সমান এবং চগ সংযুক্ত করা যায়, তাহা হইলে গঘঙ ত্রিভুজের দুই বাহুর ন্যায় চগস ত্রিভুজেরও গঘ এবং ঘচ বাহু কথগ ত্রিভুজের কথ ও কগ বাহুর সহিত সমানুপাতী হইবে ও সবগীয় বাহু গুলি পরস্পর সমান্তর হইবে ; কিন্তু অবশিষ্ট খগ বাহু অবশিষ্ট চগ বাহুর সহিত এক রেখাস্থ হইবে না । অতএব এই প্রতিজ্ঞাতে উল্লেখ করিতে হইবে যে, ত্রিভুজ ঘয়ের ভূমি দুইটী, সমান্তর উভয় রেখার এক দিকে স্থাপিত করিতে হইবে ।

৬৪, ৩৩। ইউক্লিড এ পর্যন্ত কোন স্থলে দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর কোণের উল্লেখ করেন নাই ও তদ্বিষয়ে কিছুই লেখেন নাই ; এই প্রতিজ্ঞাতে তাহা প্রথম ব্যবহৃত হইল।

আবার এই প্রতিজ্ঞাতে পরিধি খণ্ড দ্বারা কোণ পরিমাপ করিবার অথার সূত্রপাত হইল।

৬৪, ৩৪—স। খ, গ, ঘ এই তিন প্রতিজ্ঞা ইউক্লিডের রচিত নহে সিমসন সাহেব এই গুলি লিখিয়া দিয়াছেন। আলেকজান্দ্রিয়া নগরের বিখ্যাত গণিতবেত্তা টলেমি স্বকৃত “আল্ মেজেষ্ট্” বা “বৃহৎ বিন্যাস” নামক গ্রন্থে ঘ প্রতিজ্ঞা লিখিয়া ছিলেন।

১১শ অধ্যায়।

সংজ্ঞা।

১। যাহার দৈর্ঘ্য বিস্তার ও বেধ আছে, তাহাকে সমক্ষেত্র বলে।

২। ঘন ক্ষেত্রের সীমার নাম পৃষ্ঠ বা তল।

৩। একটি সরল রেখা কোন সমতলস্থিত যে যে স্থানের সহিত সংলগ্ন হইতে পারে, যদি তাহা উহাদের ত্বকের সহিত সম কোণ উৎপন্ন করে, তবে উহা সমতলের লম্ব হইবে বা তাহার সহিত সম কোণ উৎপন্ন করিবে।

৪। দুই সমতল পরস্পর ছেদ করিলে, তাহাদের আধারণ ছেদজ রেখার উপর এক সমতলে যদি কতকগুলি সরল রেখা টানা যায় ও ঐ সকল রেখা যদি অন্য সমতলের লম্ব হয়, তবে একটি সমতল অন্যটির লম্ব হইবে।

৫। একটি সমতলের সহিত কোন সরল রেখা সংলগ্ন হইলে যদি রেখাংশ কোন বিন্দু হইতে সমতলের উপর লম্ব পাত করা যায় এবং সমতলস্থ দুই সম্পাত বিন্দু যোগ করিয়া দেওয়া যায়, তবে এই যোজক রেখার ও প্রথমোক্ত

রেখার অন্তর্গত সূক্ষ্ম কোণকে সমতলের উপর প্রথম রেখার অবনতি বলে ।

৬। দুই সমতল পরস্পর ছেদ করিলে তাহাদের সাধারণ ছেদজ রেখার উপর একই বিন্দু হইতে এক একটা করিয়া দুই সমতল দিয়া দুইটা লম্ব টানিলে, এই লম্ব দুয়ের মধ্যে যে সূক্ষ্ম কোণ উপপন্ন হয় তাহাকে এক সমতলের উপর অপর সমতলের অবনতি বলে ।

৭। দুই সমতলের পূর্বোক্তরূপ অবনতি কোণ অন্য দুই সমতলের অবনতি কোণের সমান হইলে, প্রথম দুই সমতল অন্য দুই সমতলের একাবনত বা সমাবনত বলে ।

৮। যে সকল সমতলকে বর্দ্ধিত করিলেও পরস্পর সংলগ্ন হয় না তাহাদিগকে সমান্তর সমতল বলে ।

৯। ভিন্ন ভিন্ন সমতলস্থ দুইএর অধিক সামান্তলিক কোণ একবিন্দুতে সম্মিলিত হইলে যে কোণ উপপন্ন হয়, তাহাকে ঘনকোণ বলে ।

১০। সমান সমান, সমসংখ্যক ও সদৃশ সমতল গুলি দ্বারা পরিবেষ্টিত ক্ষেত্র সকল পরস্পর সমান ও সদৃশ হইয়া থাকে । (পরিশিষ্ট দেখ ।)

১১। যে সকল ঘনক্ষেত্র সমসংখ্যক সদৃশ সমতল দ্বারা পরিবেষ্টিত ও তাহাদিগের ঘনকোণ গুলি যথাক্রমে পরস্পর সমান, সেই সকল ঘনক্ষেত্র পরস্পর সদৃশ ।

১২। কোন সমতলের উপর স্থাপিত ও তাহার উর্দ্ধস্থিত কোন এক বিন্দুতে মিলিত অন্য কতিপয় সমতল দ্বারা উপপন্ন ঘনক্ষেত্রের নাম স্মৃতি ।

১৩। যে ঘনক্ষেত্রের সীমান্ত সমতল সকলের মধ্যে যে দুইটি সম্মুখীন, তাহার পরস্পর সমান, সদৃশ ও সমান্তর হইলে এবং অপর সমতল গুলি প্রত্যেকে সমান্তর ক্ষেত্র হইলে, তাহাকে ছেদিত ঘনক্ষেত্র বা প্রিজম্ * বলে।

১৪। ব্যাসকে স্থির রাখিয়া তাহার চতুর্দিক দিয়া অর্ধবৃত্তকে ভ্রমিত করিলে যে ঘনক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহার নাম বর্তুল।

১৫। যে স্থির রেখার চতুর্দিক দিয়া অর্ধবৃত্ত ভ্রমিত হয়, তাহার নাম বর্তুল শলাকা।

১৬। যে বিন্দু ঐ অর্ধবৃত্তের কেন্দ্র, তাহাই বর্তুলের কেন্দ্র।

১৭। বর্তুলের কেন্দ্রদিয়া উভয়দিকে পৃষ্ঠদেশ পর্য্যন্ত বিস্তৃত সরল রেখাকে উহার ব্যাস বলে।

১৮। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সমকোণের পার্শ্ব-বর্তী দুই বাহুর একটিকে স্থির রাখিয়া তাহার চতুর্দিক দিয়া ত্রিভুজটিকে ঘূর্ণিত করিলে যে ঘনক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহাকে রত্নসূচী বলে।

স্থির ভাবাপন্ন বাহুটী সমকোণের পার্শ্বস্থ অন্য বাহুর মান হইলে রত্নসূচীকে সমকোণী রত্নসূচী, ক্ষুদ্রতর

* Gr. *Prisma* ; from *Prim* to cut, to saw.

যস্য জ্বল পদার্থস্য পার্শ্বদ্বয় ধ্রাতলং সমানং সমানান্তরঞ্চ
বসতি এবং তদিতর পার্শ্ব ধ্রাতলানি সমানান্তর চতুর্ভুজ রূপাণি
বসন্তি তৎ ছেদিত ঘনক্ষেত্রং ভবতি।

যোগধ্যান কৃতা ক্ষেত্রতত্ত্ব দীপিকা।

হইলে স্থূলকোণী র্ত্তস্খচী এবং র্ত্তহস্তর হইলে সূক্ষ্মকোণী র্ত্তস্খচী বলে ।

১৯। যে স্থির ভাবাপন্ন রেখাকে ত্রিভুজটী পরিবেষ্টিত করে, তাহার নাম র্ত্তস্খচী শালাকা ।

২০। সমকোণের পার্শ্বস্থ ঘূর্ণিত বাহু দ্বারা যে র্ত্ত উৎপন্ন হয়, তাহাকে র্ত্তস্খচীর ভূমি বা তল বলে ।

২১। কোন সমকোণী সমান্তর ক্ষেত্রের একটী বাহুস্থি রাখিয়া তাহার চতুর্দিক দিয়া ক্ষেত্রটীকে ঘুরাইলে ঘনক্ষেত্র উৎপন্ন হয়, তাহার নাম স্তম্ভ ।

২২। যে স্থির রেখাকে সমান্তর ক্ষেত্রটী পরিবেষ্টিত করে, তাহার নাম স্তম্ভ শালাকা ।

২৩। সমান্তর ক্ষেত্রের ঘূর্ণমান দুই সম্মুখীন বাহুদ্বারা যে দুই র্ত্ত উৎপন্ন হয়, তাহাদিগকে স্তম্ভের ভূমি তল বলে ।

২৪। যে সকল র্ত্তস্খচীর শালাকা ও ভূমির ব্যাস সমানুপাতী, তাহাদিগকে সদৃশ র্ত্তস্খচী এবং যে সকল স্তম্ভের শালাকা ও ভূমির ব্যাস সমানুপাতী, তাহাদিগকে সদৃশ স্তম্ভ বলে ।

২৫। যে ঘনক্ষেত্র ছয়টী সমান চতুর্ভুজদ্বারা পরিবেষ্টিত তাহাকে সমচতুর্ভুজিক ঘনক্ষেত্র বলে ।

২৬। যে ঘনক্ষেত্র চারিটী সমান সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা পরিবেষ্টিত তাহাকে চতুর্ভূমিক * ঘনক্ষেত্র বলে ।

* Tetrahedron, from the Gr. *tetra* four, and *edra* a base

২৭। যে ঘনক্ষেত্র আটটি সমান সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা পরিবেষ্টিত তাহাকে অষ্টভূমিক ঘনক্ষেত্র বলে ।

২৮। যে ঘনক্ষেত্র বারটি সমবাহু ও সমান কোণ বিশিষ্ট পঞ্চভুজ দ্বারা পরিবেষ্টিত তাহাকে দ্বাদশ ভূমিক ঘনক্ষেত্র বলে ।

২৯। যে ঘনক্ষেত্র কুড়িটি সমবাহু ত্রিভুজ দ্বারা পরিবেষ্টিত তাহাকে বিংশতি ভূমিক ঘনক্ষেত্র বলে ।

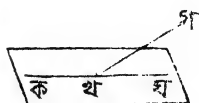
(ক) যে ঘনক্ষেত্র এরূপ ছয় চতুর্ভুজ দ্বারা পরিবেষ্টিত, যে তাহাদের মধ্যে সম্মুখীন দুইটি দুইটি চতুর্ভুজ সমান্তর, তাহাকে সমান্তর ভূমিক ঘনক্ষেত্র বলে ।

১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

কোন সরল রেখার এক অংশ একটী সমতলে ও অন্য অংশ তাহাকে ছাড়িয়া বাহিরে থাকিতে পারে না ।

যদি সম্ভব হয়, তবে কথগ রেখার কথ অংশ একটী সমতলে ও থগ অংশ যেন তাহার বাহিরে অবস্থিত হইল ।

পরে, কথ সরল রেখা এই সমতলে অবস্থিত হইয়াছে বলিয়া, উহাকে ঐ সমতলে



বর্দ্ধিত করিতে পারা যায়; য বিন্দু পর্য্যন্ত যেন ইহা বর্দ্ধিত হইল ।

এক্ষণে যে কোন একটা সমতল লও ; এবং উহাকে কয় রেখার সহিত মিলিত করিয়া যতক্ষণ না উহা গ বিন্দুর সহিত সংলগ্ন হয় ততক্ষণ কয়এর চতুর্দিক দিয়া ঘুরাইতে থাক ।

পরে, খ ও গ বিন্দু এই সমতলস্থ হওয়াতে,
 খগ রেখা ইহাতে থাকিবে ; [১ম, সং ৭ ।
 সুতরাং কখগ ও কখঘ এই দুই সরল রেখার এক এক খগু কখ মিলিত হইয়া একই সমতলে অবস্থিত হইল ;
 কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব । [১ম, ১১, অনু ।
 অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১ । প্রতিপন্ন করিতে হইবে যে অসংখ্য সমতল কোন নির্দিষ্ট সরল রেখা দিয়া যাইতে পারে ।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে এক সমতলে থাকিবে ; আর তিন সরল রেখা পরস্পর সংলগ্ন হইলে এক সমতলে থাকিবে ।

কখ ও গঘ সরল রেখা যেন পরস্পর ঙ বিন্দুতে ছেদ করিয়াছে ; তাহা হইলে কখ ও গঘ এক সমতলে থাকিবে ; আর ঙগ, গখ, ও খঙ এই তিনটি সরল রেখা পরস্পর সংলগ্ন হইয়াছে ; ইহারাও এক সমতলে থাকিবে ।

ঔথ রেখার সহিত একটি সমতল সম্মিলিত কর এবং এই সমতলকে বা আবশ্যক হইলে, ইহাকে বর্দ্ধিত করিয়া, যতক্ষণ না ইহা গ বিন্দু স্পর্শ করে, ততক্ষণ ঔথের চতুর্দিক দিয়া ঘুরাইতে থাক ।



পরে ঔ ও গ বিন্দু এই সমতলস্থ হইয়াছে বলিয়া, ঔগ রেখা ইহাতে থাকিবে ; [১ম, সং ৭ ।

এই কারণে, খগও এই সমতলে থাকিবে ;

আর ঔথ যে ইহাতে আছে, তাহা কম্পিত হইয়াছে ।

সুতরাং ঔগ, গখ ও থঔ এই তিন সরল রেখা এক সমতলস্থ হইয়াছে ;

আর ঔথ ও ঔগ যে সমতলে আছে কখ ও গঘ সেই সমতলে থাকিবে ; [১১শ, ১ ।

সুতরাং কখ ও গঘ এক সমতলে থাকিবে ।

অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২ । কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক নির্দিষ্ট সমতল পর্য্যন্ত সমান সমান দুইটি সরল রেখা টানিলে তাহার সমতলের উপর সমাবনত হইবে ।

৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সমতল পরস্পর কর্তন করিলে তাহাদের সাধারণ ছেদ, একটি সরল রেখা হইবে ।

ইউক্লিডের জ্যামিতি ।

কথ ও খগ দুই সমতল যেন পরস্পর ছেদ করিয়াছে এবং খঘ যেন তাহাদের সাধারণ ছেদজ ; খঘ একটা সরল রেখা হইবে ।

যদি না হয়, খ হইতে ঘ পর্যন্ত কথ সমতলে ~~ক~~খগ সরল রেখা এবং খগ সমতলে খচঘ সরল রেখা টান ; [স্বীঃ ১।



তাহা হইলে খগুঘ ও খচঘ এই



দুই সরল রেখার এক এক দিকের প্রান্তদ্বয় মিলিত হওয়াতে,

তাহারা মধ্যস্থ স্থান পরিবেষ্টন করিয়াছে ;

কিন্তু এরূপ পরিবেষ্টন করা অসম্ভব । [স্বতঃ ১০।

সুতরাং সমতল দ্বয়ের সাধারণ ছেদজ খঘ এক সরল রেখা ব্যতীত কিছুই হইতে পারে না ।

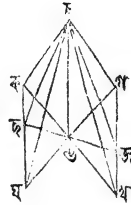
অতএব দুই সমতল ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩। দুই সমতলের একাধিক ছেদজ রেখা হইতে পারে না ।

৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সরল সরল রেখা পরস্পর ছেদ করিলে ছেদজ বিন্দুতে অন্য এক সরল রেখা দণ্ডায়মান হইয়া যদি উভয়ের সহিত সমকোণ করে, তবে প্রথমোক্ত দুই সরল রেখা যে সমতলে থাকিবে, দণ্ডায়মান সরল রেখা তাহার সহিতও সমকোণ করিবে ।

কথ ও গ্যএর ছেদজ বিন্দু ঙুতে, ঙুচ সরল রেখা
প্রায়মান হইয়া যেন উভয়ের সহিত সম কোণ করিয়াছে ;
তাহা হইলে কথ ও গ্য যে
সমতলে থাকিবে, ঙুচ সরল
রেখা, তাহার সহিতও সম
কোণ করিবে ।



কঙ, ঙুখ, গঙ ও ঙুঘ এই
চারি রেখা পরস্পর সমান
কর ; কঘ ও গখ সংযুক্ত
কর ; কথ ও গ্য যে সমতলস্থ হইয়াছে, ঙু বিন্দু দিয়া
তাহাতে এক সরল রেখা টান : উহা যেন কযকে ছ
বিন্দুতে ও গখকে জ বিন্দুতে ছেদ করিল ; এবং ঙুচ
রেখার চ বিন্দু হইতে চক, চছ, চঘ, চগ, চজ ও চখ
রেখা টান ।

পরে, কঙ ও ঙুঘ দুই বাহু খঙ ও ঙুগ দুই বাহুর
সহিত যথাক্রমে সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।

এবং তাহাদের অন্তর্গত কঙঘ ও গঙখ কোণ পরস্পর
সমান বলিয়া, [১ম, ১৫ ।

কঘ ভূমি খগ ভূমির সমান এবং যকঙ কোণ ঙুখগ
কোণের সমান ; [১ম, ৪ ।

ও কঙছ কোণ খঙজ কোণের সমান হওয়াতে, [১ম, ১৫ ।

কঙছ ও খঙজ ত্রিভুজ দ্বয়ের একের দুই কোণ যথাক্রমে
অন্যের দুই কোণের সমান ;

এবং সমান সমান কোণের সংলগ্ন ঙুক ও ঙুখ বাহু

পরস্পর সমান হওয়ায়, [অঙ্কন

উচ্চ, উজ্জএর সমান ও কচ্চ, খজ্জএর সমান । [১ম, ২৬

আবার উক, উখএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন

এবং উচ সাধারণ বাহু তাহাদের উভয়ের সহিত স

কোণ করিয়াছে বলিয়া, [কল্পনা

কচ ভূমি খচ ভূমির সমান । [১ম, ৪

এই কারণে, গচ, ঘচএর সমান ;

আর প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ঘক ও কচ বাহু ক্রমে গ

ও খচ বাহুর সমান,

ও ঘচ ভূমি গচ ভূমির সমান ;

এই হেতু ঘকচ কোণ গখচ কোণের সমান । [১ম, ৮

পুনরায়, প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, চক ও কচ্চ দুই ভূ

ক্রমে চখ ও খজ্জ দুই ভূজের সমান,

এবং চকচ্চ কোণ চখজ্জ কোণের সমান ;

অতএব চচ্চ ভূমি চজ্জ ভূমির সমান । [১ম, ৪

পরিশেষে, চ্চউ, জ্জউর সমান প্রতিপন্ন হইয়াছে বলিয়া

ও উচ রেখা, চউচ্চ ও চউজ্জ এই দুই ত্রিভুজের সাধারণ

বাহু হওয়াতে,

আর চচ্চ ভূমি চজ্জ ভূমির সমান উপপন্ন হওয়ায়,

চউচ্চ কোণ চউজ্জ কোণের সমান ; [১ম, ৮।

অতএব এই দুইটী কোণের প্রত্যেকেই সম কোণ ।

[১ম, সং ১০।

এইরূপে উপপন্ন হইবে যে, কখ ও গঘ যে সমতলস্থ হই-
য়াছে, তাহাতে অঙ্কিত যত গুলি রেখা উচএর সহিত

ংলগ্ন হইবে প্রত্যেকের সহিত ঙ্চ সম কোণ করিবে ।

দূতরাং ঙ্চ রেখা কথ ও গঘএর আধার সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে ।

অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

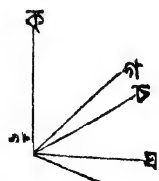
অঃ প্রঃ—৪ । কোন নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে এক সমতল পর্য্যন্ত যতগুলি রেখা টানা যাইতে পারে, তন্মধ্যে সমতলের উপর যেটি লম্ব হইবে, সেইটি সর্বাপেক্ষা ক্ষুদ্রতম ।

৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

তিন সরল রেখা যদি এক বিন্দুতে সংলগ্ন হয় এবং ইহাদের প্রত্যেকের সহিত সমকোণ করিয়া যদি ঐ বিন্দুতে অন্য এক সরল রেখা দণ্ডায়মান হয়, তবে প্রথমোক্ত তিন রেখা একই সমতলে থাকিবে ।

খগ, খঘ ও খঙ এই তিন সরল রেখা যেন ঐ বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়াছে এবং তাহাদের প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিয়া এই বিন্দুতে থক রেখা দণ্ডায়মান হইয়াছে ; তাহা হইলে খগ, খঘ ও খঙ এক সমতলে থাকিবে ।

যদি না থাকে, তবে খঘ ও খঙ এক সমতলে ও খগ যেন তাহার বাহিরে অবস্থিত হইল ; থক ও খগ রেখা দুয়ের সহিত সম্পূর্ণ রূপে মিলিত হয় এরূপ এক সমতল কল্পনা কর : তাহা হইলে এই সমতলের এবং খঘ ও খঙ রেখা দুয়ের আধার সমতলের পরস্পর সম্পাতদ্বারা একটা সরল রেখা



উৎপন্ন হইবে ;

[১১শ, ৩।

খচ যেন সেই সম্মুখ রেখা ।

তাহা হইলে কখ ও খগ যে সমতলস্থ, কখ, খগ ও খচ এই তিন রেখা সেই সমতলস্থ বলিতে হইবে ।

এক্ষণে খঘ ও খঙ এই উভয়ের সহিত খক রেখা সমকোণ করাতে,

[কল্পনা

তাহাদের আধার সমতলের সহিত উহা সমকোণ করিবে

[১১শ, ৪

ও তন্নিমিত্ত ঐ সমতলে যে যে রেখার সহিত উহা সংলগ্ন হইবে তাহাদের প্রত্যেকের সহিত সমকোণ করিবে ;

[১১শ, সং ৩

তাহা হইলে খচ রেখা এই সমতলে থাকিতে ও কখও সহিত সংলগ্ন হওয়াতে,

কখচ কোণ এক সমকোণ হইবে ;

কিন্তু কল্পিত হইয়াছে যে কখগ এক সমকোণ ।

এই হেতু কখগ কোণ কখচ কোণের সমান ; [স্বতঃ ১১

এবং তাহার। এক সমতলস্থিত ; অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

[স্বতঃ ৯

এই হেতু খঘ ও খঙ যে সমতলে আছে, খগ রেখা তাহা বাহিরে থাকিতে পারে না ।

সুতরাং খগ, খঘ, খঙ এই তিন রেখা একই সমতলে থাকিবে ।

অতএব তিন সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহা উপপাদ্য ।

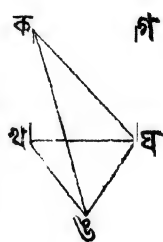
অঃ প্রঃ—৫। প্রতিপন্ন কর যে এক বিন্দুতে সংলগ্ন তিন রেখা পরস্পর লম্ব ভাবাপন্ন হইলে তাহাদের প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিয়া অন্য একটি রেখা টানা যায় না।

৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

দুই সরল রেখা কোন সমতলের সহিত সম কোণ করিলে পরস্পর সমান্তর হইবে।

কথ ও গঘ এই দুই সরল রেখা যেন একই সমতলের সহিত সম কোণ করিতেছে; তাহা হইলে, কথ ও গঘ পরস্পর সমান্তর হইবে।

তাহারা যেন থ ও ঘ বিন্দুতে সমতলে সংলগ্ন হইল; থঘ সংযুক্ত কর; এবং থঘএর সহিত সম কোণ করিয়া এই সমতলে ঘঙ রেখা টান; [১ন, ১১। থঙকে কথএর সমান কর; [১ন, ৩। এবং থঙ, কঙ ও কঘ সংযুক্ত কর।



পরে, কথ রেখা সমতলের লম্ব হওয়াতে, [কল্পনা।
উহা সমতলস্থিত যে যে রেখার সহিত সংলগ্ন হইয়াছে,
তাহাদের প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিবে।

[১১শ, সং ৩।

অতএব এখানে থঘ ও থঙ উভয়ের সহিত কথ সংলগ্ন হওয়াতে;

কথঘ কোণ ও কথঙ কোণ প্রত্যেকে এক এক সম কোণ।

এই কারণে, গহ্বক কোণ ও গহ্বক কোণ প্রত্যেকে এক এক সম কোণ ।

আর কথ, ঙ্ঘএর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন ।
এবং কথক ও ঙ্ঘক ত্রিভুজ দ্বয়ের কথ সাধারণ ভূজ
হইয়াছে বলিয়া,
কথ ও কথ দুই বাহু যথাক্রমে ঙ্ঘ ও কথ দুই বাহুর
সমান ;

আর কথক ও ঙ্ঘক কোণ প্রত্যেকে সম কোণ হওয়াতে
পরস্পর সমান ; [স্বতঃ ১১ ।

এই হেতু কথ ভূমি ঙ্ঘ ভূমির সমান । [১ম, ৪ ।

আবার, কথ রেখা ঙ্ঘএর সমান বলিয়া, [কল্পনা ।
ও কথ রেখা কথএর সমান প্রতিপন্ন হওয়াতে,
কথ ও কথ দুই বাহু যথাক্রমে ঙ্ঘ ও কথ দুই বাহুর
সমান ;

আর কথ রেখা, কথক ও ঙ্ঘক ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ ভূমি ;
অতএব কথক কোণ ঙ্ঘক কোণের সমান । [১ম, ৮ ।

এই দুই কোণের মধ্যে কথক এক সম কোণ,
সুতরাং ঙ্ঘক কোণ এক সম কোণ,
অর্থাৎ ঙ্ঘ রেখা কথএর সহিত সম কোণ করিতেছে ;
আর ঙ্ঘ রেখা কথ ও কথ এই উভয়ের সহিত সম
কোণ করিয়াছে,

অতএব কথ, কথ ও কথ এই তিন রেখা যে বিন্দুতে
মিলিত হইয়াছে, তথায় কথ দণ্ডায়মান হইয়া প্রত্যেকের
সহিত সম কোণ করিতেছে ;

এই হেতু ঐ তিন রেখা একই সমতলে থাকিবে ; [১১শ, ৫।
আর খঘ ও যক যে সমতলে আছে, কখও সেই সমতলে
আছে ; [১১শ, ২।

অতএব কখ, খঘ ও গঘ একই সমতলস্থ হইয়াছে ;
এবং কখঘ ও খঘগ এই উভয় কোণই সম কোণ ;
সুতরাং কখ ও গঘ পরস্পর সমান্তর । [১ম, ২৮।

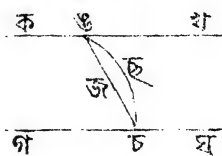
অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—৩। প্রতিপন্ন কর যে, সমকোণী সমান্তর ভূমিক
দ্বন ক্ষেত্রের দুইটি দুইটি সম্মুখীন অংশ পরস্পর সমান্তর হইবে ।

৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সমান্তর সরল রেখার মধ্য যদি একটীর কোন
বিন্দু অন্যের কোন বিন্দুর সহিত সংযুক্ত করা যায়
তবে সমান্তর দুই রেখা ও বিন্দু দ্বয় সংযোজক সরল
রেখা, একই সমতলে থাকিবে ।

কখ ও গঘ যেন দুই সমান্তর সরল রেখা ; তন্মধ্যে
একটীতে ঙ বিন্দু ও অন্যটী-
তে চ বিন্দু কল্পনা কর ;
তাহা হইলে সমান্তর রেখা দ্বয় যে সমতলস্থ ঙ ও চ
সংযোজক সরল রেখাও সেই সমতলে থাকিবে ।



যদি না থাকে, তবে যেন উহা ঙ্গুচ্চএর ন্যায় সমতলের বাহিরে অবস্থিত হইল । কথ ও গঘ সমান্তর রেখা দ্বয়ের আধার কথগঘ সমতলে ঙ্গু হইতে চ পর্য্যন্ত ঙ্গুচ্চ রেখা টান ।

পরে, ঙ্গুচ্চও একটী সরল রেখা হওয়াতে, ঙ্গুচ্চ ও ঙ্গুচ্চ এই দুই সরল রেখা একটী ক্ষেত্র পরিবেষ্টন করিতেছে ;

কিন্তু এরূপ পরিবেষ্টন করা অসম্ভব; [স্বতঃ ১০ ।

অতএব ঙ্গু ও চ সংযোজক রেখা কথ ও গঘ সমান্তর রেখা দ্বয়ের আধার সমতলের বাহিরে থাকিতে পারে না ;

সুতরাং উহা ঐ সমতলেই থাকিবে ।

অতএব দুই সমান্তর ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

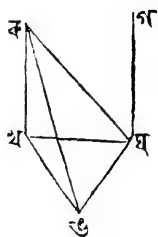
অঃ প্রঃ—৭ । দুই সমান্তর সরল রেখার আধার সমতল ব্যতীত অন্য কোন সমতল উহাদের একটীর সহিত মিলিত করিলে, তাহা অন্য রেখার সমান্তর হইবে ।

৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সমান্তর সরল রেখার মধ্যে যদি একটী কোন সমতলের সহিত সম কোণ করে, তবে অন্যটীও সেই সমতলের সহিত সম কোণ করিবে ।

কথ ও গঘ যেন দুই সমান্তর সরল রেখা ; তন্মধ্যে কথ যেন কোন সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে ; গঘও ঐ সমতলের সহিত সম কোণ করিবে ।

কথ ও গঘ সেন খ ও ঘ
বিন্দুতে সমতলের সহিত সংলগ্ন
হইল ; খঘ সংযুক্ত কর ; তাহা
হইলে কথ, গঘ ও খঘ একই
সমতলস্থ হইবে । [১১শ, ৭ ।



যে সমতলের সহিত কথ সম
কোণ করিয়াছে, খঘএর সহিত

সমকোণ করিয়া সেই সমতলে ঘঙ রেখা টান ; [১ম, ১১ ।
ঘঙকে কথ এর সমান কর ; [১ম, ৩ ।

এবং খঙ, কঙ ও কঘ সংযুক্ত কর ।

পরে, কথ রেখা সমতলের সহিত সম কোণ করাতে,

[কল্পনা ।

সমতলস্থ যে যে রেখা ইহাকে সংস্পর্শ করিতেছে তাহা-
দের প্রত্যেকের সহিত ইহা সম কোণ করিবে ;

[১১শ, সং ৩ ।

এই হেতু কথঘ ও কথঙ উভয়েই এক এক সমকোণ ;

আর, কথ ও গঘ সমান্তর রেখা দ্বয়ের সহিত খঘ রেখা
সংলগ্ন হওয়াতে,

কথঘ ও গঘখ কোণ দ্বয় একত্র যোগে দুই সম কোণের
সমান ; [১ম, ২২ ।

তন্মধ্যে কথঘ কোণ এক সম কোণ ; [কল্পনা ।

সুতরাং গঘখ কোণ এক সম কোণ, অর্থাৎ গঘ রেখা
খঘএর লম্ব ।

আবার, কথ রেখা ঙঘএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন ।

এবং কথ্য ও ঙ্ঘ্যখ ত্রিভুজের খ্য সামান্য বাহু
হওয়াতে,

কথ ও খ্য বাহু দ্বয় যথাক্রমে ঙ্ঘ্য ও ঘ্য বাহু দ্বয়ের
সমান ;

আর কথ্য ও ঙ্ঘ্যখ উভয়েই এক এক সম কোণ হওয়াতে
পরস্পর সমান ; [স্বতঃ ১১।

অতএব ক্য ভূমি ঙ্ঘ্য ভূমির সমান । [১ম, ৪।

পুনরায়, কথ রেখা ঙ্ঘ্যএর সমান বলিয়া, [অঙ্কন।

এবং খঙ, ঘকএর সমান প্রতিপন্ন হইয়াতে,

কথ ও খঙ দুই বাহু যথাক্রমে ঙ্ঘ্য ও ঘক দুই বাহুর
সমান ;

আর কঙ রেখা কথঙ ও ঙ্ঘ্যক ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ
ভূমি ;

এই হেতু কথঙ কোণ ক্যঙ কোণের সমান ; [১ম, ৮।

তন্মধ্যে কথঙ কোণ ও এক সম কোণ ;

অতএব ক্যঙ কোণ এক সম কোণ, অর্থাৎ ঙ্ঘ্য রেখা
ক্যএর লম্ব ;

আবার ঙ্ঘ্য রেখা খ্যএরও লম্ব বলিয়া, [অঙ্কন।

ঙ্ঘ্য রেখা খ্য ও ঘকএর আধার সমতলের লম্ব হইল ;

[১১শ, ৪।

এবং উহা ঐ সমতলস্থ যে যে রেখার সহিত সংলগ্ন হইবে,
প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিবে । [১১, সং ৩।

গ্য রেখা খ্য ও ঘকএর আধার সমতলে স্থাপিত
হইয়াছে, কেননা কথ ও গ্য সমান্তর রেখা দ্বয় যে সমতলস্থ

ঐ তিন রেখাই সেই সমতলে থাকিবে ;

অতএব ঔষ রেখা, গঘএর সহিত সম কোণ করিয়াছে,

অর্থাৎ গঘ, ঔষএর সহিত সম কোণ করিয়াছে ;

আবার উপপন্ন হইয়াছে যে, গঘ, খঘএর সহিত সম কোণ করিয়াছে ,

অতএব গঘ রেখা ঘ বিন্দুতে খঘ ও ঔষ এই উভয় রেখার সহিত সম কোণ করিয়াছে ;

এজন্য ইহা খঘ ও ঔষএর আধার সমতলের সহিত সম কোণ করিবে, [১১শ, ৪ ।

অর্থাৎ কথ রেখা যে সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে, গঘও সেই সম তলের সহিত সমকোণ করিবে ।

অতএব দুই সমান্তর সরল রেখার মধ্যে ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

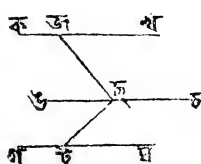
অঃ প্রঃ—৮ । ছেদিত ঘনক্ষেত্রের অগ্রি স্থলি পরস্পর সমান্তর ।

৯ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

দুই সরল রেখা প্রত্যেকে ত্রিঘ সমতলস্থিত অন্য এক সরল রেখার সমান্তর হইলে, পরস্পর সমান্তর হইবে ।

কথ ও গঘ প্রত্যেকেই যেন ত্রিঘ সমতলস্থ ঔচ রেখার সমান্তর হইয়াছে ; তাহা হইলে কথ রেখা গঘএর সমান্তর হইবে ।

ওচ রেখার ছ বিন্দু কম্পনা
কর; কথ ও ওচএর আধার
সমতলে ওচএর সহিত সম কোণ
করিয়া ছ বিন্দু হইতে ছজ রেখা
টান; এবং ওচ এবং গঘএর



আধার সমতলে ওচএর সহিত সম কোণ করিয়া ছ বিন্দু
হইতে ছট রেখা টান । [১ম, ১১ ।

পরে, ওচ রেখা ছজ ও ছট এই উভয়ের সহিত সম
কোণ করিয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন ।

ওচ এই দুই রেখার আধার জছট সমতলের সহিত সম
কোণ করিবে; [১১শ, ৪ ।

আর কথ রেখা ওচএর সমান্তর; [কম্পনা ।

অতএব কথ রেখা জছট সমতলের সহিত সম কোণ করি-
য়াছে । [১১শ, ৮ ।

এই কারণে, গঘ রেখা জছট সমতলের সহিত সম কোণ
করিয়াছে ।

অতএব কথ ও গঘ প্রত্যেকেই জছট সমতলের সহিত
সম কোণ করিয়াছে ;

আবার দুই সরল রেখা কোন সমতলের সহিত সম কোণ
করিলে পরস্পর সমান্তর হয় ; [১১শ, ৬

সুতরাং কথ রেখা গঘএর সমান্তর ।

অতএব দুই সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য

অঃ প্রঃ—৯ । সমান্তর দুই রেখার সমান্তর একটা সমতল
এক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া অঙ্কিত করিতে হইবে ।

১০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

পরস্পর সংলগ্ন রেখা দ্বয় যথাক্রমে ভিন্ন সমতলস্থ আর দুইটি পরস্পর সংলগ্ন রেখার সমান্তর হইলে প্রথম দুইটি রেখার অন্তর্গত কোণ, অন্য দুইটির অন্তর্গত কোণের সমান হইবে ।

কথ ও খগ পরস্পর সংলগ্ন রেখা দ্বয় যথাক্রমে যেন ভিন্ন সমতলস্থ ঘঙ ও গুচ আর দুইটি সংলগ্ন রেখা দ্বয়ের সমান্তর হইয়াছে ; তাহা হইলে, কথগ কোণ ঘঙচ কোণের সমান হইবে ।

কথ, খগ, ঘঙ ও গুচ এই কয়টি রেখা পরস্পর সমান করিয়া লও এবং কঘ, খঙ, গচ, কগ ও ঘচ সংযুক্ত কর ।



পরে, কথ রেখা ঘঙর সমান ও সমান্তর হওয়াতে,

কঘ, খঙর সমান ও সমান্তর । [১ম, ৩৩।

এই কারণে গচ, খঙর সমান ও সমান্তর ;

অতএব কঘ ও গচ প্রত্যেকে খঙর সমান ও সমান্তর ;

এই হেতু, কঘ রেখা গচএর সমান্তর, [১১শ, ২।

আর কঘ, গচএর সমান ; [স্বতঃ ১।

অতএব কগ, ঘচএর সমান ও সমান্তর । [১ম, ৩৩।

আবার কথ ও খগ যথাক্রমে ঘঙ ও গুচএর সমান হওয়াতে,

আর কগ ভূমি ঘচ ভূমির সমান বলিয়া,

কথগ কোণ যাঙচ কোণের সমান ।

[১ম, ৮

অতএব পরস্পর সংলগ্ন রেখা দ্বয় ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

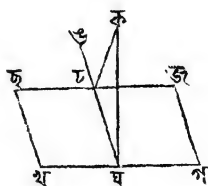
অঃ প্রঃ-১০ । বিভিন্ন সমতলস্থ পরস্পর সমান সমান্তর তিন রেখার উভয় দিকের প্রান্ত বিন্দু গুণি পরস্পর সংযুক্ত করিলে, যে ত্রিভুজ হয় হইবে তাহার পরস্পর সমান ও তাহাদের দুইটি আধার সমতল পরস্পর সমান্তর হইবে ।

১১ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য ।

কোন নির্দিষ্ট সমতলের বহিস্থ এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার উপর একটী লম্ব পাত করিতে হইবে ।

ক যেন খজ সমতলের বহিস্থ কোন বিন্দু ; ২ হইতে খজ সমতলের উপর একটী লম্ব পাত করিতে হইবে ।

খজ সমতলে খগ সরল রেখা টান. এবং ক বিন্দু হইতে খগ রেখার উপর কঘ লম্ব টান । [১ম, ১২ । তাহা হইলে যদি কঘ রেখা সমতলেরও লম্ব হয়, তবে



সম্পাদ্য লম্ব টানা হইল । যদি তাহা না হয়, তবে খগএর সহিত সমকোণ করিয়া খজ সমতলে যাঙ রেখা টান,

[১ম, ১১ ।

এবং ক বিন্দু হইতে ঘণ্ড রেখার উপর কচ লম্ব টান ;

[১ম, ১২ ।

কচ সম্পাদ্য লম্ব ।

চ বিন্দু দিয়া খগএর সমান্তর ছজ রেখা টান ।

[১ম, ৩১ ।

পরে, গুঘ ও ঘক এই উভয় রেখার সহিত খগ সম
কোণ করিয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন ।

খগ রেখা গুঘ ও ঘকএর আধার সমতলের সহিত সম
কোণ করিবে ; [১১শ, ৪ ।

আর ছজ রেখা খগএর সমান্তর বলিয়া, [অঙ্কন ।

ছজও, গুঘ এবং ঘকএর আধার সমতলের সহিত সম
কোণ করিবে ; [১১শ, ৮ ।

অতএব ঐ সমতলস্থ যে যে রেখার সহিত ছজ সংলগ্ন
হইবে, তাহাদের প্রত্যেকের সহিত উহা সম কোণ করিবে ;

[১১শ, সং ৩ ।

এখানে কচ রেখা এই সমতলস্থ হইয়াছে ও ছজএর
সহিত সংলগ্ন হইয়াছে ; এই হেতু ছজ রেখা কচএর
সহিত সম কোণ করিয়াছে, অর্থাৎ কচ রেখা ছজএর
সহিত সম কোণ করিয়াছে ।

আর কচ রেখা ঘণ্ডর সহিতও সমকোণ করিয়াছে ; [অং ।

অতএব ঘণ্ড ও ছজ, এই উভয় রেখার সহিত তাহাদের
ছেদজ বিন্দুতে কচ রেখা সম কোণ করিতেছে ;

সুতরাং কচ রেখা ঘণ্ড ও ছজএর আধার সমতলের
অর্থাৎ খজ সমতলের লম্ব হইয়াছে । [১১শ, ৪ ।

সুতরাং খজ সমতলের বহিস্থ ক বিন্দু হইতে উহাঃ উপর কচ লম্ব পাতিত হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য

অঃ প্রঃ—১১। উল্লিখিত কোন বিন্দু হইতে কোন সমতল পর্যন্ত সমান সমান দুইটি রেখা টানিতে হইবে।

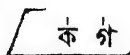
১২ প্রতিজ্ঞা—সম্পাদ্য।

কোন নির্দিষ্ট সমতলের সহিত সম কোণ করিয়া এক সরল রেখা সমতলস্থ এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে উত্তোলন করিতে হইবে।

ক যেন নির্দিষ্ট সমতলস্থিত নির্দিষ্ট বিন্দু; ক হইতে ঐ সমতলের সহিত সম কোণ করিয়া একটি রেখা উত্তোলন করিতে হইবে।

সমতলের বাহিরে থ বিন্দু কল্পনা করিয়া, তথা হইতে সমতলের উপর থগ লম্ব পাতি কর; [১১শ, ১১।

এবং ক বিন্দু হইতে গথএর সমান্তর



কঘ রেখা টান,

[১ম, ৩১।

কঘ সম্পাদ্য লম্ব।

কঘ ও গথ পরস্পর সমান্তর হওয়াতে, [অঙ্কন।
এবং তন্মধ্যে একটি অর্থাৎ গথ রেখা নির্দিষ্ট সমতলের সহিত সম কোণ করিয়াছে বলিয়া, [অঙ্কন।
অন্য রেখাটিও অর্থাৎ কঘ, সমতলের সহিত সম কোণ করিবে। [১১শ, ৮।

নুতরাং কোন নির্দিষ্ট সমতলের এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে তাহার উপর একটি লম্ব উত্তোলন করা হইল। এখানে ইহাই সম্পাদ্য।

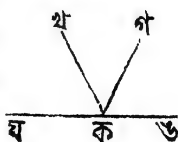
অঃ প্রঃ—১২। কোন সমতলে তিনটি বিন্দু নির্দিষ্ট আছে; ঐ সমতলের উর্দ্ধে এমন এক বিন্দু স্থির করিতে, হইবে, যেন তাহা নির্দিষ্ট তিনটি বিন্দু হইতে সমদূরবর্তী হয়।

১৩ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

কোন সমতলস্থিত এক নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ঐ সমতলের উপর ও এক দিকে দুইটি লম্ব উত্তোলন করা যাইতে পারে না; আর সমতলের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে ঐ সমতলের উপর একাধিক লম্ব পাত করা যায় না।

যদি সম্ভব হয়, তবে কোন সমতলের ক বিন্দু হইতে উহার একদিকে যেন কথ ও কগ দুইটি লম্ব উত্তোলিত হইল।

কথ ও কগএর সহিত মিলিত হয় এরূপ একটি সমতল কল্পনা করিলে তাহার ও নির্দিষ্ট সমতলের সাধারণ ছেদজ একটি সরল রেখা হইবে;



[১১শ, ৩।

যঙ যেন সেই ছেদজ রেখা।

তাহা হইলে, কথ, কগ ও যকঙ এই তিন সরল রেখা

একই সমতলস্থ হইয়াছে ;

আর গক রেখা নির্দিষ্ট সমতলের সহিত সম কোণ করাতে,

ঐ সমতলের যে যে রেখার সহিত উহা সংলগ্ন হইবে, প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিবে ; [১১শ, সঃ ৩।

এখানে যকণ্ড রেখা ঐ সমতলে আছে ও গকএর সহিত সংলগ্ন হইয়াছে ;

অতএব গকণ্ড কোণ এক সম কোণ ।

এই কারণে, থকণ্ড কোণ এক সম কোণ ।

অতএব গকণ্ড কোণ থকণ্ড কোণের সমান , [স্বতঃ ১১।

আর উহার উভয়েই এক সমতলস্থ হইয়াছে ;

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব । [স্বতঃ ৯।

অনন্তর, নির্দিষ্ট সমতলের বহিস্থ কোন বিন্দু হইতে তাহার উপর একাধিক লম্ব পাত করা যায় না ;

কেননা, এরূপ দুই লম্ব টানিলে, তাহার পরস্পর সমান্তর হইবে ; [১১শ, ৬।

সুতরাং এপ্রকার দুই লম্ব পাত করা অসম্ভব ।

অতএব কোন সমতলস্থিত ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

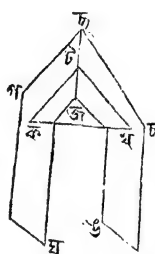
অঃ প্রঃ—১৩। একটী সরল রেখা ও তাহার বহিস্থ কোন বিন্দু উভয়েই একাধিক সমতলে থাকিতে পারে না । •

১৪ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

একই সরল রেখা দুই সমতলের লম্ব হইলে, সেই দুই সমতল পরস্পর সমান্তর হইবে ।

কথ রেখা যেন গাঘ ও উচ এই দুই সমতলের লম্ব হইল ; এই দুই সমতল পরস্পর সমান্তর হইবে ।

যদি সমান্তর না হয়,
তবে বর্দ্ধিত করিলে অব-
শ্যই তাহারা সংলগ্ন হইবে ;
তাহারা যেন সংলগ্ন হইল,
তাহা হইলে তাহাদের
ছেদ একটা সরল রেখা
হইবে ;



ছজ যেন সেই সরল রেখা ; ইহাতে ট বিন্দু কল্পনা
কর, এবং টক ও টখ সংযুক্ত কর ।

পরে, কথ রেখা, উচএর লম্ব হওয়াতে, [কল্পনা
উচ সমতলস্থিত খট রেখারও লম্ব হইবে ; [১১শ, সং ৩।
এই হেতু কথট কোণ এক সম কোণ ।

এই কারণে, খকট কোণও এক সম কোণ ।

অতএব টকখ ত্রিভুজের কথট ও খকট এই দুই কোণ
দুই সম কোণের সমান ;

কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব ।

[১ম, ১৭।

সুতরাং গাঘ ও উচ সমতল দ্বয় বর্দ্ধিত হইলেও পরস্পর
সংলগ্ন হইবে না,

অর্থাৎ তাহার পরস্পর সমান্তর । [১১শ, সং ৮।
অতএব একই সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপ-
পাদ্য ।

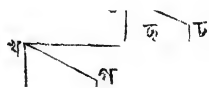
অঃ প্রঃ—১৪। যে যে সমতল অন্য এক সমতলের সমান্তর
তাহার পরস্পর সমান্তর ।

১৫ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

পরস্পর সংযুক্ত দুই রেখা যথাক্রমে যদি ভিন্ন
সমতলস্থিত পরস্পর সংযুক্ত অন্য দুই রেখার সমান্তর
হয়, তবে প্রথম দুই রেখার আধার সমতল অন্য দুই
রেখার আধার সমতলের সমান্তর হইবে ।

পরস্পর সংযুক্ত কথ ও খগ রেখা যথাক্রমে যেন ভিন্ন
সমতলস্থিত ঘঙ ও উচ রেখার সমান্তর হইয়াছে ; তাহা
হইলে কথ ও খগের আধার সমতল, ঘঙ ও উচের
আধার সমতলের সমান্তর হইবে

খ বিন্দু হইতে ঙঘ ও
উচের আধার সমতলের
উপর খছ লম্ব পাত কর,



[১১শ, ১১।

উহা যেন ছ বিন্দুতে ঐ
সমতলের সহিত সংলগ্ন হইল ; ছ বিন্দু দিয়া ঙঘের
সমান্তর ছজ এবং উচের সমান্তর ছট রেখা টান ।

[১ম, ৩১।

পরে, খছ রেখা ঘড়ি ও উচএর আধার সমতলের লম্ব
হওয়াতে, [অঙ্কন ।

উহা ঐ সমতলস্থ যে যে রেখার সহিত সংলগ্ন হইবে
তাহাদের প্রত্যেকের সহিত সম কোণ করিবে :

[১১শ, সং ৩ ।

এখানে ছজ ও ছটি ঐ সমতলস্থ ও খছ লম্বের সহিত
দংলগ্ন হইয়াছে ; এই হেতু, খছজ ও খছটি উভয়েই
এক এক সম কোণ ।

এক্ষণে, থক রেখা ঘড়িএর সমান্তর হওয়াতে, [বর্ণনা ।
খার ছজ রেখা ঘড়িএর সমান্তর বলিয়া, [অঙ্কন ।

থক রেখা ছজএর সমান্তর ; [১১শ, ৯ ।

অতএব কথছ কোণ ও খছজ কোণ একত্র যোগে দুই
সমকোণের সমান ; [১ম, ২৯ ।

এবং তদ্ব্যপ্তে খছজ কোণ যে এক সম কোণ, তাহা উপপন্ন
হইয়াছে ;

অতএব কথছ কোণ এক সম কোণ ।

এই রূপে উপপন্ন হইবে যে, গখছ কোণও এক সম কোণ ।

পরে, থক ও থগএর সম্মাত বিন্দুতে উভয়ের সহিত
সম কোণ করিয়া খছ রেখা দণ্ডায়মান হওয়াতে, উহা
থক ও থগএর আধার সমতলের লম্ব হইবে ; [১১শ, ৪ ।

এবং ছখ রেখা ঘড়ি ও উচএর আধার সমতলের লম্ব
হইয়াছে ; [অঙ্কন ।

খার একই সরল রেখা দুই সমতলের লম্ব হইলে
সই দুই সমতল পরস্পর সমান্তর হয় ; [১১শ, ১৪ ।

সুতরাং কথ ও খগএর আধার সমতল যঙ ও উচএর
আধার সমতলের সমান্তর ।

অতএব পরস্পর সংযুক্ত ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপ-
পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১৫ । দুই নির্দিষ্ট কোণের আধার সমতল হয়
যদি পরস্পর সমান্তর হয় ও কোণ দুইটির পার্শ্বস্থ এক এক
বাহু যদি পরস্পর সমান্তর হয়, তবে অবশিষ্ট এক এক বাহু
পরস্পর সমান্তর হইবে ।

১৬ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

পরস্পর সমান্তর দুই সমতল অন্য কোন সমতল
দ্বারা ছেদিত হইলে, ছেদজ রেখা দ্বয় পরস্পর সমা-
ন্তর হইবে ।

পরস্পর সমান্তর কথ ও গঘ সমতল যেন উচজছ
সমতল দ্বারা ছেদিত হইয়াছে এবং উচ ও ছজ যেন
দুই ছেদজ রেখা ; উচ ও ছজ পরস্পর সমান্তর হইবে ।

যদি সমান্তর না হয়, তবে উচ ও ছজ বর্দ্ধিত হইলে
চ ও জএর দিকে কিম্বা উ ও ছএর দিকে সংলগ্ন হইবে
তাহারা বর্দ্ধিত হইয়া যেন চ ও জএর দিকে ট বিন্দুতে
মিলিত হইল ।

পরে, উচট রেখা কথ সমতলে থাকায়,
উচটএর প্রত্যেক বিন্দু এই সমতলে থাকিবে ; [১১শ, ১ ।

এই হেতু ট বিন্দু এই সমতল-
স্থিত হইয়াছে ।

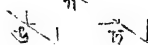


এই কারণে, ট বিন্দু গয সমতল-
স্থিত হইবে ।

খ।



অতএব কথ ও গয সমতল দ্বয়



বন্ধিত হইলে সংলগ্ন হইবে ;

কিন্তু তাহারা পরস্পর সমান্তর কল্পিত হওয়াতে সংলগ্ন
হইতে পারে না ।

অতএব ওচ ও ছজ বন্ধিত হইলে চ ও জ এর দিকে মিলিত
হইবে না ।

এইরূপে ন প্রমাণ হইবে যে, ঐ দুই রেখা ও ও ছ এর দিকে
মিলিত হইবে না ;

আর এক সমতলস্থ দুই সরল রেখা উভয়দিকে উত্তরোত্তর
বন্ধিত হইয়া কখনই মিলিত না হইলে পরস্পর সমান্তর
হইয়া থাকে ;

সুতরাং ওচ রেখা ছজ এর সমান্তর ।

অতএব পরস্পর সমান্তর ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপ-
পাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১৬। দুই সমান্তর সরল রেখা কোন সমান্তর সম-
তল দ্বয়ের দ্বারা ছেদিত হইলে, তাহাদের যথ্যেবর্তী সরল
রেখা দুইটির অংশ দ্বয় পরস্পর সমান হইবে ।

১৭। পরস্পর সমান্তর দুই সমতল অন্য কোন সমতল
দ্বারা ছেদিত হইলে, ছেদক সমতল সমান্তর সমতল দ্বয়ের উপর
সমাবনত হইবে ।

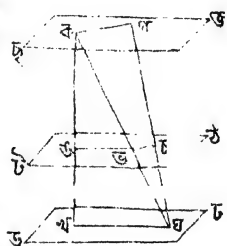
১৭ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যদি দুই সরল রেখা কতিপয় সমান্তর সমতল দ্বারা ছেদিত হয়, তবে উভয়ে একই অনুপাতী রূপে ছেদিত হইবে ।

কথ ও গখ দুই সরল রেখা যেন ছজ, টঠ ও ডঢ এই কতিপয় সমান্তর সমতল দ্বারা ক, ঙ ও খ এবং গ চ ও ঘ বিন্দুতে ছেদিত হইল ; কঙতে ঙখতে যেরূপ গচতে চঘতে সেই রূপ হইবে ।

কগ, খঘ ও কঘ সংযুক্ত কর ; কঘ যেন ভ বিন্দুতে টঠ সমতলের সহিত সংলগ্ন হইল ; ঙভ ও ভচ সংযুক্ত কর ।

পরে, টঠ ও ডঢ সমান্তর সমতল দ্বয় ঙখঘভ সমতল দ্বারা ছেদিত হওয়াতে, ঙভ ও খঘ



ছেদজ রেখা দ্বয়, পরস্পর সমান্তর ; [১১শ, ১৬ এবং ছজ ও টঠ সমান্তর সমতল দ্বয় কভচগ সমতলে দ্বারা ছেদিত হওয়াতে, কগ ও ভচ ছেদজ রেখা দ্বয় পরস্পর সমান্তর ; [১১শ, ১৬

আর, ঙভ রেখা কখঘ ত্রিভুজের খঘ বাহুর সমান্ত হওয়াতে,

কঙতে ঙখতে যে রূপ, কভতে ভঘতে সেইরূপ । [১৮, ২

আবার, ভূচ রেখা কখনও ত্রিভুজের কণ বাহুর সমান্তর
বলিয়া,

কভতে ভূচতে যে রূপ, গচতে চঘতে সেই রূপ; [৬ষ্ঠ, ২ ।

এবং প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, কভতে ভূচতে যে রূপ, কঙতে
ঔখতে সেই রূপ ;

দুতরাং কঙতে ঔখতে যে রূপ, গচতে চঘতে সেই রূপ ।

[৫ম, ১১ ।

অতএব যদি দুই সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

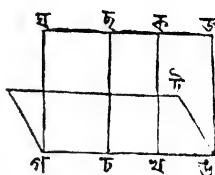
অঃ প্রঃ—১৮ । দুই সরল রেখা চারিটি সমান্তর, সমতল
দ্বারা ছেদিত হইলে, প্রথম ও দ্বিতীয় সমতলের মধ্যবর্তী খণ্ড দ্বয়ের
পরস্পর যে অনুপাত, তৃতীয় ও চতুর্থ সমতলের মধ্যবর্তী খণ্ড
দ্বয়ের ও পরস্পর সেই অনুপাত হইবে ।

১৮ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

এক সরল রেখা কোন সমতলের সহিত সম কোণ
করিলে যত গুলি সমতল ঐ রেখার সহিত মিলিত
হইবে, তাহারা প্রত্যেকে প্রথম সমতলের সহিত সম
কোণ করিবে ।

কথ সরল রেখা যেন গটি সমতলের সহিত সম কোণ
করিতেছে ; যত গুলি সমতল কথএর সহিত মিলিত
হইতে পারে, তাহারা প্রত্যেকে গটি সমতলের সহিত
সম কোণ করিবে ।

ঘণ্ড সমতল যেন কথ
 রেখার সহিত মিলিত হইল ;
 আর ঘণ্ড ও গট সমতল
 দ্বয়ের সাধারণ ছেদজ রেখা
 যেন গণ্ড ; [১১শ, ৩।



গণ্ডে চ বিন্দু কল্পনা কর ;
 এবং ঘণ্ড সমতলে গণ্ডর সহিত সম কোণ করিয়া চ বি
 হইতে চছ রেখা টান । [১ম, ১১

পরে, গট সমতলের সহিত কথ রেখা সম কোণ করাতে
 যে সকল রেখা এই সমতলে থাকিয়া উহার সহিত সংল
 হইবে, তাহারা প্রত্যেকে উহার সহিত সম কোণ করিবে
 [১১শ, সং ৩

গণ্ড ঐ সমতলে থাকিয়া কথএর সহিত সংল
 হইতেছে ;

অতএব কথগ কোণ এক সম কোণ ;
 আর ছচখ কোণও এক সম কোণ ; [অঙ্কন

এই হেতু ছচ রেখা কথএর সমান্তর ; [১ম, ২৮

এবং কথ রেখা গট সমতলের সহিত সম কোণ করাতে,
 [কল্পনা

চছ রেখাও গট সমতলের সহিত সম কোণ করিতেছে ;

[১১শ, ৮

আর দুই সমতল পরস্পর ছেদ করিলে, তাহাদের সাধারণ
 ছেদজ রেখার উপর এক সমতলে অঙ্কিত লম্ব গুলি যদি
 অন্য সমতলের লম্ব হয়, তবে সমতল দুইটা পরস্পর

একাদশ অধ্যায় ।

লম্বভাবাপন্ন হয় ;

[১১শ, সং ৪ ।

এবং প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, দুইটি সমতলের সাধারণ ছেদজ গুণ্ডর উপর চছ লম্ব ঘণ্ট সমতলে অঙ্কিত হইয়া গটি সমতলের সহিত সম কোণ করিতেছে ;

সুতরাং ঘণ্ট সমতল গটি সমতলের সহিত সম কোণ করিবে । এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, অন্য কোন সমতলকে কথনও সহিত মিলিত করিলে তাহাও গটি সমতলের উপর লম্ব হইবে ।

অতএব এক সরল রেখা ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

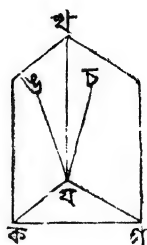
অঃ প্রঃ—১১ । এরূপ এক সমতল অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহা পরস্পর লম্ব ভাবাপন্ন দুই সমতলের প্রত্যেকের উপর লম্ব ভাবে থাকে ।

১১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

পরস্পর সংলগ্ন দুই সমতল যদি অন্য এক সমতলের উপর লম্ব ভাবে থাকে, তবে প্রথম দুই সমতলের ছেদজ রেখা তৃতীয় সমতলের লম্ব হইবে ।

খক ও খগ পরস্পর সংলগ্ন দুই সমতল যেন অন্য এক সমতলের উপর লম্ব ভাবে অবস্থিত হইয়াছে ও খঘ যেন খক ও খগের সাধারণ ছেদজ রেখা ; খঘ রেখা তৃতীয় সমতলের লম্ব হইবে ।

যদি না হয়, তবে খক ও তৃতীয়
সমতলের সাধারণ ছেদজ কখএর
সহিত সম কোণ করিয়া কখ সম-
তলে ঘ বিন্দু হইতে ঘঙ রেখা
টান ; [১ম, ১১।



আর খগ ও তৃতীয় সমতলের
সাধারণ ছেদজ ঘগএর সহিত সম কোণ করিয়া খগ
সমতলে ঘ বিন্দু হইতে ঘচ রেখা টান । [১ম, ১১

পরে, খক সমতল তৃতীয় সমতলের লম্ব হওয়াতে
[কল্পনা।

ও তাহাদের সাধারণ ছেদজ কখএর সহিত সম কোণ
করিয়া, কখ সমতলে, ঘঙ রেখা টানা হইয়াছে বলিয়া
[অঙ্কন

ঘঙ রেখা তৃতীয় সমতলের লম্ব হইয়াছে।

[১১শ, সং ৪।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, ঘচ রেখাও তৃতীয়
সমতলের লম্ব হইয়াছে।

অতএব ঘ বিন্দু হইতে তৃতীয় সমতলের উপর তাহা
এক দিকে দুইটি লম্ব উত্তোলিত হইল,
কিন্তু এরূপ হওয়া অসম্ভব। [১১শ, ১৩

এই হেতু কখ ও খগএর সাধারণ ছেদজ ঘখ ব্যতীত অন
কোন রেখা তৃতীয় সমতলের সহিত সম কোণ করিয়া
অঙ্কিত করা যাইতে পারে না;

সুতরাং খঘ রেখা তৃতীয় সমতলের লম্ব হইবে।

অতএব পরস্পর সংলগ্ন ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২০। বিভিন্ন সমতলস্থ দুই রেখার উপর একটি লম্ব টানিতে হইবে ।

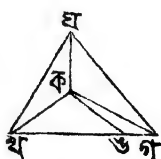
২০ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

যদি কোন একটি ঘন কোণ তিনটি সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হয়, তবে ইহাদের মধ্যে যে দুইটিকে লও, তাহারা একত্র যোগে তৃতীয় কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

ক ঘন কোণ যেন খকগ, গকঘ ও ঘকথ এই তিনটি সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হইয়াছে; ইহাদের মধ্যে যে দুইটিকে লও, তাহারা একত্র যোগে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

খকগ, গকঘ ও ঘকথ এই তিন কোণ যদি পরস্পর সমান হয়, তাহা হইলে স্বতই বোধ হইবে যে, ইহাদের মধ্যে যে কোন দুইটিকে লও, তাহারা একত্র যোগে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

যদি ইহারা পরস্পর সমান না হয়, তবে খকগ কোণ যেন অন্য দুইএর কোনটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে ও ইহাদের মধ্যে খকঘ অপেক্ষা বৃহত্তর । খক



ও কগএর আধার সমতলে খক রেখার ক বিন্দুতে খকঘ কোণের সমান খকগ কোণ কর; [১ম, ২৩।

কঙ রেখাকে কঘএর সমান কর ; [১ম, ৩।
 ঙ বিন্দু দিয়া খঙগ রেখা টান ; ইহা যেন কখ ও কগ
 রেখাকে খ ও গ বিন্দুতে ছেদ করিল ;
 এবং ঘখ, ঘগ সংযুক্ত কর।

পরে, কঘ রেখা কঙর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন।
 এবং কখ রেখা খকঘ ও খকঙ এই দুই ত্রিভুজের সাধারণ
 বাহু বলিয়া,
 খক ও কঘ বাহু দ্বয় যথাক্রমে খক ও কঙ বাহু দ্বয়ের
 সমান ;

আর খকঘ কোণ খকঙ কোণের সমান ; [অঙ্কন।
 এই হেতু, খঘ ভূমি খঙ ভূমির সমান। [১ম, ৪।
 আর খঘ ও ঘগ একত্র যোগে খগ অপেক্ষা রূহত্তর হওয়াতে,
 ও তন্মধ্যে একটা অর্থাৎ খঘ, খঙর সমান প্রতিপন্ন
 হইয়াছে বলিয়া,
 অন্যটি অর্থাৎ ঘগ, অবশিষ্ট ঙগ আপেক্ষা রূহত্তর হইবে।

[স্বতঃ ৫।

পুনরায়, কঘ রেখা কঙর সমান হওয়াতে, [অঙ্কন
 এবং কগ রেখা কগঘ ও কঙগ ত্রিভুজ দ্বয়ের সাধারণ বাহু
 বলিয়া,

আর ঘগ ভূমি ঙগ ভূমি অপেক্ষা রূহত্তর হওয়ায়,
 ঘকগ কোণ ঙকগ কোণ অপেক্ষা রূহত্তর ; [১ম, ২৫।
 আর খকঘ কোণ খকঙ কোণের সমান ; [অঙ্কন।

সুতরাং খকঘ ও ঘকগ একত্র যোগে খকঙ ও ঙকগ
 অর্থাৎ খকগ কোণ অপেক্ষা রূহত্তর ;

আবার খকগ কোণ থকঘ অথবা ঘকগ এই দুইএর কোনটি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর নহে ;

দুতরাং খকগ কোণ এবং অন্য দুইটি কোণের কোন একটি কোণ একত্র যোগে তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর ।

অতএব যদি কোন একটি ঘন কোণ ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—১১ । যদি কোন একটি ঘন কোণ কতিপয় সাম-
নলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হয়, তবে ইহাদের মধ্যে প্রত্যেকেই
অন্যগুলির যোগফল অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ।

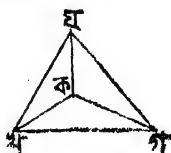
২১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

প্রত্যেক ঘন কোণ যে সকল সামতলিক কোণ দ্বারা
উৎপন্ন হয়, তাহাদের সমষ্টি চারি সম কোণ অপেক্ষা
ক্ষুদ্রতর ।

প্রথমত, ক ঘন কোণ যেন খকগ, গখঘ ও ঘকখ এই
তিন সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হইল ; এই তিন
কোণের সমষ্টি চারি সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ।

কখ, কগ, কঘ সরল রেখাতে
খ, গ, ঘ বিন্দু কল্পনা কর এবং খগ,
গঘ ও ঘখ সংযুক্ত কর ।

পরে, খ ঘন কোণ গখক, কখঘ, ও



যথগ এই তিন সামতনিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হইয়াছে বলিয়া, ইহাদের দুইটির সমষ্টি তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে। [১১শ, ২০।

এই হেতু গথক ও কথঘএর সমষ্টি যথগ অপেক্ষা বৃহত্তর। এই কারণে, থগক ও কগঘ কোণ দ্বয়ের সমষ্টি, থগঘ কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর,

এবং গঘক ও কঘথএর সমষ্টি গঘথ অপেক্ষা বৃহত্তর।

অতএব গথক, কথঘ, থগক, কগঘ, গঘক ও কঘথ এই ছয় কোণ একত্র যোগে যথগ, যগথ ও থযগ এই তিন কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

কিন্তু যথগ, যগথ ও থযগ এই তিন কোণ দুই সম কোণের সমান। [১ম, ৩২।

অতএব গথক, কথঘ, থগক, কগঘ, গঘক ও কঘথ এই ছয় কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর।

আবার, কথগ, কগঘ, ও কঘথ এই ত্রিভুজ গুলির প্রত্যেকের তিনটি তিনটি কোণের সমষ্টি দুই সম কোণের সমান বলিয়া,

ইহাদের সমস্ত কোণ গুলির অর্থাৎ গথক, থকগ, কগথ, কগঘ, গঘক, গকঘ, কঘথ, যথক ও যকথ এই নয় কোণের সমষ্টি ছয় সম কোণের সমান ;

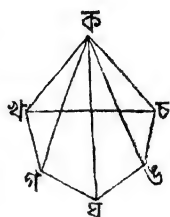
আর এই নয়টির মধ্যে গথক, কগথ, কগঘ, গঘক, কঘথ, যথক এই ছয়টি কোণ একত্র যোগে দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

সুতরাং অবশিষ্ট থকগ, গকঘ ও যকথ এই তিন কোণ

অর্থাৎ ক ঘন কোণের উৎপাদক তিনটি সামতলিক কোণ একত্র যোগে চারি সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

অনন্তর ক ঘন কোণ খকগ, গকঘ, ঘকঙ, ঙকচ, চকখ প্রভৃতি কতিপয় সামতলিক কোণ দ্বারা উৎপন্ন হইলে, তাহাদের সমষ্টি চারি সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ।

কোণ গুলি যে সকল সম-
তলস্থ হইয়াছে, সেই সমতল
গুলি যেন অন্য এক সমতল
দ্বারা ছেদিত হইল এবং খগ,
গঘ, ঘঙ, ঙচ, চখ যেন এই
সকল সমতলের ও কল্পিত সম-
তলের ছেদজ রেখা ।



পরে খ ঘন কোণ গখক, গখচ ও চখক সামতলিক
কোণ দ্বারা উৎপন্ন বলিয়া, তন্মধ্যে যে দুইটিকে লও,
তাহারা তৃতীয় অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ; [১১শ, ২০ ।
এই হেতু, গখক ও কখচ কোণ একত্র যোগে চখগ কোণ
অপেক্ষা বৃহত্তর ।

এই কারণে, গ, ঘ, ঙ, চ এই কএকটি বিন্দুতে যে তিনটি
তিনটি সামতলিক কোণ হইয়াছে, তন্মধ্যে যে দুইটি দুইটি
কোণ, সাধারণ ক শব্দ বিশিষ্ট পৃষ্ঠ ত্রিভুজগুলির ভূমি
সংলগ্ন, তাহারা একত্র যোগে তত্ত্বিন্দুস্থ তৃতীয় কোণ
অর্থাৎ খগঘঙচ বহুভুজের কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

এই হেতু, ত্রিভুজ গুলির ভূমি সংলগ্ন সমান্ত কোণের যোগ ফল বহুভুজের কোণ গুলির যোগফল অপেক্ষা বৃহত্তর ।

এক্ষণে, ত্রিভুজ সকলের কোণ গুলির সমষ্টি, ত্রিভুজ গুলির বা বহুভুজের বাহু গুলির দ্বিগুণ সংখ্যক সম কোণের সমান ; [১ম, ৩২ ।

আর বহুভুজের কোণ গুলির সমষ্টি তাহার বাহু সংখ্যার দ্বিগুণিত চতুরূপ সম কোণের সমান ; [১ম, ৩২ অনু ১ ।

এই হেতু ত্রিভুজ সকলের কোণ সমষ্টি বহুভুজের কোণ গুলির ও চারি সম কোণের সমষ্টির সমান ; [স্বতঃ ১ ।

কিন্তু প্রতিপন্ন হইয়াছে যে, ত্রিভুজ সকলের ভূমি সংলগ্ন কোণ গুলির সমষ্টি বহুভুজের কোণ সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর ;

সুতরাং ত্রিভুজ সকলের অবশিষ্ট কোণ গুলি, অর্থাৎ ক ঘন কোণ উৎপাদক শৃঙ্গস্থ যাবতীয় কোণ, একত্র যোগে চারি সম কোণ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ।

অতএব প্রত্যেক ঘন কোণ ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২২ । যদি এই প্রতিজ্ঞার দ্বিতীয় প্রকরণের চিত্রে খগঘঙচ বহুভুজের কোন একটি কোণ দুই সম কোণ অপেক্ষা বৃহত্তর হয়, তাহা হইলে, প্রতিপন্ন কর যে, প্রতিজ্ঞাটি সিদ্ধ হইতে পারে না ।

২৩। কোন ছেদিত ঘন ক্ষেত্র দুইটি সমান্তর সমতল দ্বারা কৰ্ত্তিত হইলে যে দুইটি বহুভুজ উৎপন্ন হয়, তাহারা পরস্পর সমান।

২৪। দুই নির্দিষ্ট বিন্দু হইতে ভিন্ন সমতলস্থ কোন নির্দিষ্ট রেখার একই বিন্দুর উপর সমান সমান দুইটি সরল রেখা টানিতে হইবে।

২৫। দুই সমান্তর রেখার এক একটির সহিত এক এক সমতল মিলিত হইয়া যদি পরস্পরকে ছেদ করে তবে তাহাদের ছেদজ রেখা, উভয় সমান্তর রেখার সমান্তর হইবে।

২৬। এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যেন তাহা দুই নির্দিষ্ট সমতল স্পর্শ করে এবং এক নির্দিষ্ট বিন্দু দিয়া যায়।

২৭। যদি কোন সরল রেখা এক সমতলের লম্ব হয়, তবে তাহার প্রতিকৃতি অন্য কোন সমতলে অঙ্কিত হইলে তাহা এই দুই সমতলের সাধারণ ছেদজ রেখার লম্ব হইবে।

২৮। দুই প্রাচীর মিলিত হইয়া একটি কোণ উৎপন্ন করিয়াছে; এই দুই প্রাচীরে দুইটি বিন্দু লইয়া তাহাদের ক্ষুদ্রতম দূরত্ব স্থির কর।

২৯। সমান্তর রেখা সকল সমান্তর সমতলগুলিকে ছেদ করিলে যে সকল কোণ উৎপন্ন হয়, তাহারা পরস্পর সমান।

৩০। যদি দুই সরল রেখা পরস্পর সমান্তর হয়, তবে তাহাদের প্রতিকৃতি দ্বয় কোন এক সমতলে অঙ্কিত হইলে তাহারাও পরস্পর সমান্তর হইবে।

৩১। যদি সমান্তর দুই সমতলে এক একটি বিন্দু কল্পনা করা যায় ও উভয় বিন্দু হইতে দুইটি করিয়া চারিটি রেখা এক্রূপে টানা যায় যে, তাহারা সমান্তর সমতল দ্বয়ের উপর লম্বভাবে দণ্ডায়মান কোন সমতলের উপর সমাবনত হয়, তাহা হইলে রেখাগুলির মধ্যে প্রথম ও তৃতীয় সমান্তর হইলে দ্বিতীয় ও চতুর্থও সমান্তর হইবে।

৩২। কোন নির্দিষ্ট রেখার সহিত মিলিত করিয়া অন্য এক নির্দিষ্ট রেখার সমান্তর একটি সমতল অঙ্কিত করিতে হইবে।

৩৩। কোন ছেদিত ঘন ক্ষেত্র দুইটি সমান্তর সমতল দ্বারা কর্তিত হইলে যে দুইটি বহুভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহারা পরস্পর সদৃশ ।

৩৪। কোন সমতলের বহিস্থ এক বিন্দু হইতে সমতলের উপর একটি লম্ব ও সমতলস্থ কোন নির্দিষ্ট রেখার উপর আর একটি লম্ব পাত করিলে লম্ব দুইটির অপর প্রান্ত যোজক রেখা নির্দিষ্ট রেখার সহিত সম কোণ করিবে ।

৩৫। কখ, কগ ও কঘ এই তিনটি রেখা পরস্পরের সহিত সম কোণ করিতেছে ; গঘএর উপর কঙ লম্ব পাত করিয়া খঙ সংযুক্ত করিলে, খঙ রেখা গঘএর লম্ব হইবে ।

৩৬। যদি কোন সমতলের বহিস্থ ক ও খ দুইটি বিন্দু হইতে উহার উপর কয়, খন দুইটি লম্ব পাত করা যায় এবং ক বিন্দু দিয়া কখএর উপর লম্বভাবে এক সমতল স্থাপন করা যায়, তবে ইহার ও নির্দিষ্ট সমতলের ছেদক রেখা মন রেখার সহিত সম কোণ করিবে ।

৩৭। অসীম স্থানে ক, খ, গ, ঘ, চারিটি বিন্দু এক্রূপে স্থাপিত আছে যে, কখ সংযুক্ত করিলে গঘএর সহিত সম কোণ করে ও কগ, খঘ এর সহিত সম কোণ করে ; প্রতিপন্ন কর যে, কঘ ও খগ পরস্পর সম কোণ করিবে ।

৩৮। পরস্পর সংলগ্ন দুই সমতলের একটির কোন বিন্দু হইতে অপর সমতলের উপর এবং নির্দিষ্ট দুই সমতলের সাধারণ ছেদক রেখার উপর এক একটি লম্ব টানিলে, এই দুই লম্বের আধার সমতল, প্রথম দুই সমতলের ছেদক রেখার উপর লম্বভাবে থাকিবে ।

৩৯। দুই নির্দিষ্ট সমতলের উপর কোন বিন্দু হইতে এক একটি লম্ব পাত করিলে, লম্ব দুয়ের অন্তর্গত সূক্ষ্ম কোণ সমতল দুয়ের পরস্পর অবনতির সমান হইবে ।

৪০। যদি তিন সমান্তর সরল রেখা সমান্তর সমতল সকল দ্বারা ছেদিত হয় ও ছেদ বিন্দু গুলি সংযুক্ত করা যায়, তবে তদ্বারা উৎপন্ন ক্ষেত্র সকল পরস্পর সমান ও সদৃশ হইবে ।

৪১। কোন সমতলের উর্দ্ধস্থিত ক একটি নির্দিষ্ট বিন্দু ;

কথ রেখা সমতলের লম্ব আর সমতলস্থিত সমান সমান খণ্ড, খণ্ড, ও খণ্ড তিনটি রেখা; যদি কগ, কখ ও কঙ সংযুক্ত করা যায়, তবে তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

৪২। দুই সমান্তর সরল রেখার মধ্যে কোন সমতলের উপর একটীর অবনতি সেই সমতলের উপর অন্যটির অবনতির সমান হইবে।

৪৩। কখগ ত্রিভুজের ক ও খ বিন্দু হইতে সম্মুখীন বাহু দ্বয়ের উপর দুইটি লম্ব টানিলে, যদি তাহারা ঘ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে ও ঘ হইতে ত্রিভুজের আধার সমতলের উপর একটি লম্ব উত্তোলন করা যায় এবং এই লম্ব রেখার যথেষ্টক্রমে ও বিন্দু কাম্পনা করা যায়, তবে ও হইতে ত্রিভুজের তিন কোণিক বিন্দু পর্য্যন্ত তিনটি রেখা ঐ সকল বিন্দুর উপর দিয়া অঙ্কিত ও ত্রিভুজের বাহুগুলির সমান্তর রেখা ত্রয়ের লম্ব হইবে।

৪৪। বিভিন্ন সমতল স্থিত তিন রেখা এক বিন্দুতে সংলগ্ন হইয়া একটি ঘন কোণ উৎপন্ন করিয়াছে; যদি ঐ বিন্দু হইতে ঘন কোণের ভিতর আর একটি রেখা টানা যায়, তবে ইহা প্রথমোক্ত তিন রেখার সহিত যে তিনটি কোণ উৎপন্ন করিবে, তাহাদের সমষ্টি ঘন কোণ পরিমিতক তিনটি সাম্যতলিক কোণের সমষ্টির অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

৪৫। যদি ক ঘন কোণ খকগ, খকঘ ও গকঘ সাম্যতলিক কোণের সম্মিলনে উৎপন্ন হয়, তবে কখগ ও কগঘ; কগঘ ও কঘখ এবং কঘখ ও কখগ এই দুইটি দুইটি সমতলের মধ্যস্থ কোণ সকল যে যে সমতল দ্বারা দ্বিখণ্ডিত হইবে, তাহাদের পরস্পর সম্পাত দ্বারা একটি সরল রেখা উৎপন্ন হইবে।

৪৬। সমকোণী সমান্তর ভূমিক ঘনক্ষেত্র যে যে সমান্তর ক্ষেত্র দ্বারা পরিবেষ্টিত, তাহাদের প্রত্যেকের কর্ণের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলির সমষ্টি, সমান্তর ভূমিক ঘনক্ষেত্রের কর্ণের উপর সমচতুর্ভুজের চতুর্ভুজ হইবে।

৪৭। কোন সরল রেখা দুই ভাগে বিভক্ত হইলে, সমস্ত রেখার উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজিক ঘনক্ষেত্র, দুই অংশের উপর সমচতুর্ভুজিক ঘন ক্ষেত্রের এবং সমস্ত রেখার ও দুই অংশের

অন্তর্গত ত্রিগুণিত সমকোণী সমান্তরভূমিক ঘনক্ষেত্রের সমান হইবে ।

৪৮। সমকোণী সমান্তরভূমিক ঘনক্ষেত্রের শলাকার গাত্র দিয়া যত গুলি সমতল অঙ্কিত হইতে পারে, তাহাদের প্রত্যেক দ্বারা ঘনক্ষেত্র দ্বিখণ্ডিত হইবে ।

৪৯। ছেদিত ঘনক্ষেত্রের উন্নতির পরিমাণ ও ভূমির ক্ষেত্র ফল জানা আছে, উহার ঘন ফল স্থির করিতে হইবে ।

৫০। কোন ছেদিত ঘনক্ষেত্রের ভূমি একটা বহুভুজ ; ভূমির সমান্তর একটা সমতল দ্বারা ঘনক্ষেত্রকে কৰ্ত্তন করিলে ছেদজ বহুভুজ, ভূমির সদৃশ হইবে ।



১১শ অধ্যায়

বাখ্যা ও পরিশিষ্ট ।

ইউক্লিড প্রথম ছয় অধ্যায়ে একই সমতলে অঙ্কিত নানা-বিধ সরল বৈখিক ক্ষেত্র ও বৃত্তের বিষয় লিখিয়াছেন এবং তাহাদের পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় করিয়াছেন । একাদশ অধ্যায়ে বিভিন্ন সমতলস্থ রেখা ও ক্ষেত্র সম্বন্ধীয় এবং ঘন কোণ ও সমান্তর ঘনক্ষেত্রের প্রকৃতি বিষয়ক কতক গুলি প্রতিজ্ঞা লিখিয়াছেন । মধ্যের চারি অধ্যায়ে পাটীগণিত সম্বন্ধীয় কতিপয় নিয়ম ও প্রতিজ্ঞা প্রকটিত করিয়াছেন । ৭ম অধ্যায়ে কোন দুই রাশির সাধারণ ভাজক ও গুণিত স্থির করিবার উপায় ; অষ্টমে ক্রমাগত সমানুপাতী ও মধ্যসমানুপাতী রাশিদিগের পরস্পর সম্বন্ধ ; নবমে বর্গ, ঘন ও যৌগিক রাশি প্রভৃতির বিষয় এবং দশমে দৃঢ় রাশি ও করণীর প্রকৃতি নির্ণয় করিয়াছেন । এক্ষণে কোন বিদ্যালয়ে ইউক্লিড প্রণীত এই চারি অধ্যায় পাঠিত হয় না ; এজন্য উপেক্ষিত হইল ।

একাদশ অধ্যায়ে উল্লিখিত বিভিন্ন সমতলস্থিত রেখা ও ক্ষেত্র সকলের অনুকৃতি গুলি চিত্রিত করিতে গেলে, এক সমতলে অঙ্কিত করিতে হয় ; কিন্তু এরূপ করিলে ঐ সকল চিত্র বিদ্যার্থীদিগের সহজে বোধ গম্য হয় না । এজন্য কাক্সিকা দ্বারা রেখা ও ক্ষেত্র সকলের প্রতিকৃতি করিয়া প্রতিজ্ঞা গুলির মর্ম্ম ও প্রমাণ বুঝিয়া লওয়া আবশ্যক ।

কোন সমতলে এক বা দুই বিন্দু নির্দিষ্ট থাকিলে সমতলের অবস্থিতি জানা যায় না ; কিন্তু ভিন্ন রেখাস্থ তিনটি বিন্দু নির্দিষ্ট থাকিলে, তাহাদের আধার সমতলের অবস্থিতি নির্ণীত হইতে পারে, যেহেতু, একটী সমতলকে কোন নির্দিষ্ট বিন্দুর

চতুর্দিক দিয়া কুলাল চক্রের ন্যায় অথবা উর্দ্ধাধো দিক দিয়া রথা-
চক্রের ন্যায় সূর্ণিত করা যাইতে পারে; যদি দুইটি বিন্দু নির্দিষ্ট
থাকে, তবে সমতল উহাদের বা উহাদের যোজক রেখার চতুর্দিক
দিয়া কেবল উর্দ্ধাধোভাবে সূর্ণিত হইতে পারে, অন্য প্রকারে
পারে না; অতএব দুই বিন্দু নির্দিষ্ট থাকিলে, একটি সমতলকে
ভিন্ন ভিন্ন রূপে উহাদের বা উহাদের যোজক রেখার সহিত
মিলিত করিয়া স্থাপিত করা যাইতে পারে। এজন্য সম-
তলস্থ দুই বিন্দু তথা একটি রেখা নির্দিষ্ট থাকিলেও কোন
সমতলের অবস্থিতি নির্দিষ্ট হইল এরূপ বলা যায় না। কিন্তু
যদি বিভিন্ন রেখাশ্চ তিনটি বিন্দু নির্দিষ্ট থাকে, তবে তাহা-
দের সহিত মিলিত করিয়া একটি সমতলকে তাহাদের কোন
দিক দিয়া কোন প্রকারেই সূর্ণিত করিতে পারা যায় না;
তাহা হইলে সমতলের অবস্থিতি নির্দিষ্ট আছে, এরূপ বলা
যাইতে পারে।

১ম সং। বিদ্যার্থীদিগের স্মরণ করিয়া রাখা আবশ্যক
যে, ইউক্লিডের লিখিত যনক্ষেত্রগুলি দৈর্ঘ্য, প্রস্থ ও বেধ বিশিষ্ট,
সমতল দ্বারা পরিবেষ্টিত, শূন্য গর্ভ স্থান মাত্র; অতএব একটি
যনক্ষেত্র আর একটি দ্বারা বিদ্ধ ও ছেদিত হইতে পারে।

২য় সং। কোন সরল রেখা এক সমতলকে সংস্পর্শ
করিয়া ঐ সমতলস্থিত যে যে রেখার সহিত সংলগ্ন হইবে,
তাহাদের প্রত্যেকের সহিত ভিন্ন ভিন্ন কোণ উৎপন্ন করিবে।
অতএব কোন রেখার এক সমতলের উপর অবনতি জানিবে
হইলে সমতলস্থ এক নির্দিষ্ট রেখার ও প্রথমোক্ত রেখার
অবনতির পরিমাণ স্থির করা আবশ্যক; তাহা না হইলে কোন
সমতলের উপর এক রেখার অবনতি জানা যায় না। সেই
নির্দিষ্ট রেখা কোন্টি, তাহা মূল সংজ্ঞাতে লিখিত হইয়াছে।
এই নির্দিষ্ট রেখার ও প্রস্থ পিত রেখার অবনতি যে অন্য সকল
অবনতি অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর, ইহা সংজ্ঞাই বোধ্য হইবে।

বিভিন্ন সমতলস্থিত যে দুই রেখা সংস্পর্শ না হয়, তাহা-
দের পরস্পর অবনতির পরিমাণ স্থির করিতে হইলে, বো-
ধ এক বিন্দু হইতে তাহাদের প্রত্যেকের সমান্তর এক একটি

রখা টানিতে হয়; এই দুই রেখার অন্তর্গত কোণের পরি-
ণ যত, প্রথমোক্ত দুই রেখার অবনতিও তত ।

২ম সং। যাহার দৈর্ঘ্য, বিস্তার ও বেধ আছে ও যাহা
স্থান পরিবেষ্টন করে, একরূপ ক্ষেত্রের নামের পূর্বে ঘন শব্দ
প্রয়োগ হইয়া থাকে । কিন্তু ঘন কোণ স্থান পরিবেষ্টন করে
না বলিয়া এখানে ঘন শব্দের তন্যার্থ করিতে হইবে ; এজন্য
ন কোণ বলিলে, কোন ঘনক্ষেত্রের কোণ, ইহাই বুঝিতে
হইবে ।

যদি কোন ঘন কোণ তিনটি সাম্যতলিক কোণের অন্তর্গত
হয়, তবে কোন দুইটি সমতলের অবস্থান নির্দিষ্ট হইলে,
তৃতীয় সমতলেরও অবস্থান নির্ণীত হইবে ; এজন্য তিনটি
সমতলের দ্বারা একটীমাত্র ঘন কোণ উৎপন্ন হইতে পারে ।
কিন্তু কোন ঘন কোণ যদি তিনের অধিক সাম্যতলিক কোণের
অন্তর্গত হয়, তবে কোন একটি সমতলের অবস্থান নির্দিষ্ট
হইলে অন্যগুলির অবস্থান নির্দিষ্ট হইতে পারে না ; এজন্য
উহাদের দ্বারা পরস্পর অসমান অসংখ্য ঘন কোণ উৎপন্ন হইতে
পারে ।

১০ম সং। যে সকল সমতল দ্বারা ঘনক্ষেত্র গুলি পরি-
বেষ্টিত হয়, তাহার। যদি একাকারে অঙ্কিত না হয়, তবে ঘন-
ক্ষেত্র গুলি সমান হইতে পারে না ; যথা—দুইটি সমান ভূমি
বিশিষ্ট স্তূচিকে ভূমিতে ভূমিতে সংলগ্ন করিয়া একবার শৃঙ্গশৃ-
কোণ দ্বয়কে পরস্পর সম্মুখীন ভাবে ও অন্যবার একটি শৃঙ্গশৃ-
কোণকে অন্যের তলান্তরে স্থাপন করিলে, যে দুইটি ঘনক্ষেত্র
হয়, তাহার। পরস্পর সমান হইতে পারে না ।

১৪শ সং। বর্তূল, স্তূচি বা স্তূত্রের উৎপত্তির প্রকার অব-
লম্বন করিয়া এই সকল ঘনক্ষেত্রের সংজ্ঞা লিখিত হইয়াছে ।
ইউক্লিড জ্যামিতিক ক্ষেত্রের সংজ্ঞা লিখিবার জন্য সর্বোপ-
গ্রহে এই স্থলে গতি বিশেষের উল্লেখ করিয়াছেন ; এই গতি কত
বেগে হইবে, তাহা জানিবার আবশ্যক নাই ; কেবল কোন
দিকে ও কিরূপে গতি হইতেছে, তাহা জানিলেই ক্ষেত্রের
বয়স হৃদয়ঙ্গম হইবে ।

২৩শ সৎ। কেহ কেহ চারিটি যে কোন ত্রিভুজাকার সমতল দ্বারা বেষ্টিত ক্ষেত্রকে চতুর্ভূমিক ঘনক্ষেত্র বলেন ও ইউক্লিড লিখিত সংজ্ঞানুযায়ী ক্ষেত্রকে নিয়মিত চতুর্ভূমিক ঘনক্ষেত্র বলিয়া থাকেন।

এই কএকটি অতিরিক্ত সংজ্ঞা বিদ্যার্থীদিগের জানিয়া রাখ আবশ্যিক ;—

(১) যে সকল সমতল দ্বারা কোন ঘনক্ষেত্র পরিবেষ্টিত হয়, তাহাদের মধ্যে সম্বিহিত দুইটি দৃষ্টী সমতলের পরস্পর সম্পাতে যে রেখা গুলি উৎপন্ন হয়, তাহাদের নাম অশি।

(২) যে সমান্তর ভূমিক ঘনক্ষেত্রের অশি গুলি ভূমির উপর লম্ব ভাবে দণ্ডায়মান থাকে, তাহাকে সমকোণী সমান্তর ভূমিক ঘনক্ষেত্র বলে।

(৩) যদি একটি সরল রেখা ও এক সমতল এক্রূপে অবস্থিত হয় যে, তাহাদিগকে উত্তরোত্তর বৃদ্ধি করিলেও পরস্পর সংলগ্ন হয় না, তবে ঐ সরল রেখাকে সমতলের সমান্তর বল যায়।

(৪) যদি ভিন্ন সমতলস্থ দুই সরল রেখা এক্রূপে অবস্থিত হয় যে, তাহাদিগকে সংলগ্ন করিতে পারা যায় না, তবে কোন বিন্দু হইতে ঐ দুইএর প্রত্যেকের সমান্তর এক একটি রেখা টানিলে যে কোণ উৎপন্ন হয়, তাহা প্রথমোক্ত দুই রেখার অবনতি বা কোণের পরিমাপক।

(৫) কোন সমতলাভিমুখে অবনত এক সরল রেখার দুই প্রান্ত হইতে ঐ সমতলের উপর লম্ব পাত করিলে, লম্ব দ্বয়ের মধ্যস্থ সমতলে অঙ্কিত রেখাকে সমতলের উপর প্রথমোক্ত রেখার প্রতিকৃতি বলে; ইহা স্পর্শ্যই বোধ হইবে যে, এক সমতলের উপর কোন সরল রেখার অবনতি ও তাহার প্রতিকৃতির উপর অবনতি পরস্পর সমান। যদি নির্দিষ্ট সরল রেখা সমতলের সমান্তর হয়, তবে উহার সামতলিক প্রতিকৃতি উহার সমান হইবে, সমান্তর না হইলে ক্ষুদ্রতর হইবে ও নির্দিষ্ট রেখাকে কর্ণ স্বরূপ লইয়া একটি সমকোণী ত্রিভুজ অঙ্কিত করিলে সেই ত্রিভুজের ভূমির সমান হইবে।

যেমন কোন রেখার দৈর্ঘ্যের পরিমাণ আর একটি নির্দিষ্ট রেখা দ্বারা হইয়া থাকে ও সরল ত্রৈখিক ক্ষেত্রের পরিমাণ আর একটি নির্দিষ্ট সাম্যতলিক ক্ষেত্র দ্বারা হয়, সেইরূপ ঘনক্ষেত্রের পরিমাণ আর একটি নির্দিষ্ট ঘনক্ষেত্র দ্বারা স্থির হইতে পারে ; যথা,—যদি কোন ঘনক্ষেত্রের দৈর্ঘ্য ৫ অঙ্গুলি, প্রস্থ ৪ অঙ্গুলি ও বেধ ৩ অঙ্গুলি হয়, তবে দেখিতে হইবে, যে ঐ ক্ষেত্রে ১ অঙ্গুলি দৈর্ঘ্য প্রস্থ ও বেধ বিশিষ্ট কয়টি ঘনক্ষেত্র আছে ; চিত্র অঙ্কিত করিলেই দেখা যাইবে যে, তাহাতে এইরূপ ৬০টি ঘনক্ষেত্র আছে ; দৈর্ঘ্য, প্রস্থ, ও বেধ জ্ঞাপক সংখ্যা গুলিকে দ্বারা বাহিক গুণ করিলেই এই ফল পাওয়া যায়, যথা, $৫ \times ৪ \times ৩ = ৬০$; অর্থাৎ ক্ষেত্রের ঘনফল ৬০ ঘন অঙ্গুলি । ছেদিত ঘনক্ষেত্রের ন পরিমাণ স্থির করিতে হইলে, দুইটি ভূমির মধ্যে কোন এক-র বর্গ পরিমাণকে উন্নতির ত্রৈখিক পরিমাণ দিয়া গুণ করিলেই হইবে । সমান্তরভূমিক ঘনক্ষেত্র, ছেদিত ঘনক্ষেত্রের প্রকার ভেদ যাত্র ; অতএব তাহার ঘনফল সেইরূপেই স্থির হইয়া থাকে । স্থূতির ঘনফল তাহার সমান ভূমি ও সমান উন্নতি বিশিষ্ট ছেদিত ঘনক্ষেত্রের এক তৃতীয়াংশ ।

৩৪—প্র। এই প্রতিজ্ঞার চিত্রে যদি খ বিস্তু হইতে ও ঘ রেখার উপর খচ লম্ব টানা যায় ও কচ সংযুক্ত করা যায়, তাহা হিলে কচ রেখা ওঘএর লম্ব হইবে এবং কওঘ ও খওঘ সমতল রেখার পরস্পর অবনতি কচখ কোণ দ্বারা পরিমিত হইবে ।

১৯শ—প্র। যদি তিনটি সমতল পরস্পরকে ছেদ করে ও তন্মধ্যে প্রথমটি দ্বিতীয়ের উপর লম্ব ভাবে ও দ্বিতীয়টি তৃতীয়ের উপর লম্ব ভাবে থাকে, তাহা হইলে প্রথমটি তৃতীয়ের উপর লম্ব ভাবে অবস্থিত হইবে আর দুই দুই সমতলের ছেদজ রেখা গুলি পরস্পরের লম্ব হইবে ।

১১শ অধ্যায়ের শেষের ১১টি মূল প্রতিজ্ঞা একত্রে কোন বিদ্যালয়ে পঠিত হয় না, এজন্য পরিত্যক্ত হইল ।

১২শ অধ্যায়।

উপপ্রতিজ্ঞা।

দুই অসমান রাশির মধ্যে যদি বৃহত্তর হইতে তাহার অর্ধেক অপেক্ষা অধিক বিয়োগ করা যায় ও অবশিষ্ট হইতে তাহার অর্ধেক অপেক্ষা অধিক বিয়োগ করা যায় এবং উত্তরোত্তর এইরূপ বিয়োগ করা যায়, তবে অবশেষে এরূপ রাশি অবশিষ্ট থাকিবে যে, তাহা প্রথমোক্ত দুই রাশির মধ্যে ক্ষুদ্রতর অপেক্ষা ন্যূন হইবে। (১০ম অধ্যায়—১ম প্রতিজ্ঞা।)

কথ ও গ এই দুই অসমান রাশির মধ্যে যেন কথ বৃহত্তর; যদি কথ হইতে তাহার অর্ধেক অপেক্ষা অধিক বিয়োগ করা যায় ও অবশিষ্ট হইতে তাহার অর্ধেক অপেক্ষা অধিক ও উত্তরোত্তর এই প্রকারে বিয়োগ করা যায়, তবে অবশেষে এরূপ রাশি অবশিষ্ট থাকিবে যে, তাহা গ অপেক্ষা ন্যূন হইবে।

গএর এমন একটা গুণিত		ঘ
কম্পনা করা যাইতে পারে	ক	
যে, তাহা কথ অপেক্ষা	ট	
বৃহত্তর হইবে।	ড	চ
গএর এবম্বিধ গুণিত যঙ		ছ
রাশি যেন কথ অপেক্ষা		
বৃহত্তর হইল ; প্রত্যেকে	খ	গ
গএর সমান হয়, এরূপ করিয়া যঙকে যচ, চছ, ছঙ এই		ঙ
কয় অংশে ভাগ কর।		

কথ হইতে তাহার অর্দ্ধেক অপেক্ষা অধিক খজ বিয়োগ কর ও অবশিষ্ট কজ হইতে তাহার অর্দ্ধেক অপেক্ষা অধিক জট বিয়োগ কর এবং যঙ যত ভাগে বিভক্ত হইয়াছে, কথ যে পর্য্যন্ত না তত ভাগে বিভক্ত হয়, সেই পর্য্যন্ত এই রূপে বিয়োগ করিতে থাক ; তাহা করিলে যেন, কট, টজ, জখ এই গুলি কথএর এক একটা ভাগ হইল এবং যচ, চছ, ছঙ এই গুলি যঙের এক একটা ভাগ।

পরে, যঙ রাশি কথ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে, ও যঙের বিয়োজক ছঙ, যঙের অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর নয় বলিয়া,
এবং কথএর বিয়োজক খজ রাশি কথএর অর্দ্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,
একের অবশিষ্ট যছ, অন্যের অবশিষ্ট কজ অপেক্ষা বৃহত্তর ;
আবার, যছ রাশি কজ অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে,

ও ছট রাশি ঘট্রের অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর নহে; কিন্তু জট
রাশি কজ্রের অর্ধ অপেক্ষা বৃহত্তর বলিয়া,
অবশিষ্ট ঘট্র অবশিষ্ট কট অপেক্ষা বৃহত্তর ।

এক্ষণে ঘট্র রাশি গএর সমান হওয়ায়,
গ রাশি কট অপেক্ষা বৃহত্তর,
অর্থাৎ কট রাশি গ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর । এখানে ইহাই
উপপাদ্য ।

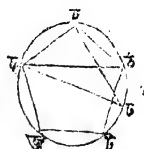
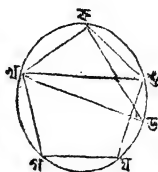
এই রূপে ঠিক অর্ধেক করিয়া বিয়োগ করিলে উপ-
পত্তিও এই রূপ হইবে ।

১ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য ।

ভিন্ন ভিন্ন রত্নের অন্তর্গত সদৃশ বহুভুজ গুলির
অনুপাত ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলির
অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে ।

কথগঘণ্ড ও চছজট্ট যেন দুই রত্ন এবং তাহাদের
অন্তর্গত কথগঘণ্ড ও চছজট্ট যেন দুই সদৃশ বহুভুজ ;
রত্ন দ্বয়ের খণ্ড ও ছট এক একটা ব্যাস ; তাহা হইলে
কথগঘণ্ড বহুভুজে চছজট্ট বহুভুজে যে অনুপাত, খণ্ডএর
উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজে ছটএর উপর অঙ্কিত সম-
চতুর্ভুজে সেই অনুপাত হইবে ।

কড, খঙ, চঢ,
ছঠ সংযুক্ত কর।
পরে, বহুভুজ দুইটি
সদৃশ হওয়াতে, থকঙ
কোণ ছচঠ কোণের



সমান ; এবং থকতে কঙতে যে রূপ, ছচতে চঠতে সেই
রূপ ;

[৬ঠ, সং ১।

এই হেতু থকঙ ও ছচঠ এই দুই ত্রিভুজ পরস্পর সমান
কোণী ;

[৬ঠ, ৬।

অতএব কঙথ কোণ চঠছ কোণের সমান ;

আর কঙথ কোণ কডথ কোণের ও চঠছ কোণ চঢছ
কোণের সমান ;

[৩য়, ২১।

এই হেতু কডথ কোণ চঢছ কোণের সমান ;

এবং থকড সম কোণ ছচঢ সম কোণের সমান ;

[৩য়, ৩১।

অতএব কডথ ও চঢছ ত্রিভুজ দ্বয়ের অবশিষ্ট কোণ
গুলি পরস্পর সমান ও ত্রিভুজ দুইটি সমান কোণী ;

এজন্য থকতে থডতে যে রূপ, ছচতে ছচতে সেই রূপ ;

[৬ঠ, ৮।

এবং একান্তরে, থকতে ছচতে যে রূপ, থডতে ছচতে
সেই রূপ ;

[৫ম, ১৬।

অতএব থকএর ছচএর সহিত অনুপাতের দ্বিঘাত, থডএর
ছচএর সহিত অনুপাতের দ্বিঘাতের সমান ।

[৫ম, সং ১০; ৫ম, ২২।

আবার কখগঘঙ বহুভুজের চছজটঠ বহুভুজের সহিত

অনুপাত, খণ্ডের ছটের সহিত অনুপাতের দ্বিঘাত
বলিয়া, [৬৪, ২০।

এবং খণ্ডের উপর সমচতুর্ভুজের ছটের উপর সমচতুর্ভুজের
সহিত অনুপাত খণ্ডের ছটের সহিত অনুপাতের দ্বিঘাত
হওয়াতে, [৬৪, ২০।

কথংঘণ্ট বহুভুজে চছজট্ট বহুভুজে যে রূপ, খণ্ডের
উপর সমচতুর্ভুজে ছটের উপর সমচতুর্ভুজে সেই রূপ।

[৫ম, ১১।

অতএব ভিন্ন ভিন্ন ইত্যাদি। এখানে ইহাই উপপাদ্য।

অনুশীলনার্থ প্রতিজ্ঞা—১। সূত্র বহুভুজ সকলের অনুপাত
তাহাদের অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাসের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ
গুলির অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে।

২ প্রতিজ্ঞা—উপপাদ্য।

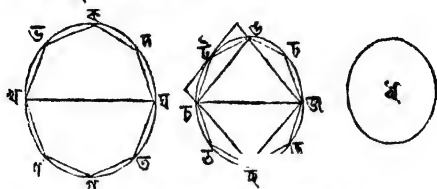
বৃত্ত সকলের অনুপাত তাহাদের ব্যাসের উপর
অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ গুলির অনুপাতানুসারে হইয়া
থাকে।

কথংঘণ ও ঙ্গচছজ যেন দুই বৃত্ত এবং খণ্ড ও চজ
তাহাদের ব্যাস; খণ্ডের উপর সমচতুর্ভুজে চজের
উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, কথংঘণ বৃত্তে ঙ্গচছজ
বৃত্তে সেই অনুপাত হইবে।

যদি না হয়, তবে অবশ্যই খণ্ডের উপর সমচতুর্ভুজে
চজের উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, কথংঘণ বৃত্তে

উচছজ রত্ত অপেক্ষা রহত্তর বা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইবে ।

প্রথমত, একটা চতুর্ভুজ অন্য চতুর্ভুজে যে অনুপাত, কথগঘ রত্তে উচছজ রত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ধ ক্ষেত্রে যেন সেই অনুপাত হইল ।



উচছজ সমচতুর্ভুজ উচছজ রত্তের অন্তর্গত কর ।

[৪থ, ৬।

এই সমচতুর্ভুজ উচছজ রত্তের অর্ধেক অপেক্ষা রহত্তর হইবে ;

কারণ উ, চ, ছ ও জ বিন্দু দিয়া রত্তের স্পর্শিনী টানিলে যে সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত হইবে, উচছজ সমচতুর্ভুজ তাহার অর্ধেক ;

আর রত্তের উপর অঙ্কিত এই সমচতুর্ভুজ রত্ত অপেক্ষা রহত্তর ;

এই হেতু উচছজ চতুর্ভুজ রত্তের অর্ধেক অপেক্ষা রহত্তর ।

ট, ঠ, ড ও ঢ বিন্দুতে উচ, চছ, ছজ ও জঙ চাপ দ্বিখণ্ড কর ;

এবং উট, টচ, চঠ, ঠছ, ছড, ডজ, জঢ ও ঢঙ সংযুক্ত কর ; তাহা হইলে উটচ, চঠছ, ছডজ ও জঢঙ এই কএকটির প্রত্যেক ত্রিভুজ, যে রত্ত খণ্ডের অন্তর্গত

হইয়াছে, তাহার অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ;

কেননা ও ও চ বিন্দু দিয়া পরস্পর সমান্তর দুই রেখা ও ট বিন্দু দিয়া স্পর্শিনী টানিলে যে সমান্তর ক্ষেত্র হইবে, তাহা চটউ ত্রিভুজের দ্বিগুণ হইবে, এবং এই সমান্তর ক্ষেত্র চটউ রত্নখণ্ড অপেক্ষা বৃহত্তর হওয়াতে উটচ ত্রিভুজ রত্নখণ্ডের অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

এই রূপে প্রতিপন্ন হইবে যে, অন্য অন্য ত্রিভুজ গুলি রত্নখণ্ড সকলের অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর ;

অতএব এই সকল ত্রিভুজের সমষ্টি, সমস্ত রত্নখণ্ডের সমষ্টির অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর ।

আবার উট, টচ ইত্যাদি চাপ দ্বিগুণ করিয়া ত্রিভুজ সকল অঙ্কিত করিলে, এই ত্রিভুজ গুলি একত্র যোগে, যে যে রত্নখণ্ডের অন্তর্গত হইয়াছে, তাহাদের সমষ্টির অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে ।

এই রূপ প্রক্রিয়া দ্বারা ও প্রতিপাদিত উপপ্রতিজ্ঞা অনুসারে, যদি ত্রিভুজ সকল ক্রমাগত বিয়োগ করা যায়, তবে পরিশেষে এপ্রকার কতিপয় রত্নখণ্ড অবশিষ্ট থাকিবে, যাহাদের সমষ্টি উচছজ রত্নের ও ধ ক্ষেত্রের অন্তর অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর হইবে ।

উট, টচ, চঠ, ঠছ, ছড, ডজ, জচ ও চঙ যেন উক্ত রূপ অবশিষ্ট কতিপয় রত্নখণ্ড, অর্থাৎ ইহাদের সমষ্টি উচছজ রত্নের ও ধ ক্ষেত্রের অন্তর অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ; অতএব রত্নের অবশিষ্ট অংশ, অর্থাৎ উটচঠছডজচ বহুভুজ, ধ ক্ষেত্র অপেক্ষা বৃহত্তর ।

উটচঠছডজচ বহুভুজের সদৃশ কথগঘ রত্নের অন্তর্গত কর ;

তাহা হইলে কথগঘ রত্নের বহুভুজে উটচঠছডজচ বহু-
ভুজে যে রূপ, খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর
সমচতুর্ভুজে সেই রূপ, [১২শ, ১।

অর্থাৎ কথগঘ রত্নে ঐ ক্ষেত্রে সেই রূপ ; [কং ; ৫ম, ১১।

আর কথগঘ রত্নের বহুভুজ কথগঘ রত্নের অন্তর্গত
হইয়াছে বলিয়া উহা অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর,

অতএব উটচঠছডজচ বহুভুজ ঐ ক্ষেত্র অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর ;

কিন্তু পূর্বে উপপন্ন হইয়াছে যে, ইহা ঐ অপেক্ষা বৃহত্তর ;

অতএব এরূপ হওয়া অসম্ভব ;

অর্থাৎ খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সমতুর্ভুজে
যে অনুপাত, কথগঘ রত্নে উচছজ রত্ন অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর
কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইতে পারে না ।

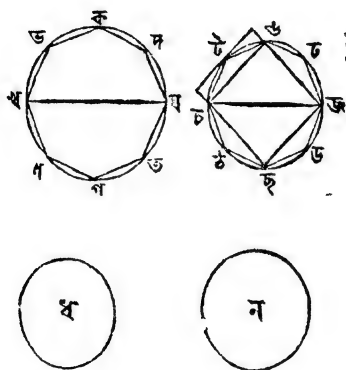
এই রূপে উপপন্ন হইবে যে, চজএর উপর সমচতুর্ভুজে
খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, উচছজ রত্নে
কথগঘ রত্ন অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত
হইতে পারে না ।

আবার খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সম-
চতুর্ভুজে যে অনুপাত, কথগঘ রত্নে উচছজ রত্ন অপেক্ষা
বৃহত্তর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইতে পারে না ।

যদি এরূপ সম্ভব হয়, তাহা হইলে সমচতুর্ভুজ দ্বয়ে পরস্পর
যে অনুপাত, কথগঘ রত্নে উচছজ রত্ন অপেক্ষা
বৃহত্তর ন ক্ষেত্রে যেন সেই অনুপাত হইল ;

তাহা হইলে বিনোমে, চজএর উপর সমচতুর্ভুজে খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, ন ক্ষেত্রে কখগঘ রত্তে সেই অনুপাত ;

আর ন ক্ষেত্র উচছজ রত্ত অপেক্ষা রহত্তর হওয়াতে, ন ক্ষেত্রে কখগঘ রত্তে যে অনুপাত, উচছজ রত্তে কখগঘ রত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত । [৫ম, ১৪ ।



এই হেতু চজএর উপর সমচতুর্ভুজে খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, উচছজ রত্তে কখগঘ রত্ত অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত ;

বিস্ত্র একরূপ হওয়া যে অসম্ভব, তাহা পূর্বে প্রতাপন হইয়াছে ।

অতএব খঘএর উপর সমচতুর্ভুজে চজএর উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, কখগঘ রত্তে উচছজ রত্ত অপেক্ষা রহত্তর কোন ক্ষেত্রে সেই অনুপাত হইতে পারে না ;

আর পূর্বে সপ্রমাণ হইয়াছে যে, খণ্ডের উপর সম-
চতুর্ভুজে চর্জের উপর সমচতুর্ভুজে যে অনুপাত, কথগণ
রূতে ওচছর্জ অপেক্ষা ক্ষুদ্রতর কোন ক্ষেত্রে সেই অনু-
পাত হইতে পারে না ;

সুতরাং খণ্ডের উপর সমচতুর্ভুজে চর্জের উপর সমচতু-
র্ভুজে যে অনুপাত, কথগণ রূতে ওচছর্জ রূতে সেই অনু-
পাত ।

অতএব রূত সকলের ইত্যাদি । এখানে ইহাই উপপাদ্য ।

অঃ প্রঃ—২ । এমন একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার
ক্ষেত্রফল কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের ক্ষেত্রফলের সহিত কোন নির্দিষ্ট
অনুপাত বিশিষ্ট হয় ।

৩ । এককেন্দ্রিক কতকগুলি বৃত্ত অঙ্কিত করিয়া একটি
নির্দিষ্ট বৃত্তকে কতিপয় সমান সমান অংশে বিভক্ত করিতে
হইবে ।

৪ । কোন বৃত্তের ক্ষেত্রফল ও ব্যাসার্ধ জানা আছে ; এই
বৃত্তের অর্ধস্থল অন্য এক বৃত্তের ব্যাসার্ধ স্থির করিতে হইবে ।

৫ । কোন বৃত্তের ব্যাসার্ধ জানা আছে ; এই বৃত্তের তিন গুণ
ও এককেন্দ্রিক আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিতে হইবে ।

৬ । এক নির্দিষ্ট বৃত্তকে এমন কতিপয় অংশে বিভক্ত
করিতে হইবে, যেন প্রত্যেক অংশের পরিমিতি বৃত্ত পরিধির
সমান হয় ।

৭ । কথগ সমকোণী ত্রিভুজের কণ কণের উপর কচছগ অর্ধ
বৃত্ত এবং কথ ও খগ বাহুর উপর কথখ ও খঙ অর্ধ বৃত্ত
দ্বয় অঙ্কিত হইয়াছে ; প্রমাণ কর যে, কচখ ও খছগ অর্ধ চর্জা-
কৃতি ক্ষেত্র হয় একত্র যোগে কথগ ত্রিভুজের সমান হইবে ।

৮। কোন নির্দিষ্ট বৃত্তের কথা ও যগ ব্যাস পরস্পরের সহিত সমকোণ করিয়াছে ; যথ অথবা থক ব্যাসার্ধ বিশিষ্ট এক বৃত্তের কণ্ঠ পরিধি খণ্ড ; প্রমাণ কর যে, কযথগ অর্ধ চন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র = কযগ ত্রিভুজ ।

৯। এক অর্ধবৃত্তের ব্যাসকে দুই ভাগে বিভক্ত করিয়া যদি তাহাদের উপর আর দুইটি অর্ধবৃত্ত প্রথমোক্ত ক্ষেত্রের অভ্যন্তরে অঙ্কিত করা যায়, তবে তিনটি অর্ধবৃত্তের পরিধির মধ্যস্থিত ক্ষেত্র, ব্যাসের দুই খণ্ডের মধ্য সমানুপাতী রেখার উপর অঙ্কিত বৃত্তের সমান হইবে ।

১০। কোন বর্তুল এক সমতল দ্বারা ছেদিত হইলে, প্রত্যেক ছেদজ বৃত্ত ক্ষেত্র হইবে ।

১১। একটি বৃত্ত অন্য এক বৃত্তকে অন্তরে স্পর্শ করিলে ক্ষুদ্র বৃত্তের বহিস্থ অর্ধচন্দ্রাকৃতি ক্ষেত্র যেন এই বৃত্তের দ্বিগুণ হইল ; দুই বৃত্তের ব্যাসের অনুপাত স্থির কর ।

১২। এক বৃত্তের ব্যাসের কোন দুই খণ্ডকে ব্যাস স্বরূপ লইয়া আর এক একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, যেন বৃহৎ বৃত্তের অবশিষ্ট অংশ ঐ দুইটি ক্ষুদ্র বৃত্তের মধ্যে একটির সমান হইল ; ব্যাসের দুই খণ্ডের অনুপাত স্থির করিতে হইবে ।

১৩। কোন বৃত্তপাদে একটি ব্যাসার্ধের উপর এক অর্ধবৃত্ত অঙ্কিত কর ও অন্য ব্যাসার্ধের উপর আর একটি অর্ধবৃত্ত এক্রূপে অঙ্কিত কর, যেন ইহা বৃত্তপাদকে ও প্রথম অঙ্কিত অর্ধবৃত্তকে স্পর্শ করে । এই তিনটির মধ্যস্থিত ক্ষেত্রের অন্তর্গত বৃত্তের ও নির্দিষ্ট বৃত্তপাদের ক্ষেত্রফলের তুলনা করিতে হইবে ।

১৪। কোন সমকোণী ত্রিভুজের সম কোণ হইতে কর্ণের উপর লম্ব টানিলে, যে দুইটি ত্রিভুজ জন্মে, তাহাদের অন্তর্গত দুই বৃত্তের পরস্পর যে অনুপাত, এই দুইটি ত্রিভুজেরও পরস্পর সেই অনুপাত ।

১৫। কোন সমচতুর্ভুজের অভ্যন্তরে যদি চারিটি সমান সমান বৃত্ত এক্রূপে অঙ্কিত করা যায় যে, তাহারা পরস্পর ও সমচতুর্ভুজের এক একটি বাহু স্পর্শ করে, তবে এই চারিটি বৃত্ত একত্র যোগে সমচতুর্ভুজের অন্তর্গত বৃত্তের সমান হইবে ।

১৬। আয়ত ক্ষেত্রের কর্ণ দ্বয়ের উপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্ত দ্বয় একত্র যোগে, চারিটি বাহুর উপর অঙ্কিত অর্ধবৃত্ত চতুষ্টয়ের সমান ।

১৭। বর্তুলের অন্তর্গত ও তাহার পৃষ্ঠ পর্য্যন্ত বিস্তৃত সমান সমান সরল রেখা গুলি কেন্দ্র হইতে সম দূরবর্তী ।

১৮। সমান্তর সমতল দ্বয় যদি কোন বর্তুলকে একপে ছেদ করে যে, ছেদজ বৃত্ত গুলি পরস্পর সমান হয়, তবে সমতল দুইটি কেন্দ্র হইতে সমদূরে থাকিবে ।

১৯। এক সরল রেখা বা একটা সমতল একাধিক বিন্দুতে কোন বর্তুলকে স্পর্শ করিতে পারে না ; আর বর্তুলের ব্যাসার্ধ, স্পর্শক রেখা বা সমতলের সহিত স্পর্শ বিন্দুতে সম কোণ উৎপন্ন করে ।

২০। একটা সমচতুর্ভুজিক ঘন ক্ষেত্র কোন বর্তুলের অন্তর্গত করিলে, ভিনে একে যে অনুপাত, ব্যাসের উপর অঙ্কিত বর্গ ক্ষেত্রে, সমচতুর্ভুজিক ঘন ক্ষেত্রের এক ভুজের উপর অঙ্কিত বর্গ ক্ষেত্রে সেই অনুপাত ।

১২শ অধ্যায় ।

ব্যাখ্যা ও পরিশিষ্ট ।

ইউক্লিড ১২শ অধ্যায়ে ছেদিত ঘনক্ষেত্র, স্তম্ভ, সূচি ও বৃত্তস্থচির বিষয় লিখিয়াছেন। এই সকল ঘনক্ষেত্রের প্রকৃতি ও পরস্পর সম্বন্ধ নির্ণয় করিবার জন্য এক নূতন প্রণালী অবলম্বন করিয়াছেন, ইহাকে “বিয়োগ বিধি”^{*} বলা যাইতে পারে।

ইউক্লিড ১ম অধ্যায়ে সরল বৈখিক ক্ষেত্র সকলের পরস্পর সৰ্ব্বতোভাবে সমানত্ব স্থির করিবার জন্য একটা ত্রিভুজ অপরের উপর স্থাপন করিয়া তাহারা সৰ্ব্বতোভাবে মিলিত হয়, কি না, তাহা দর্শাইয়াছেন। অনন্তর সম্পূর্ণ রূপে মিলিত না হইলে কি রূপে ত্রিভুজ, চতুর্ভুজাদির ক্ষেত্রফলের তুলনা করা যাইতে পারে, তাহা প্রদর্শন করিয়াছেন।

তিনি ৬ষ্ঠ অধ্যায়ে সদৃশ ত্রিভুজ গুলির সর্বগোয় বাহুর দ্বিঘাত অনুপাত দ্বারা তাহাদের ক্ষেত্রফলের তুলনা করিয়াছেন; পরে, সদৃশ বহুভুজ গুলিকে সদৃশ ত্রিভুজ সমূহে বিভক্ত করিয়া প্রতিপন্ন করিয়াছেন যে, তাহাদের ক্ষেত্রফলের অনুপাত সর্বগোয় বাহুর দ্বিঘাত অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে এবং ১১শ অধ্যায়ে সদৃশ ঘনক্ষেত্র সকলের ঘন ফল যে তাহাদের সর্বগোয় বাহুর অনুপাতের দ্বিঘাত অনুপাতানুসারে হইয়া থাকে, তাহা প্রদর্শন করিয়াছেন।

কোন ক্ষেত্র হইতে তাহার অংশগুলি ক্রমাগত বিয়োগ করার নাম, “বিয়োগ বিধি” এইরূপ বিয়োগ এ প্রকারে সম্পন্ন করা যাইতে পারে যে, পরিশেষে সেইটী কিছুই

* “The method of Exhaustions.”

অবশিষ্ট থাকিবে না। ইউক্লিড এই বিয়োগ বিধি ১০ম অধ্যায়ের ১ম প্রতিজ্ঞায় প্রদর্শন করিয়াছেন। এই বিধির প্রয়োগ দ্বারা গ্রীস দেশীয় পণ্ডিতেরা নানাবিধ সরল বৈখিক ও ঘনক্ষেত্রের ক্ষেত্রফল ও ঘন ফল স্থির করিয়াছেন। এই সকল ফল স্থির করিবার নিমিত্ত ইহা যে একটি উৎকৃষ্ট ও অব্যর্থ উপায়, তাহার সন্দেহ নাই; কিন্তু ইহা বহু পরিশ্রম সিন্ধু ও জটিল; এজন্য গণিত বেত্তারা এক্ষণে ইহা পরিত্যাগ করিয়া ভিন্ন উপায় অবলম্বন করিয়াছেন। বিয়োগ বিধির উদাহরণ স্বরূপ ১২শ অধ্যায়ের ২য় প্রতিজ্ঞাটী এক্ষণে যাবতীয় বিদ্যালয়ে পঠিত হয়; অন্যান্য প্রতিজ্ঞা পঠিত হয় না এজন্য পরিত্যক্ত হইল।

এই অধ্যায়ের প্রারম্ভে যে উপপ্রতিজ্ঞাটী লিখিত হইয়াছে, তাহা ইউক্লিড কৃত দশমের ১ম প্রতিজ্ঞা। ছাদশের দ্বিতীয় প্রতিজ্ঞা ইহার সাহায্যে সপ্রমাণ হইয়াছে।

অনুশীলনার্থ বিবিধ প্রতিজ্ঞা ।

১। যদি কোন ত্রিভুজের তিন বাহুর সহিত এক মূখে সমানসমান কোণ করিয়া তিনটি রেখা টানা যায়, তবে এই ত্রিভুজ রেখা দ্বারা যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহা নির্দিষ্ট ত্রিভুজের সদৃশ হইবে ।

২। কোন ত্রিভুজের খণ্ড শীর্ষকোণের দ্বিখণ্ড কারক রেখার উপর খণ্ড ও গণ্ড দুই লম্ব টান ও খণ্ড ভূমিকে চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ড কর ; তাহা হইলে $চঘ = চঙ$ ।

৩। কোন সমদ্বিবাহু ত্রিভুজের শীর্ষকোণ হইতে, ভূমির উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সম্মুখীন দুই কোণ পর্যান্ত দুইটি রেখা টানিয়া তাহাদের ও কর্ণ দ্বয়ের ছেদজ বিন্দু দ্বয় সংযুক্ত করিয়া দিলে, এই সংযোজক রেখা ত্রিভুজের ভূমির সমান্তর হইবে ।

৪। প্রথম অধ্যায়ের ৪৭এর প্রতিজ্ঞার চিত্রে খণ্ড, চট ও ছজ এই তিন রেখা বৃদ্ধি করিলে তাহার। একই বিন্দুতে মিলিত হইবে ।

৫। এক সমবাহু ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ যে কোন বিন্দু হইতে তিন বাহুর উপর এক একটি করিয়া লম্ব টানিলে, তাহাদের সমষ্টি কোন একটি কোণিক বিন্দু হইতে সম্মুখীন বাহুর লম্বের সমান হইবে । যদি বিন্দুটি কোন এক বাহুস্থিত হয়, তবে এই প্রতিজ্ঞা সত্য কিনা ?

৬। কথংঘ সমান্তরিকের আধার সমতলস্থিত ব কোন বিন্দু ; প্রতিপন্ন কর যে, বখংঘ ত্রিভুজ বকখ ও বখংঘ ত্রিভুজের সমষ্টির সমান ।

৭। কোন ত্রিভুজের ক, খ ও গ কোণের সম্মুখীন তিনটি বাহু যেন অ, ই এবং উ ; যদি ক কোণ সমকোণ হয় আর ক হইতে খগএর উপর লম্বের দৈর্ঘ্য যদি দ হয়, তাহা হইলে ই + উ, দ এবং অ + দ এই তিনটি যে ত্রিভুজের বাহু, সেইটি সমকোণী ত্রিভুজ হইবে ।

৮। যে ত্রিভুজের তিন বাহুর পরিমাণ ক, খ ও গ তাহার শূন্য হইতে গ ভুজের উপর লম্বের পরিমাণ স্থির কর ; আর যদি এই তিন ভুজের সমষ্টির অর্ধেকের পরিমাণ স হয়, তবে প্রতিপন্ন কর যে,

ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\sqrt{\{স(স-ক)(স-খ)(স-গ)\}}$ ।

৯। যদি এক সমবাহু ত্রিভুজের তিন কোণিক বিন্দু পরস্পর সমান্তর তিন রেখাতে থাকে আর ঐ তিন রেখার মধ্যবর্তীদির অন্য দুইটি হইতে দূরত্বের পরিমাণ যদি খ ও গ হয়, তবে

ত্রিভুজের ভুজ পরিমাণ = $২\sqrt{\frac{খ^২ + গ^২ + গ^২}{৩}}$ ।

১০। যদি কোন পঞ্চভুজের বাহুগুলির উভয় পার্শ্ব বর্দ্ধিত করা যায় ও বর্দ্ধিত বাহুগুলি যদি পরস্পর সংলগ্ন হয়, তাহা হইলে যে কোণগুলি উৎপন্ন হইবে, তাহাদের সমষ্টি দুই সম কোণের সমান হইবে ; আর যদি কোন বহুভুজের ভুজ সংখ্যা স + ৪ হয়, তবে উক্তরূপে উৎপন্ন কোণগুলির সমষ্টি ২স পরিমিত সম কোণের সমান হইবে ।

১১। প্রতিপন্ন কর যে, নিয়মিত বহুভুজগুলির মধ্যে কেবল ত্রিভুজ, চতুর্ভুজ এবং ষড়্ভুজ দ্বারা কোন বিন্দুর চতুর্দিকের স্থান পরিপূরণ হইতে পারে ।

১২। প্রথম অধ্যায়ের ৪৭এর প্রতিজ্ঞায় উল্লিখিত সমচ-ভুর্ভুজগুলিকে কি রূপে ছেদ করিয়া বৃহত্তর চতুর্ভুজের অংশগুলির উপর ক্ষুদ্রতর দুইটির অংশগুলি স্থাপন করিলে তাহার পরস্পর সমান হইবে ?

১৩। কখগ ত্রিভুজের ভূমি হু ঘ কোন এক বিন্দু, কঘ সংযুক্ত করিয়া প্রতিপন্ন কর যে,

$$কা^২.গঘ + কগ^২.খঘ = কঘ^২.খগ + খগ.খঘ.গঘ ।$$

১৪। দুইটি বিন্দু নির্দিষ্ট আছে; যদি আর কতিপয় বিন্দু একরূপে কল্পিত হয় যে, তাহাদের প্রত্যেকের ও নির্দিষ্ট বিন্দু দ্বয়ের সংযোজক দুইটি দুইটি রেখার উপর দুই সমচতুর্ভুজ অঙ্কিত করিলে, তাহাদের সমষ্টি বা অন্তর অপরিবর্তনীয় রাশি হয়, তবে উক্ত রূপ বিন্দু গুলি দ্বারা যে যে ক্ষেত্র উৎপন্ন হইবে, তাহা স্থির কর ।

১৫। কথ রেখা স্থিত গ কোন বিন্দু; প্রথমত গখতে ও পরে বর্জিত গখতে ঘ বিন্দু একরূপে কল্পনা কর, যেন গঘ অংশ কঘ ও খঘএর মধ্য সমানুপাতী হয় ।

১৬। কথ রেখা গ বিন্দুতে অন্ত্য ও মধ্য সমানুপাতী রূপে ছেদিত হইয়াছে; দুই খঙের মধ্যে বৃহত্তর খগকে বর্জিত করিয়া খঘকে খগএর সমান কর আর খগ হইতে কগএর সমান খঙ অংশ ছেদ কর; তাহা হইলে, কঘ ও কঙ এই দুই রেখাও খ ও গ বিন্দুতে অন্ত্য ও মধ্য সমানুপাতী রূপে ছেদিত হইবে ।

১৭। কখগঘ বিবম চতুর্ভুজের কঘ ও খগ ভুজ দ্বয় পরস্পর সমান্তর; প্রতিপন্ন কর যে,

$$\text{কগ}^2 - \text{খঘ}^2 : \text{কখ}^2 - \text{গঘ}^2 :: \text{খগ} + \text{কঘ} : \text{খগ} - \text{কঘ} ।$$

১৮। বৈজ্ঞিক প্রণালী অবলম্বন পূর্বক ক অঙ্কুলি পরিমিত রেখাকে একরূপে বিভক্ত কর, যেন সমস্ত রেখার ও এক অংশের অন্তর্গত আয়ত অন্য অংশের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজের সমান হয়। ইহা দ্বারা যে দ্বিবিধ উত্তর পাওয়া যাইবে, তন্মধ্যে একটি হইতে ইউক্লিডের এই প্রতিজ্ঞার অঙ্কন করুপে হইতে পারে, তাহা দেখাইয়া দাও আর অপর উত্তরের অর্থ বুঝাইয়া দাও ।

১৯। দুই বৃত্তের ব্যাসার্ধের যে অনুপাত, দুইএতে তিনেতে সেই অনুপাত; ইহাদের মধ্যে যদি একটি বৃত্ত অন্যটিকে অন্তরে স্পর্শ করে আর ক্ষুদ্র বৃত্তের কেন্দ্র হইতে যদি সাধারণ ব্যাসের উপর দিয়া লম্ব টানা যায়, তবে লম্ব যে দুই বিন্দুতে বৃহৎ বৃত্তকে ছেদ করিবে, তথা হইতে ক্ষুদ্র বৃত্তের দুইটি স্পার্শ্বিনী টানিলে, তাহারা পরস্পর লম্বভাবাপন্ন হইবে ।

২০। বৃত্তের অন্তর্গত কোন বহুভুজের ভূজ সংখ্যা যদি যুগ্ম রাশি হয়, তবে ১ম, ৩য়, ৫য়, ইত্যাদি কোণের সমষ্টি ২য়, ৪র্থ, ৬ষ্ঠ ইত্যাদি কোণের সমষ্টির সমান হইবে।

২১। কোন ত্রিভুজের কথ ও কগ ভুজের উপর খঘ ও গঘ লম্ব এবং কঘএর উপর গওচ লম্ব টানা হইয়াছে; যদি গওচ, কথকে ও বিন্দুতে ছেদ করে, তবে প্রতিপন্ন কর যে, কথগ ও কগও ত্রিভুজ পরস্পর সদৃশ।

২২। দুই বৃত্তের ব্যাসার্ধ অ এবং ই; কথ তাহাদের কেন্দ্র সংযোজক রেখা গ বিন্দুতে একত্রে বিভক্ত হইয়াছে যে, কথ : অ+ই :: অ-ই : কগ-খগ, যদি গস, কথএর লম্ব হয়, তবে গঘএর কোন বিন্দু হইতে দুই বৃত্তের স্পর্শিনী টানিলে, তাহারা পরস্পর সমান হইবে।

২৩। এক বর্গ ক্ষেত্রের সমান এমন এক আয়ত অঙ্কিত করিতে হইবে, যাহার দুই সম্বিহিত বাহুর অন্তর এক নির্দিষ্ট রেখার সমান হয়।

২৪। যদি এক বৃত্ত কথগ ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত হয় এবং কোণিক বিন্দু গুলি হইতে সম্মুখীন বাহু গুলির উপর অঙ্কিত লম্ব রেখা গুলি বৃত্তকে ঘ, ও ও চ বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে ঘও, ঘচ ও ওচ এই তিন চাপ যথাক্রমে গ, খ, ও ক বিন্দু দ্বারা দ্বিগুণ হইবে।

২৫। যদি কোন দুই বৃত্ত পরস্পরকে প বিন্দুতে বাহিরে স্পর্শ করে এবং কপখ, গপঘ দুই রেখা পরস্পর লম্বভাবে টানা যায় আর যদি চ ও ছ বিন্দুতে কেন্দ্র সংযোজক রেখা দুই বৃত্তকে ছেদ করে তবে $কথ^2 + গঘ^2 = চছ^2$ ।

২৬। কথখ একটা বৃত্তপাদ; যদি বৃত্তপাদের খদ জ্যা, কথএর সমান্তর হয় এবং যক ও যখ রেখাদ্বয়কে ধ ও ন বিন্দুতে ছেদ করে, তাহা হইলে $ধখ^2 + থন^2 = কথ^2$ ।

২৭। এমন এক বিন্দু স্থির করিতে হইবে, যাহা হইবে দুই নির্দিষ্ট বৃত্তের স্পর্শিনী টানিলে তাহাদের অন্তর্গত কোণ একটা নির্দিষ্ট কোণের সমান হয়।

২৮। যদি কোন বৃত্ত পরিধিহ এক বিন্দু হইতে অন্তর্গত

ত্রিভুজের তিন বাহুর উপর তিনটি লম্ব টানা যায়; তবে সম্পাদিত বিন্দু ত্রয় একই রেখাতে থাকিবে।

২৯। কখ, কগ, ঘঙ ও ঘচ এই চারি রেখার মধ্যে তিনটি তিনটির পরস্পর সম্পাতে চারিটি ত্রিভুজ উৎপন্ন হইয়াছে; প্রতিপন্ন কর যে, এই কয়টি ত্রিভুজের উপর অঙ্কিত বৃত্ত গুলি একই বিন্দু দিয়া যাইবে।

৩০। যদি কোন ত্রিভুজের ভূমির উভয় পার্শ্ব একপে বর্ধিত করা যায় যে, এক এক পার্শ্বের বর্ধিত অংশ সমিহিত বাহুর সমান হয় আর বর্ধিত ভূমির দুই প্রান্ত ও ত্রিভুজের শৃঙ্গ দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়, তবে শৃঙ্গ ও কেন্দ্র সংযোজক রেখা শৃঙ্গস্থ কোণকে দ্বিখণ্ড করিবে।

৩১। প্রমাণ কর যে, কোন বর্গ ক্ষেত্রের অর্ধেক অপেক্ষা বৃহত্তর একটি ত্রিভুজ এই বর্গ ক্ষেত্রের অন্তর্গত করা যায় না।

৩২। কোন ত্রিভুজের ক, খ ও গ তিনটি বাহু; অ এবং ই ক্রমে উপরি অঙ্কিত ও অন্তর্গত বৃত্তের ব্যাস; প্রতিপন্ন কর যে ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল = $\frac{\text{কখগ}}{৪ \text{ অ}} = \frac{(\text{ক} + \text{খ} + \text{গ}) \text{ই}}{২}$ ।

৩৩। কখগঘ কোন বৃত্তের অন্তর্গত চতুর্ভুজ; প্রতিপন্ন কর যে, কগ : খঘ :: খক.কঘ + খগ.গঘ : কখ.খগ + কঘ.ঘগ।

৩৪। ক, খ, গ, ঘ, ঙ এই পাঁচ বিন্দুতে কোন বৃত্ত পরিধি পাঁচ সমান ভাগে বিভক্ত হইয়াছে, কগ, গঙ, ঙখ, খঘ ও ঘক সংযুক্ত করিয়া দিলে যে তারকাকৃতি ক্ষেত্র হইবে, তাহার কোণ সমষ্টি পাঁচ সম কোণের সমান।

৩৫। পঞ্চভুজ, ষড়্ভুজ, সপ্তভুজ, ও অষ্টভুজের ভুজ গুলি বৃদ্ধি করিয়া তারকাকৃতি ক্ষেত্র অঙ্কিত কর এবং ইহাদের মধ্যে এক একটি বহুভুজকে আধারস্বরূপ জ্ঞান করিয়া কত গুলি তারকা-কৃতি ক্ষেত্র অঙ্কিত করিতে পারা যায়, তাহা স্থির কর।

৩৬। যদি কখ রেখা গ বিন্দুতে অন্ত্য ও মধ্য সমানুপাতী রূপে বিভক্ত হইয়া থাকে, তাহা হইলে কগ ও গখ পরস্পর দৃঢ় রাশি হইবে আর প্রতিপন্ন কর যে, কগ : গখ এই অনুপাতের আসন্নতর মান = ১৬।

৩৭। তৃতীয় অধ্যায়ের পঞ্চদশ প্রতিজ্ঞার প্রয়োগ দ্বারা প্রতিপন্ন কর যে, এরি রেখা সমানুপাতী হইলে, বৃহত্তম ও ক্ষুদ্রতমের সমষ্টি অন্য দুই রেখার সমষ্টি অপেক্ষা বৃহত্তর হইবে।

৩৮। যদি কোন ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ ম বিন্দু হইতে তিনটি বাহু পর্য্যন্ত মচ, মছ ও মজ রেখা টানা যায় এবং তিন কোণের বিন্দু হইতে ইহাদের সমান্তর কট, খাঠ, ও গড রেখা টানা যায় তাহা হইলে প্রতিপন্ন কর যে, $\frac{মচ}{কট} + \frac{মছ}{খাঠ} + \frac{মজ}{গড} = ১।$

৩৯। কোন সমকোণী ত্রিভুজের কোটি ও কর্ণের সমষ্টি এবং ভূমি ও কর্ণের সমষ্টি নির্দিষ্ট আছে; ত্রিভুজটি অঙ্কিত কর।

৪০। যদি কোন ত্রিভুজের ক্ষেত্রফল ক হয় আর যদি এই ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহু একপে বিভক্ত করা যায় যে, দুই অংশের যে অনুপাত, স তে একেতে সেই অনুপাত, তবে ছেদ বিন্দুত্রয় সংযুক্ত করিলে, যে ত্রিভুজ উৎপন্ন হইবে, তাহার ক্ষেত্রফল
$$= \frac{স^2 - স + ১}{(স + ১)^2} \times ক।$$

৪১। কোন বৃত্তের গঘ জ্যা এক নির্দিষ্ট কথ সরল রেখার সমান্তর; কগ, ও বিন্দুতে এবং খঙ, চ বিন্দুতে নির্দিষ্ট বৃত্তকে ছেদ করিতেছে; প্রতিপন্ন কর যে, ঘচ, কথ রেখাকে একটি অপরিবর্তনীয় ছ বিন্দুতে ছেদ করিবে।

৪২। কোন ত্রিভুজের কথ ও কগ বাহুতে ড ও চ বিন্দু এবং ডচতে ত বিন্দু একপে কল্পনা কর, যেন $\frac{খড}{কড} = \frac{কচ}{গচ} = \frac{তড}{তচ}$

একপে প্রতিপন্ন কর যে, খতগ ত্রিভুজ, কডচ ত্রিভুজের দ্বিগুণ

৪৩। কথগ ত্রিভুজ কোন বৃত্তের অন্তর্গত হইয়াছে; গ ও খ বিন্দু দিয়া অঙ্কিত দুই স্পর্শিনীর সমান্তর কঘ ও কঙ রেখা দ্বি টানিয়া প্রমাণ কর যে, খঙ : গঘ :: কথ^২ : কগ^২।

৪৪। খ ও গ, কঘ রেখাঙ্গ দুই বিন্দু; এমন এক বিন্দু নির্ণয় কর, যে তাহা হইতে ক, খ, গ ও ঘ পর্য্যন্ত চারি সরল রেখা

টানিলে, যথাক্রমে তাহাদের দুইটি দুইটির অন্তর্গত কোণ গুলি সমান হয়।

৪৫। কোন বহুভুজের এক বাহুকে স অংশে বিভক্ত করিয়া, প্রত্যেক অংশের উপর বহুভুজের সদৃশ ও একরূপে অঙ্কিত ক্ষেত্র স্থাপন করিলে, ঐ প্রকার সমস্ত ক্ষেত্রের পরিমিতির সমষ্টি, নির্দিষ্ট বহুভুজের পরিমিতির সমান হইবে; আর যদি বাহুর অংশ গুলি পরস্পর সমান হয়, তবে ক্ষুদ্র বহুভুজ গুলির ক্ষেত্রফলের সমষ্টি $= \frac{2}{n}$ (বৃহৎ বহুভুজ)।

৪৬। কোন বৃত্তের অন্তর্গত নিয়মিত ষড়্ভুজ, সেই বৃত্তের উপর অঙ্কিত ও অন্তর্গত সমবাহু ত্রিভুজ দ্বয়ের মধ্য সমানুপাতী হইবে।

৪৭। যদি কোন অর্ধবৃত্তের ব্যাসের উপর আর দুইটি সমান অর্ধ বৃত্ত অঙ্কিত করা যায় এবং তিনটি অর্ধবৃত্ত পরিধির মধ্যস্থানে একটি বৃত্ত আঁকা যায়, তবে ইহার ব্যাসে দুইটি সমান বৃত্তের একটির ব্যাসে যে অনুপাত, দুইএ তিনে সেই অনুপাত।

৪৮। কথাগঘ চতুর্ভুজের গ ও ঘ এই দুই কৌণিক বিন্দু এবং কণদ্বয়ের ছেদ বিন্দু হইতে কথএর উপর গচ, ঘছ ও ঙজ লম্ব টানিয়া প্রমাণ কর যে,

$$\text{চতুর্ভুজের ক্ষেত্রফল} = \frac{1}{2} \text{কথ} \times \frac{\text{গচ} \cdot \text{ঘছ}}{\text{ঙজ}}।$$

৪৯। যদি কঅ, খই ও গউ এই তিন রেখা, কোন ত্রিভুজের ক, খ ও গ এই তিন কোণ দ্বিখণ্ড করে, তবে

$$\text{কই} \cdot \text{খউ} \cdot \text{গক} = \frac{\text{অ}^2 \text{ই}^2 \text{উ}^2}{(\text{অ} + \text{ই})(\text{ই} + \text{উ})(\text{উ} + \text{অ})}।$$

৫০। যদি কোন অর্ধবৃত্ত পরিধি, যে কোন তিন অংশে বিভক্ত হয় এবং তিনটি চাপের পরিমাণ ক, খ ও গ হয়, তবে $\text{অ}^2 - (\text{ক}^2 + \text{খ}^2 + \text{গ}^2) \text{অ} = ২ \text{কখগ}$, এই সমীকরণ হইতে ব্যাসের পরিমাণ স্থির হইবে।

৫১। কমগ বৃত্তপাদের পরিধির দুই সীমা হইতে মান সমান

দূরে পরিধিষ্ণু থা ও ঘ দুই বিন্দু কল্পনা করিয়া মগএর উপর
খছ ও ঘজ লম্বাটান ; এক্ষণে প্রতিপন্ন কর যে, খছজঘ ক্ষেত্র,
মথঘ বৃত্তক্ষেদকের সমান হইবে।

৫২। ভিন্ন ভিন্ন বৃত্তের সদৃশ চাপ, তাহাদের ব্যাসার্ধের
এবং সদৃশ বৃত্তক্ষেদক, ব্যাসার্ধের উপর অঙ্কিত সমচতুর্ভুজ
গুলির সমানুপাতী হইয়া থাকে।

৫৩। প্রতিপন্ন কর যে, ভিন্ন ভিন্ন বৃত্তের কেন্দ্রস্থ বা পরি-
ধিষ্ণু কোণ, যে সকল চাপের উপর দণ্ডায়মান থাকে, তাহাদের
সমস্ত রূপে ও ব্যাসার্ধ গুলির ব্যাস্ত রূপে সমানুপাতী হয়।

৫৪। বৃত্তক্ষেদকের কোণ সকল ব্যাসার্ধ গুলির ব্যাস্ত রূপে
সমানুপাতী হইলে, বৃত্তক্ষেদক গুলি সমান হইবে।

৫৫। কোন সরল রেখা এক বৃত্তের মধ্যে স্থাপিত হইলে,
যদি তাহার এক প্রান্ত হইতে একটি ব্যাসার্ধ টানা যায় ও সেই
ব্যাসার্ধকে ব্যাস করিয়া আর একটি বৃত্ত অঙ্কিত করা যায়,
তবে পৃথকাক্ত সরল রেখা দ্বারা ছেদিত দুই বৃত্তের খণ্ডদ্বয়
৪ ও ২এর অনুপাতী হইবে।

৫৬। কোন সমচতুর্ভুজের চারি ভূজের মধ্য বিন্দু গুলি
সংযুক্ত করিয়া আর একটি সমচতুর্ভুজ তাহার অন্তর্গত কর :
আবার একটি সমচতুর্ভুজ দ্বিতীয় সমচতুর্ভুজের অন্তর্গত কর
এবং এইরূপ করিতে থাক ; এক্ষণে প্রতিপন্ন কর যে, যাবতীয়
অন্তর্গত সমচতুর্ভুজ গুলির সমষ্টি প্রথম সমচতুর্ভুজের
সমান হইবে।

৫৭। প্রতিপন্ন কর যে, বহিষ্ণু কোন বিন্দু হইতে এক
বর্তুলের যত গুলি স্পর্শিনী টানা যাইতে পারে, সকলেই পর-
স্পর সমান।

৫৮। যদি কথগ ত্রিভুজের প্রত্যেক বাহুর মধ্য বিন্দু
পর্যন্ত কচ, খছ ও গজ এই তিন রেখা টানা যায়, তাহা হইলে,
কছ. খজ. গচ = কজ. খচ. গছ।

৫৯। উক্ত প্রতিজ্ঞায় যদি কছ, খছ ও গজ তিন বাহুর উপর
লম্ব হয়, তাহা হইলেও কছ. খজ. গচ = কজ. খচ. গছ।

৬০। উক্ত প্রতিজ্ঞায় যদি কচ, খছ ও গজ রেখা ক, খ ও

গ কোণকে দ্বিখণ্ড করে, তাহা হইলেও কছ. খজ. গচ = কজ. খচ. গছ।

৩১। উক্ত প্রতিজ্ঞায় যদি চ, ছ ও জ, অন্তর্গত বৃত্তের ও ক্ষুদ্রত্রয়ের সংযোগ বিন্দু হয়, তাহা হইলেও কছ. খজ. গচ = কজ. খচ. গছ।

৩২। যদি কখগ ত্রিভুজের তিন কোণ হইতে একই ম বিন্দু দিয়া কচ, খছ ও গজ রেখা টানা যায়, তবে কছ. খজ. গচ = কজ. খচ. গছ; আর এই সমীকরণকে সত্য কল্পনা করিয়া প্রমাণ কর যে, কচ, খছ ও গজ একই বিন্দু দিয়া যাইবে।

৩৩। যদি কখগ ত্রিভুজের কখ ও কগ বাহু জ ও ছ বিন্দুতে সমানুপাতী রূপে বিভক্ত হয় এবং খগ বাহু চ বিন্দুতে দ্বিখণ্ডিত হয়; তাহা হইলে কচ, খছ ও গজ রেখা একই বিন্দু দিয়া যাইবে।

৩৪। যষ্ঠ অধ্যায়ের ২য় প্রতিজ্ঞার প্রথম চিত্রে যদি খগ ও গঘ, চ বিন্দুতে পরস্পরকে ছেদ করে, তবে বর্জিত কচ, খগকে দ্বিখণ্ড করিবে।

৩৫। যদি কোন সরল রেখা কোন ত্রিভুজের খগ, কগ, ও কখ বাহুকে চ ছ ও জ বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কছ. খজ. গচ = কজ. খচ. গছ; আর এই সমীকরণকে সত্য কল্পনা করিয়া প্রমাণ কর যে, চ, ছ ও জ বিন্দু একই সরল রেখাতে অবস্থিত হইয়াছে।

৩৬। যদি কোন ত্রিভুজের কখ বাহুকে য পর্য্যন্ত বর্জিত করা যায় এবং কগ বাহু হইতে খঘএর সমান গচ অংশ ছেদ করা যায়, তবে কগতে কখতে যে অনুপাত, ঘচ রেখার দুই অংশে সেই অনুপাত; আর কচতে কঘতে যে অনুপাত, খগ রেখার দুই অংশে সেই অনুপাত হইবে।

৩৭। কখগ ত্রিভুজের তিনটি কোণিক বিন্দু হইতে তাহার অভ্যন্তরে অন্য একটি বিন্দু দিয়া তিন রেখা টানিলে, যদি তাহার ঐ তিন বাহুর সহিত যথাক্রমে চ, ছ ও জ বিন্দুতে সংলগ্ন হয়, এবং এই তিন বিন্দু দিয়া একটি বৃত্ত অঙ্কিত করিলে, যদি সেই বৃত্ত, বাহুত্রয়কে পুনরায় ট, ঠ ও ড বিন্দুতে ছেদ করে, তবে কট, খঠ ও গড একই বিন্দুতে সংলগ্ন হইবে।

৩৮। কোন ত্রিভুজের অভ্যন্তরীণ একটি বিন্দু দিয়া তিন কোণ হইতে সম্মুখীন বাহু পর্য্যন্ত তিনটি রেখা টানিয়া যদি বাহুত্রয়ের ছেদ বিন্দুগুলি সংযুক্ত করা যায়, তবে প্রথম অঙ্কিত রেখাগুলি, লম্ব সমানুপাতী রূপে বিভক্ত হইবে।

৩৯। কোন আমীন ক স্থান হইতে দূরবর্তী দ নামক বস্তু দেখিতেছিলেন; যদি তিনি দকএর অভিমুখে খ বিন্দু নির্দেশ করেন ও খ বিন্দু দিয়া অন্য দিকে গ ও ঘ বিন্দু নির্দেশ করেন এবং কগ ও গদএর সম্পাতে ও বিন্দু উৎপন্ন হয়, তবে

$$\text{কদ} = \frac{\text{কখ} \cdot \text{গঘ} \cdot \text{ওক}}{\text{খগ} \cdot \text{ঘও} - \text{কও} \cdot \text{গঘ}} \mid$$

৭০। পূর্ব প্রতিজ্ঞার চিত্রে কখগ ত্রিভুজ অঙ্কিত কর এবং দ বিন্দু দিয়া কগ ও খগকে ঘও ও বিন্দুতে ছেদ করে একপ এক সরল রেখা টান; তাহা হইলে, কও ও খঘএর ছেদ বিন্দু এবং গ বিন্দু দিয়া অন্য এক সরল রেখা টানিলে, যদি তাহা কখকে চ বিন্দুতে

$$\text{ছেদ করে, তবে কদ} = \frac{\text{কখ} \cdot \text{কচ}}{\text{খচ} - \text{কচ}} \mid$$

৭১। বৃত্তের অন্তর্গত ত্রিভুজের তিন কোণিক বিন্দু দিয়া তিনটি স্পর্শিনী অঙ্কিত করিলে, প্রত্যেক স্পর্শিনী ও সম্মুখীন ত্রিভুজের বর্ধিত বাহুর সম্পাতে যে বিন্দুত্রয় উৎপন্ন হইতে, তাহারা একই সরল রেখাতে থাকিবে।

৭২। কোন বৃত্তের অন্তর্গত বড় ভুজের দুইটি দুইটি সম্মুখীন ভুজ বর্ধিত করিলে, তাহাদের সম্পাত বিন্দুগুলি একই সরল রেখাতে থাকিবে।

৭৩। বৃত্তের অন্তর্গত বড় ভুজের দুইটি দুইটি সম্মুখীন কোণিক বিন্দুর সংযোজক রেখাত্রয় পরস্পরকে একই বিন্দুতে ছেদকরিবে।

৭৪। কোন ব্যক্তির চক্ষু ভূমি হইতে ছয় পাদ (ফুট) উচ্চ; তিনি সমধরাতলে দণ্ডায়মান হইলে চতুর্দিকে তিন মাইল পর্য্যন্ত দেখিতে পান; ইহার দ্বারা প্রমাণ কর যে, পৃথিবীর ব্যাসার্ধ প্রায় ৪০০০ মাইল।

৭৫। প্রতিপন্ন কর যে, নিয়মিত ঘন ক্ষেত্রের সংখ্যা পাঁচটি মাত্র হইতে পারে।

এই গ্রন্থে কতিপয় অপ্রচলিত এবং নূতন শব্দ ও বাক্য ব্যবহৃত হইরাছে; সেই গুলি ইংরাজি অর্থ সহিত লিখিত হইল ।

অঙ্কন	Construction.
অন্তর সমানুপাত... ..	Proportion by Division (<i>Dividendo.</i>)
অন্তর বিলোম সমানুপাত	Proportion by Conversion (<i>Convertendo.</i>)
অষ্টভূমিক ঘন ক্ষেত্র ...	Octahedron.
উপপ্রতিজ্ঞা	Lemma.
উপস্থাপন	Superposition.
একান্তর কোণ	The alternate angle.
একান্তর সমানুপাত ...	Proportion by Permutation or alternation (<i>Alternando.</i>)
কল্পনা	Hypothesis.
ক্রম সমানুপাত	Proportion from Equality (<i>Ex equali.</i>)
খণ্ডিনী... ..	Secant.
চতুভূমিক ঘন ক্ষেত্র ...	Tetrahedron.
ছেদিত ঘন ক্ষেত্র... ..	Prism.
দ্বাদশ ভূমিক ঘন ক্ষেত্র	Dodecahedron.
পরস্পর দৃঢ় রাশি ...	Incommensurable Quantities.
পরিমিতি	Perimeter.
প্রৱদ্ধ কোণ... ..	Re-entrant angle.
বিলোম } বাৎক্রম }	{ Proportion by Inversion (<i>Invertendo.</i>)
সমানুপাত ... }	
বিহত ভাবাপন্ন ক্ষেত্র সকল	Reciprocal Figures.
বিহত ভাবে সমানুপাতী	Reciprocally Proportional.

বিয়োগ বিধি	The method of Exhaustions.
বিংশতি ভূমিক ঘনক্ষেত্র		Icosahedron.
বাতিক্রম সমানুপাত	...	Disorderly Proportion.
সমচতুর্ভুজিক ঘনক্ষেত্র		Cube.
সমতল	Plane Superfices.
সমদূর সমানুপাত	...	Proportion from equality of distance.
সমান্তর	Parallel.
সমান্তরিক	Parallelogram.
সমান্তর ভূমিক ঘনক্ষেত্র		Parallelopiped.
সম্মিলিত অনুপাত	...	Compound Ratio.
স্পর্শিনী	Tangent.

অশুদ্ধি।

ষষ্ঠ অধ্যায়ের ২য় সংজ্ঞাতে “সমান সমান দুইটা”
ইহার পরিবর্তে “এক একটা” এই রূপ হইবে।



